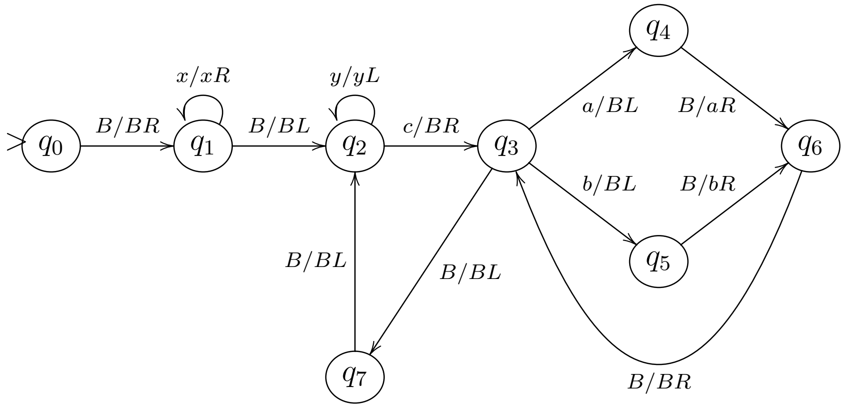
Berekenbaarheid 2016
Uitwerkingen Toets 1
25 november 2016

1. Definieer een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ die uit zijn input de c's verwijdert. Er moet bijvoorbeeld gelden dat $M_1(abccb) = abb$. (3 punten)

   Zorg er voor dat bij terminatie de output op de juiste plaats op de tape staat, en dat de lees/schrijf-kop weer aan het begin van de tape staat.

   M_1:

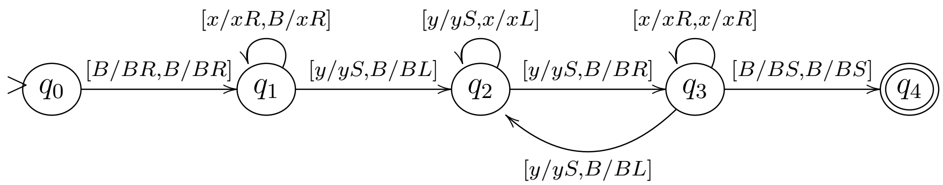


   $x \in \{a, b, c\}$
   $y \in \{a, b\}$

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing-machine M_2 die de taal (3 punten)

$$L(M_2) = \{u^k \mid u \in \{a, b\}^* \text{ en } k > 1\}$$

   herkent door eindtoestand. Er moet bijvoorbeeld gelden $abaabaaba = (aba)^3 \in L(M_2)$. Zorg ervoor dat een correcte input van lengte n in ten hoogste $4n + 4$ stappen wordt herkend. (Je hoeft niet uit te leggen waarom dit het geval is.)



$x \in \{a, b\}$
$y \in \{B, a, b\}$

Stel $w = u^k \in L(M_2)$ met $u \neq \lambda$. Dan is het aantal stappen van deze machine:

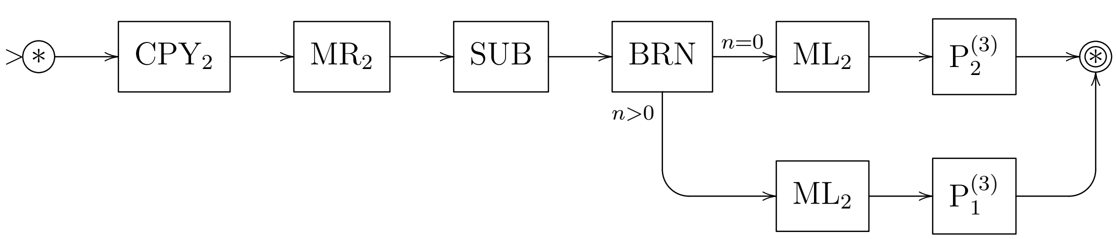
$$\begin{aligned} 1 + |u| + 1 + (k-1)(|u| + 1 + |u| + 1) &= (2k-1)|u| + 2k \\ &\leq (2k-1) + 2k = 4k - 1 \\ &\leq 4k + 4 \leq 4|w| + 4 \end{aligned}$$

Als $w = \lambda$ dan heeft deze machine 4 stappen nodig, en in dat geval geldt $4|w| + 4 = 4 \cdot 0 + 4 = 4$.

3. Definieer een numerieke Turing-machine die de functie (2 punten)

$$\max(n, m) = \begin{cases} n & \text{if } n \geq m \\ m & \text{if } m \geq n \end{cases}$$

uitrekent. Je mag hierin de macro's op de achterkant van dit blaadje gebruiken.



4. Leg uit waarom iedere recursieve taal recursief opsombaar is. (1 punten)

   Een taal is recursief als er een Turing machine bestaat die de taal herkent en die voor iedere input stopt. Een taal is recursief opsombaar als er een Turing machine bestaat (zonder verdere eisen aan de machine) die de taal herkent. Dus iedere recursieve taal kan worden herkend met een Turing machine, en is dus ook recursief opsombaar.