Berekenbaarheid 2015
Uitwerkingen Inhaaltoets
23 oktober 2015

1. Laat zien dat iedere recursief opsombare taal ook herkend wordt door een standaard Turing-machine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ met $F = \{q_0\}$, dus waarbij de begintoestand q_0 de enige eindtoestand is.

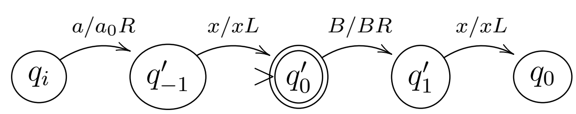
   Als een taal recursief opsombaar is, wordt hij herkend door een standaard Turing-machine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$. We gaan nu uit M een $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, \{q'_0\})$ construeren die dezelfde taal herkent, maar ook aan de eisen uit de opgave voldoet.

   We zorgen ervoor dat vanuit de nieuwe q'_0 alleen een transitie van de vorm B/BR vertrekt (zoals in opgave 4 van toets 1 van dit jaar), en we zorgen er ook voor dat aan iedere toestand in F voor ieder symbool dat nog geen transisitie had een transitie wordt toegevoegd die een niet-blank schrijft, en vervolgens weer teruggaat naar dit symbool, uitkomend in de nieuwe q'_0. Daar zal de machine M' stoppen omdat we dan dus niet op een B staan.

   In een plaatje:

   de situatie in M:

   wordt in M':



   met $x \in \Gamma$. In dit plaatje is er een pijl vanuit iedere $q_i \in F$ voor ieder symbool a met $\delta(q_i, a)\uparrow$, en is a_0 een vast symbool met $a_0 \neq B$.

   Formeel is deze constructie:

$$Q' := Q \cup \{q'_{-1}, q'_0, q'_1\}$$

en de definitie van δ' is:

$$\begin{array}{lr}
\delta'(q_i, a) = \delta(q_i, a) & q_i \in Q,\ a \in \Gamma \text{ en } \delta(q_i, a)\downarrow \\
\delta'(q_i, a) = [q'_{-1}, a_0, R] & q_i \in F,\ a \in \Gamma \text{ en } \delta(q_i, a)\uparrow \\
\delta'(q_i, a)\uparrow & q_i \in Q - F,\ a \in \Gamma \text{ en } \delta(q_i, a)\uparrow \\
\delta'(q'_{-1}, x) = [q'_0, x, L] & x \in \Gamma \\
\delta'(q'_0, B) = [q'_1, B, R] & \\
\delta'(q'_0, x)\uparrow & x \in \Gamma \text{ en } x \neq B \\
\delta'(q'_1, x) = [q_0, x, L] & x \in \Gamma
\end{array}$$

Hierin is $a_0 \in \Gamma$ dus een vast symbool met $a_0 \neq B$. Voor iedere a_0 krijg je een andere M', maar iedere M' die je zo krijgt voldoet aan de opgave.

2. Voor een Turing-machine M is het probleem H_M:

   input: w
   vraag: stopt M met input w?

   Het probleem P_2 is vervolgens:

   input: $R(M)$
   vraag: is H_M beslisbaar?

   Laat zien dat P_2 onbeslisbaar is.

   Dit valt onder de stelling van Rice, want H_M is beslisbaar precies dan als $L(M)$ recursief is, en dit is een eigenschap van de taal van M.

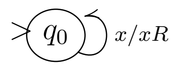
   We hoeven dus alleen te laten zien dat P_2 niet-triviaal is. Maar dit is duidelijk, want er zijn talen (die herkend worden door een Turing-machine) die recursief zijn en zijn talen (die herkend worden door een Turing-machine) die niet recursief zijn. Zo is de lege taal $\emptyset$ recursief, en de taal van het halting probleem

$$L_H = L(U) = \{R(M)w \mid M(w)\downarrow\}$$

   niet recursief (want als L_H recursief was, was het halting probleem H beslisbaar.)

We hebben dus $M_{\text{nee}} = U$ en

M_{ja} :



$x \in \Gamma$

3. Gegeven een primitief recursieve functie g. De functie f is gedefinieerd door:

$$f(n) := \text{het aantal verschillende elementen in } \{g(x) \mid 0 \leq x \leq n\}$$

Dus $f(n)$ telt het aantal elementen in het bereik van g als het domein $\{0, \ldots, n\}$ is. Laat zien dat f ook primitief recursief is.

Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

Dit volgt uit het feit dat de definitie van f te schrijven is als:

$$f(n) = \sum_{y=0}^{\sum_{x=0}^{n} g(x)} \mathsf{sg}\Big(\sum_{x=0}^{n} \mathsf{eq}(g(x), y)\Big)$$