Berekenbaarheid 2016
Tentamen
26 januari 2017

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op: bij een aantal opgaven wordt je gevraagd het antwoord te verklaren, vergeet dit niet!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Geef een standaard Turing-machine M_1 die de volgende taal herkent door eindtoestand:

$$L_1 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid |w|_a + |w|_b = |w|_c\}$$

   Hierin is $|w|_a$ een notatie voor het aantal a's in het woord w. Er geldt bijv. $cbccbaccabcbca \in L_1$, want dit woord bevat 3 a's, 4 b's en 7 c's, en $3+4=7$.

2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine M_2 die de volgende taal herkent door eindtoestand:

$$L_2 := \{u_1 v u_2 \mid u_1, u_2, v \in \{a,b,c\}^*,\ v \neq \lambda \text{ en } |v|_a = |v|_b = |v|_c\}$$

   Zorg ervoor dat een woord $w \in L_2$ wordt herkend in hoogstens $3|w| + 4$ stappen, waarin $|w|$ de lengte van w is.

3. Geef een numerieke Turing-machine M_3 die de functie f_3 uitrekent die gegeven is door:

$$\begin{array}{ll} f_3(n,m) = \lceil n/m \rceil & \text{als } m \neq 0 \\ f_3(n,m)\uparrow & \text{als } m = 0 \end{array}$$

   Hierin betekent $\lceil\ \rceil$ afronden naar boven. Er geldt dus bijv. dat $f_3(1,4) = \lceil \frac{1}{4} \rceil = 1$. Je mag gebruik maken van de macro's op pagina 3 van dit tentamen.

4. Geef de code $R(M_4)$ van een deterministische Turing-machine M_4 waarvoor geldt dat $U(R(M_4)R(M_4))\uparrow$, waarbij U een universele Turing-machine is. Verklaar je antwoord. Zie pagina 4 voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.

5. Is het volgende probleem P_5 onbeslisbaar?

Input: Een code $R(M)$ van een Turing-machine M.

Vraag: Bevat de taal $L(M)$ een code $R(M')$ van een Turing-machine M' waarvoor geldt dat $L(M')$ recursief opsombaar is?

Zo ja, laat zien dat dit zo is. Zo nee, verklaar waarom dit niet zo is.

6. Laat zien dat het volgende probleem P_6 onbeslisbaar is:

Input: Een code $R(M)$ van een Turing-machine M.

Vraag: Bevat de taal $L(M)$ de code $R(M)$?

7. Leg uit hoe de verzameling van Turing-berekenbare functies en de verzameling van μ-recursieve functies gedefinieerd zijn (waarbij je Turing-machines bekend mag veronderstellen), en leg uit wat de relatie tussen deze twee verzamelingen is.

8. Geef numerieke functies f_8, g_8 en h_8 zodat:

$$\begin{aligned} f_8 \circ (g_8, h_8) &= \mathsf{add} \\ g_8 \circ (h_8, f_8) &= \mathsf{add} \\ h_8 \circ (f_8, g_8) &= \mathsf{add} \end{aligned}$$

Zie pagina 4 voor de definitie van de functie add. Verklaar je antwoord.

9. De 'toren van machten' functie f_9 is gedefinieerd door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_9(x, 0) &= 1 \\ f_9(x, y+1) &= x^{f_9(x,y)} \end{aligned}$$

Er geldt bijv. $f_9(2, 4) = 65536$. Geef functies g_9 en h_9 zodat:

$$f_9 = \textbf{primrec}(g_9, h_9)$$

en schrijf deze functies als compositie van functies op pagina 4.

10. Laat zien dat er primitief recursieve functies f_{10} en g_{10} bestaan zodat:

$$\begin{aligned} f_{10}(2^{x+1}3^{y+1}) &= x \\ g_{10}(2^{x+1}3^{y+1}) &= y \end{aligned}$$

Je mag zelf weten wat deze functies doen met getallen die niet van de vorm $2^{x+1}3^{y+1}$ zijn. Er moet bijv. gelden dat $f_{10}(3888) = 3$ en $g_{10}(3888) = 4$, want $2^{3+1}3^{4+1} = 16 \cdot 243 = 3888$. Je mag gebruiken dat de functies of pagina 4 primitief recursief zijn, en dat begrensde operatoren toegepast op expressies met alleen primitief recursieve functies weer primitief recursieve functies definiëren.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\;\;\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\;\;\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\;\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} 1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\;\;B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} m}\ldots B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$B^i\,\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\,\underset{\uparrow}{B} \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\;\;\;\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}\,B^i\,\overline{n}\,B \qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^i B$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\;\;\;\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\;\;\;\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$ / $n>0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
&\quad (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$