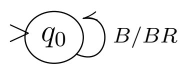
Berekenbaarheid 2016
Uitwerkingen Toets 2
13 december 2016

1. Geef een code $R(M)$ van een Turing machine M waarvoor geldt dat $\lambda \notin L(M)$ en $R(M) \in L(M)$. Verklaar je antwoord. Zie de achterzijde van dit blaadje voor een relevant stukje uit het boek van Sudkamp. (2 punten)

   Neem bijvoorbeeld voor M:

   Deze machine heeft code:

   $$R(M) = \mathbf{00010111010111011000}$$

   De taal van deze machine is:

   $$L(M) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \neq \lambda\}$$

   Dus, omdat $R(M) \neq \lambda$, geldt als gevraagd:

   $$\lambda \notin L(M)$$
   $$R(M) \in L(M)$$

2. (a) Laat zien dat er een recursief opsombare taal bestaat die niet recursief is. Hint: denk aan het halting probleem. (2 punten)

   Eerst even de definities:

   - Een recursief opsombare taal is een taal waarvoor een Turing machine bestaat die die taal herkent (door stoppen of door eindtoestand, dat maakt niet uit).
   - Een recursieve taal is een taal waarvoor een Turing machine bestaat die de taal herkent en die voor iedere input stopt (als die taal ongelijk is aan Σ^* moet dat dus door eindtoestand).

   Het standaardvoorbeeld van een taal die recursief opsombaar is maar niet recursief is de taal van het halting probleem (zie Sudkamp 3e editie, pagina 365):

   $$L_H := \{R(M)w \mid M(w)\downarrow\}$$

Deze taal is recursief opsombaar, want wordt geaccepteerd (door stoppen) door de universele Turing machine, ofwel:

$$L_H = L(U)$$

Maar de taal is niet recursief, want als er een machine was die de taal zou herkennen en voor iedere input zou stoppen, dan zou dat een beslissingsprocedure voor het halting probleem geven, en het halting probleem is onbeslisbaar.

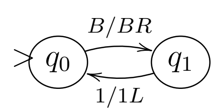
(b) Is het probleem P_2 beslisbaar dat, met als input de code $R(M)$ van een Turing machine M, vraagt of de taal $L(M)$ recursief is? Verklaar je antwoord. (1 punt)

Nee, dit is niet beslisbaar, en dat volgt uit de stelling van Rice. Het gaat hier duidelijk om een eigenschap van de taal van de machine, dus we moeten alleen laten zien dat de eigenschap niet-triviaal is, en dat volgt direct uit het vorige onderdeel van de opgave (die geeft de 'M_{nee}').

3. Laat zien dat het probleem P_3 onbeslisbaar is dat, met als input de code $R(M)$ van een Turing machine M, vraagt of M de eigenschap heeft dat het aantal inputs waarvoor M stopt en het aantal inputs waarvoor M niet stopt allebei oneindig is. (2 punten)

Ook dit volgt uit de stelling van Rice, want de gevraagde eigenschap is equivalent aan de eigenschap dat zowel $L(M)$ als $\overline{L(M)}$ een oneindige taal zijn.

Dat de eigenschap niet triviaal is geldt ook. Neem voor M_{ja}:

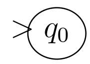


Dan geldt:

$$\begin{aligned} L(M_{\text{ja}}) &= \{0w \mid w \in \{0,1\}^*\} \cup \{\lambda\} \\ \overline{L(M_{\text{ja}})} &= \{1w \mid w \in \{0,1\}^*\} \end{aligned}$$

Beide verzamelingen zijn oneindig (er zijn oneindig veel verschillende ws) dus voor M_{ja} geldt de eigenschap van P_3.

Neem voor M_{nee}:



Dan geldt

$$\overline{L(M_{\text{nee}})} = \emptyset$$

Deze verzameling is niet oneindig, dus voor M_{nee} geldt de eigenschap van P_3 niet.

4. Laat met reductie zien dat het probleem P_4 onbeslisbaar is dat, met als input de code $R(M)$ van een Turing machine M, vraagt of M de eigenschap heeft dat hij met input λ stopt op een even positie op de tape (dus met de lees-/schrijfkop op vakje 0 of 2 of 4 of ...) (2 punten)

   We reduceren het blank tape probleem B naar P_4. We moeten dus bij iedere M een M' maken zodat:

$$M(\lambda)\downarrow \iff M' \text{ stopt op een even positie op de tape}$$

   Een te naieve constructie hiervoor is om voor M' te nemen:

   (a) doe M

   (b) ga naar een even positie op de tape

   Er is immers geen manier om in M te weten of je op een gegeven moment op een even of oneven positie op de tape staat, dus er is geen manier om de tweede stap uit te voeren.

