Logica als een oefening in Formeel Denken

Herman Geuvers

Institute for Computing and Information Science
Radboud Universiteit Nijmegen

Wiskunde Dialoog
10 juni, 2015

Inhoud

Over mij

- Studie wiskunde RU (doctoraal 1988)
- Promotie informatica RU (1993)
- Universitair Docent Informatica TUE (1993-1999)
- Universitair Hoofddocent Informatica RU (2000-2006)
- Hoogleraar Theoretische Informatica RU (2006 - nu)
- Deeltijdhoogleraar Bewijzen met Computerondersteuning TUE (2007 - nu)

Inhoud

Zeer beknopte geschiedenis van de logica

- Aristoteles: syllogismen
  "Een zoogdier ademt, een plant ademt niet, dus een plant is geen zoogdier"

Zeer beknopte geschiedenis van de logica

- Aristoteles: syllogismen
  "Een zoogdier ademt, een plant ademt niet, dus een plant is geen zoogdier"
- Leibniz, Boole: logica als calculus of algebra.
  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

Zeer beknopte geschiedenis van de logica

- Aristoteles: syllogismen
  "Een zoogdier ademt, een plant ademt niet, dus een plant is geen zoogdier"
- Leibniz, Boole: logica als calculus of algebra.
  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.
- Frege, Russell: logicisme, de wiskunde gegrondvest op de logica.

Zeer beknopte geschiedenis van de logica

- Aristoteles: syllogismen
  "Een zoogdier ademt, een plant ademt niet, dus een plant is geen zoogdier"
- Leibniz, Boole: logica als calculus of algebra.
  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.
- Frege, Russell: logicisme, de wiskunde gegrondvest op de logica.
- Gentzen, Gödel, Tarski: logica als formeel systeem; meta-logica
  volledigheid en onvolledigheidsstelling

Zeer beknopte geschiedenis van de logica

- Aristoteles: syllogismen
  "Een zoogdier ademt, een plant ademt niet, dus een plant is geen zoogdier"
- Leibniz, Boole: logica als calculus of algebra.
  $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.
- Frege, Russell: logicisme, de wiskunde gegrondvest op de logica.
- Gentzen, Gödel, Tarski: logica als formeel systeem; meta-logica
  volledigheid en onvolledigheidsstelling
- Mathematische logica (bewijstheorie) en logica voor informatica
  onbeslisbaarheid

Logica voor informatica

- Systeemeigenschappen precies specificeren. Natuurlijke taal is niet precies (ambigu).
- Systeem eigenschappen automatisch verifiëren, door/met behulp van een computer.

Logica voor informatica

- Systeemeigenschappen precies specificeren. Natuurlijke taal is niet precies (ambigu).
- Systeem eigenschappen automatisch verifiëren, door/met behulp van een computer.

Formeel leren denken:

- Logica als formele taal om te leren precies te zijn.
- Koppeling tussen eis aan een systeem (natuurlijke taal) en precieze ‘requirement’ (formele taal).
- Redeneren over en rekenen met de formele taal

Logica voor informatica

- Systeemeigenschappen precies specificeren. Natuurlijke taal is niet precies (ambigu).
- Systeem eigenschappen automatisch verifiëren, door/met behulp van een computer.

Formeel leren denken:

- Logica als formele taal om te leren precies te zijn.
- Koppeling tussen eis aan een systeem (natuurlijke taal) en precieze 'requirement' (formele taal).
- Redeneren over en rekenen met de formele taal

Cursus "Formeel Denken", voor Informatiekunde en Kunstmatige Intelligentie.

Inhoud

Redeneren in de natuurlijke taal

- Socrates is een mens. Een mens is sterfelijk. Dus Socrates is sterfelijk.

Redeneren in de natuurlijke taal

- Socrates is een mens. Een mens is sterfelijk. Dus Socrates is sterfelijk.
- Ik ben iemand. Iemand schilderde de Mona Lisa. Dus ik ben de schilder van de Mona Lisa.

Redeneren in de natuurlijke taal

- Socrates is een mens. Een mens is sterfelijk. Dus Socrates is sterfelijk.
- Ik ben iemand. Iemand schilderde de Mona Lisa. Dus ik ben de schilder van de Mona Lisa.

Is de volgende zin waar of niet?

$\boxed{\text{Deze zin is niet waar.}}$

Formele taal: woordenboek

als het regent *en* ik ben buiten, *dan* word ik nat.

Is opgebouwd uit de eenvoudige uitspraken ‘het regent’, ‘ik ben buiten’ en ‘ik word nat’.

Formele taal: woordenboek

als het regent *en* ik ben buiten, *dan* word ik nat.

Is opgebouwd uit de eenvoudige uitspraken ‘het regent’, ‘ik ben buiten’ en ‘ik word nat’.

Woordenboek

R	het regent
Z	de zon schijnt
RB	er is een regenboog
N	ik word nat
D	ik blijf droog
Bui	ik ben buiten
Bin	ik ben binnen

De zin hierboven wordt dan

als R en Bui, dan N

Formele taal: Verbindingswoorden

We vervangen verbindingswoorden door voegtekens:

Formele taal	Nederlands
$f \wedge g$	f en g
$f \vee g$	f of g
$f \rightarrow g$	als f, dan g
$f \leftrightarrow g$	f dan en slechts dan als g
$\neg f$	niet f

De zin van de vorige slide wordt dan

$$(\mathrm{R} \wedge \mathrm{Bui}) \rightarrow \mathrm{N}$$

Voorbeelden

R	het regent
Z	de zon schijnt

Vind formele zinnen die hetzelfde betekenen als de volgende natuurlijke taal zinnen.

1. Het regent niet, noch schijnt de zon.
2. De zon schijnt, tenzij het regent.
3. Of de zon schijnt, of het regent. (Dus niet allebei!)

Voorbeelden

R	het regent
Z	de zon schijnt

Vind formele zinnen die hetzelfde betekenen als de volgende natuurlijke taal zinnen.

1. Het regent niet, noch schijnt de zon.
   $\neg R \wedge \neg Z$
2. De zon schijnt, tenzij het regent.
3. Of de zon schijnt, of het regent. (Dus niet allebei!)

Voorbeelden

R	het regent
Z	de zon schijnt

Vind formele zinnen die hetzelfde betekenen als de volgende natuurlijke taal zinnen.

1. Het regent niet, noch schijnt de zon.
   $\neg R \land \neg Z$
2. De zon schijnt, tenzij het regent.
   $R \to \neg Z$, of $Z \leftrightarrow \neg R$?
3. Of de zon schijnt, of het regent. (Dus niet allebei!)

Voorbeelden

R	het regent
Z	de zon schijnt

Vind formele zinnen die hetzelfde betekenen als de volgende natuurlijke taal zinnen.

1. Het regent niet, noch schijnt de zon.
   $\neg R \wedge \neg Z$
2. De zon schijnt, tenzij het regent.
   $R \rightarrow \neg Z$, of $Z \leftrightarrow \neg R$?
3. Of de zon schijnt, of het regent. (Dus niet allebei!)
   $(Z \vee R) \wedge \neg(Z \wedge R)$, of $(Z \wedge \neg R) \vee (\neg Z \wedge R)$?

Betekenis en waarheidstabellen

De waarheid van de atomen wordt bepaald door hun interpretatie in een model (woordenboek).

- '2=3' is niet waar in het model van de natuurlijke getallen.
- 'Jolly Jumper is een paard' is waar in het model van het stripboek Lucky Luke.
- De zin 'het regent' was niet waar in Nijmegen op 17 september 2002.

Betekenis en waarheidstabellen

De waarheid van de atomen wordt bepaald door hun interpretatie in een model (woordenboek).

- '2=3' is niet waar in het model van de natuurlijke getallen.
- 'Jolly Jumper is een paard' is waar in het model van het stripboek Lucky Luke.
- De zin 'het regent' was niet waar in Nijmegen op 17 september 2002.