   Er zijn verschillende manieren om hier omheen te werken, waarvan we er hier twee geven:

   - Je kan in de toestanden van M' bijhouden of je op een even of oneven positie staat. De toestanden van M 'verdubbelen' dan, met een kopie voor de even en een kopie voor de oneven posities.

     Een formeel wiskundige beschrijving van deze constructie (niet nodig voor alle punten voor deze opgave) gaat als volgt:
     Laat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. Definieer dan $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0^E)$ met

$$Q' := \{q_i^E, q_i^O \mid q_i \in Q\} \cup \{q_f^E\}$$

en:

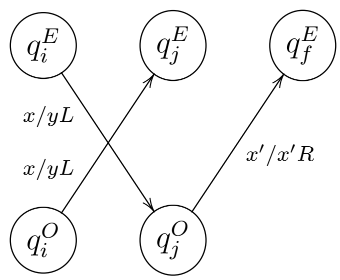
$$\begin{array}{lll}
\delta'(q_i^E, x) & = [q_j^O, y, d] & \text{als } \delta(q_i, x) = [q_j, y, d] \\
\delta'(q_i^E, x)\uparrow & & \text{als } \delta(q_i, x)\uparrow \\
\delta'(q_f^E, x)\uparrow & & \\
\delta'(q_i^O, x) & = [q_j^E, y, d] & \text{als } \delta(q_i, x) = [q_j, y, d] \\
\delta'(q_i^O, x) & = [q_f^E, x, R] & \text{als } \delta(q_i, x)\uparrow
\end{array}$$

De laatste regel voor δ' correspondeert dus met stap (b) in de naieve constructie hierboven.

Een transitie van M:

$$q_i \xrightarrow{x/yL} q_j$$

waarbij er vanuit q_j geen transitie is voor het symbool x', wordt in M' dus:



- Je kan M' hetzelfde laten doen als M maar voor iedere stap *twee* stappen op de tape laten doen. Als M' stopt, stopt hij dan dus altijd op een even positie op de tape. De vakjes van de tape van M komen dan dus op de even posities van de tape van M'.

  Een formeel wiskundige beschrijving van deze constructie (niet nodig voor alle punten voor deze opgave) gaat als volgt:
  Laat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. Definieer dan $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0)$ met

  $$Q' := \{q_i, q_i^L, q_i^R \mid q_i \in Q\}$$

en:

$$
\begin{array}{lll}
\delta'(q_i, x) & = [q_j^L, y, L] & \text{als } \delta(q_i, x) = [q_j, y, L] \\
\delta'(q_i, x) & = [q_j^R, y, R] & \text{als } \delta(q_i, x) = [q_j, y, R] \\
\delta'(q_i, x)\uparrow & & \text{als } \delta(q_i, x)\uparrow \\
\delta'(q_j^L, B) & = [q_j, B, L] & \\
\delta'(q_j^L, x)\uparrow & & \text{als } x \neq B \\
\delta'(q_j^R, B) & = [q_j, B, R] & \\
\delta'(q_j^R, x)\uparrow & & \text{als } x \neq B
\end{array}
$$

Een transitie van M:

$$q_i \xrightarrow{x/yL} q_j$$

wordt in M' dus:

$$q_i \xrightarrow{x/yL} q_j^L \xrightarrow{B/BL} q_j$$

- Een derde mogelijkheid is om B naar P_4 te reduceren door P_4 naar *twee* machines te laten kijken, M' en M''. Hierbij is M':

  (a) doe M

  dus M' is gelijk aan M. Voorts is M'':

  (a) doe M

  (b) ga één stap naar rechts

  Als P_4 voor één van deze machines een positief antwoord geeft dan stopt M met de lege tape als input. Als P_4 voor beide machines een negatief antwoord geeft dan stopt M niet met de lege tape als input.

  Een formeel wiskundige beschrijving van de constructie van M' (niet nodig voor alle punten voor deze opgave) gaat als volgt:
  Laat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$. Definieer dan $M' = (Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q_0)$ met

$$Q' := Q \cup \{q_f\}$$

  en:

$$
\begin{array}{lll}
\delta'(q_i, x) & = [q_j, y, d] & \text{als } \delta(q_i, x) = [q_j, y, d] \\
\delta'(q_i, x) & = [q_f, x, R] & \text{als } \delta(q_i, x)\uparrow \\
\delta'(q_f, x)\uparrow & &
\end{array}
$$

De één-na-laatste regel voor δ' correspondeert dus met stap (b) in de informele constructie van M'' hierboven.