Klassieke logica: alle uitspraken zijn waar (1) of niet waar (0).
De waarheid van samengestelde uitspraken kunnen we uitrekenen met waarheidstabellen. Hier die voor $\wedge$:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alle waarheidstabellen

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Alle waarheidstabellen

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Alle waarheidstabellen

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dus $x \rightarrow y = \neg x \vee y$.

Voorbeeld

De waarheidstabel van $(a \vee b) \to a$.

a	b	$a \vee b$	a	$(a \vee b) \to a$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Waarheid in een model

- Een model in de propositielogica is een waardentoekenning of valuatie van de atomen: $v : A \to \{0, 1\}$.
- Propositie f is waar in model v als $v(f) = 1$ (volgens de waarheidstabellen).
- Dus als als $v(a) = 0$ en $v(b) = 1$, dan
  - $a \vee b \to a$ is niet waar in v
  - $a \to (b \to a)$ is wel waar in v

Waarheid in een model

- Als f waar is in ieder model (in de waarheidstabel van f staan alleen maar 1-en), dan noemen we de propositie logisch waar of een tautologie.
- Notatie $\models f$.
- Als een propositie f *niet* logisch waar is, schrijven we $\not\models f$.

Waarheid in een model

- Als f waar is in ieder model (in de waarheidstabel van f staan alleen maar 1-en), dan noemen we de propositie logisch waar of een tautologie.
- Notatie $\models f$.
- Als een propositie f *niet* logisch waar is, schrijven we $\not\models f$.

Welke van onderstaande proposities zijn logisch waar?

- $a \vee \neg a$
- $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$
- $(a \rightarrow b) \rightarrow a$
- $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$

Waarheid in een model

- Als f waar is in ieder model (in de waarheidstabel van f staan alleen maar 1-en), dan noemen we de propositie logisch waar of een tautologie.
- Notatie $\models f$.
- Als een propositie f *niet* logisch waar is, schrijven we $\not\models f$.

Welke van onderstaande proposities zijn logisch waar?

- $a \vee \neg a$
- $(a \to b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$
- $(a \to b) \to a$
- $(a \to b) \vee (b \to a)$

Metalogische vragen. Welke van de volgende eigenschappen geldt?

- Als $\models f \vee g$, dan $\models f$ of $\models g$.
- Als $\models f \wedge g$, dan $\models f$ en $\models g$.

Waarheid in een model

- Als f waar is in ieder model (in de waarheidstabel van f staan alleen maar 1-en), dan noemen we de propositie logisch waar of een tautologie.
- Notatie $\models f$.
- Als een propositie f *niet* logisch waar is, schrijven we $\not\models f$.

Welke van onderstaande proposities zijn logisch waar?

- $a \vee \neg a$
- $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$
- $(a \rightarrow b) \rightarrow a$
- $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a)$

Metalogische vragen. Welke van de volgende eigenschappen geldt?

- Als $\models f \vee g$, dan $\models f$ of $\models g$. Niet
- Als $\models f \wedge g$, dan $\models f$ en $\models g$. Wel

Inhoud

Kwantificatie over een domein

Een man is gelukkig als iemand van hem houdt.

Kwantificatie over een domein

Een man is gelukkig als iemand van hem houdt.

Vertaling als predicaat-logische formule:

$$\forall m\,(M(m) \wedge \exists x\, H(x, m)) \rightarrow G(m)$$

Voor iedere m geldt: als m een man is en er een x is zodat x houdt van m, dan is m gelukkig.

Kwantificatie over een domein

Een man is gelukkig als iemand van hem houdt.

Vertaling als predicaat-logische formule:

$$\forall m\,(M(m) \wedge \exists x\, H(x,m)) \to G(m)$$

Voor iedere m geldt: als m een man is en er een x is zodat x houdt van m, dan is m gelukkig.

Een model $\mathcal{M}$ (woordenboek) bestaat nu uit

- Een domein D, bijvoorbeeld "alle mensen".
- Predicaten, bijvoorbeeld "man zijn", "gelukkig zijn"
- Relaties, bijvoorbeeld "houden van"
- Een koppeling tussen de predicaat/relatie-symbolen en de echte predicaten en relaties.

Kwantificatie over een domein

Een man is gelukkig als iemand van hem houdt.

Vertaling als predicaat-logische formule:

$$\forall m\,(M(m) \wedge \exists x\, H(x,m)) \rightarrow G(m)$$

Voor iedere m geldt: als m een man is en er een x is zodat x houdt van m, dan is m gelukkig.

Een model $\mathcal{M}$ (woordenboek) bestaat nu uit

- Een domein D, bijvoorbeeld “alle mensen”.
- Predicaten, bijvoorbeeld “man zijn”, “gelukkig zijn”
- Relaties, bijvoorbeeld “houden van”
- Een koppeling tussen de predicaat/relatie-symbolen en de echte predicaten en relaties.

D	alle mensen
$M(x)$	x is man
$G(x)$	x is gelukkig
$H(x,y)$	x houdt van y

Waarheid van een predicaatformule

Een formule f is waar in model $\mathcal{M}$, notatie $\mathcal{M} \models f$ als f “klopt als we in het model kijken” ...

Waarheid van een predicaatformule

Een formule f is waar in model $\mathcal{M}$, notatie $\mathcal{M} \models f$ als f "klopt als we in het model kijken" ...

- $\mathcal{M} \models \exists x\, f$ als er een $d \in D$ is waarvoor geldt: $\mathcal{M} \models f[d/x]$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\, f$ als voor alle $d \in D$ geldt: $\mathcal{M} \models f[d/x]$.

Waarheid van een predicaatformule

Een formule f is waar in model $\mathcal{M}$, notatie $\mathcal{M} \models f$ als f "klopt als we in het model kijken" ...

- $\mathcal{M} \models \exists x\, f$ als er een $d \in D$ is waarvoor geldt: $\mathcal{M} \models f[d/x]$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\, f$ als voor alle $d \in D$ geldt: $\mathcal{M} \models f[d/x]$.

Een formule f is waar als f waar is in alle mogelijke modellen. Bijvoorbeeld

$$\models (\exists x\, \forall y\, R(x, y)) \rightarrow (\forall y\, \exists x\, R(x, y))$$

Formules onderscheiden modellen

$$\begin{aligned} f &= \forall x \, \exists y \, K(y, x) \\ g &= \exists y \, \forall x \, K(y, x) \end{aligned}$$

Formules onderscheiden modellen

$$
\begin{aligned}
f &= \forall x\, \exists y\, K(y,x) \\
g &= \exists y\, \forall x\, K(y,x)
\end{aligned}
$$

1. Model $\mathcal{M}_1$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y is niet ouder dan x

Formules onderscheiden modellen

$$
\begin{aligned}
f &= \forall x\, \exists y\, K(y,x) \\
g &= \exists y\, \forall x\, K(y,x)
\end{aligned}
$$

1. Model $\mathcal{M}_1$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y is niet ouder dan x

2. Model $\mathcal{M}_2$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y zit naast x

Formules onderscheiden modellen

$$\begin{array}{rcl} f & = & \forall x\, \exists y\, K(y,x) \\ g & = & \exists y\, \forall x\, K(y,x) \end{array}$$

1. Model $\mathcal{M}_1$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y is niet ouder dan x

2. Model $\mathcal{M}_2$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y zit naast x

3. Model $\mathcal{M}_3$

D	Natuurlijke getallen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$K(y,x)$	$y > x$ (y groter dan x)

Formules onderscheiden modellen

$$\begin{aligned} f &= \forall x\, \exists y\, K(y,x) \\ g &= \exists y\, \forall x\, K(y,x) \end{aligned}$$

1. Model $\mathcal{M}_1$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y is niet ouder dan x

2. Model $\mathcal{M}_2$

D	alle personen in deze zaal
$K(y,x)$	y zit naast x

3. Model $\mathcal{M}_3$

D	Natuurlijke getallen, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$K(y,x)$	$y > x$ (y groter dan x)

$$\mathcal{M}_1 \models f \wedge g$$
$$\mathcal{M}_2 \models \neg f \wedge \neg g$$
$$\mathcal{M}_3 \models f \wedge \neg g$$

Van taal naar formule en van formule naar model

Model met ook constanten.

D	verzameling van landen van Europa
n	Nederland
d	Duitsland
i	Ierland
$G(x, y)$	x grenst aan y
$D(x, y, z)$	x, y en z hebben een drielandenpunt met elkaar

Van taal naar formule en van formule naar model

Model met ook constanten.

D	verzameling van landen van Europa
n	Nederland
d	Duitsland
i	Ierland
$G(x, y)$	x grenst aan y
$D(x, y, z)$	x, y en z hebben een drielandenpunt met elkaar

Formaliseer

- "Nederland en Duitsland delen een drielandenpunt"
- "Landen die een drielandenpunt hebben, grenzen aan elkaar"
- Welke formule is waar in dit model:
  - $G_3 := \forall x \exists y [G(x, y)]$
  - $G_4 := \forall x [G(i, x) \to \exists y [D(i, x, y)]]$.

Van taal naar formule en van formule naar model

Model met ook constanten.

D	verzameling van landen van Europa
n	Nederland
d	Duitsland
i	Ierland
$G(x, y)$	x grenst aan y
$D(x, y, z)$	x, y en z hebben een drielandenpunt met elkaar

Formaliseer

- "Nederland en Duitsland delen een drielandenpunt"
  $\exists x\,[D(n, d, x)]$
- "Landen die een drielandenpunt hebben, grenzen aan elkaar"

- Welke formule is waar in dit model:
  - $G_3 := \forall x \exists y [G(x, y)]$
  - $G_4 := \forall x [G(i, x) \rightarrow \exists y [D(i, x, y)]]$.

Van taal naar formule en van formule naar model

Model met ook constanten.

D	verzameling van landen van Europa
n	Nederland
d	Duitsland
i	Ierland
$G(x, y)$	x grenst aan y
$D(x, y, z)$	x, y en z hebben een drielandenpunt met elkaar

Formaliseer

- "Nederland en Duitsland delen een drielandenpunt"
  $\exists x\,[D(n, d, x)]$
- "Landen die een drielandenpunt hebben, grenzen aan elkaar"
  $\forall x, y[(\exists z\ D(x, y, z)) \rightarrow G(x, y)]$
- Welke formule is waar in dit model:
  - $G_3 := \forall x \exists y[G(x, y)]$
  - $G_4 := \forall x[G(i, x) \rightarrow \exists y[D(i, x, y)]]$.

Predicaatlogica met gelijkheid

Iedereen heeft precies één moeder.

D	domein van de mensen;
$V(x)$	x is vrouw;
$O(x, y)$	x is ouder van y;
$G(x, y)$	x is getrouwd met y.

Predicaatlogica met gelijkheid

Iedereen heeft precies één moeder.

D	domein van de mensen;
$V(x)$	x is vrouw;
$O(x, y)$	x is ouder van y;
$G(x, y)$	x is getrouwd met y.

$$\forall x \, \exists y \, [V(y) \land O(y, x)]$$
$$\land$$
$$\forall x, y, z \, [(V(y) \land O(y, x) \land V(z) \land O(z, x)) \rightarrow y = z]$$

Predicaatlogica met gelijkheid

Iedereen heeft precies één moeder.

D	domein van de mensen;
$V(x)$	x is vrouw;
$O(x,y)$	x is ouder van y;
$G(x,y)$	x is getrouwd met y.

$$\forall x\, \exists y\, [V(y) \wedge O(y,x)]$$
$$\wedge$$
$$\forall x,y,z\, [(V(y) \wedge O(y,x) \wedge V(z) \wedge O(z,x)) \rightarrow y = z]$$

Alternatief:

$$\forall x\, \exists y\, [V(y) \wedge O(y,x) \wedge \forall z((V(z) \wedge O(z,x)) \rightarrow y = z)]$$

Predicaatlogica met gelijkheid

Iedereen heeft precies één moeder.

D	domein van de mensen;
$V(x)$	x is vrouw;
$O(x, y)$	x is ouder van y;
$G(x, y)$	x is getrouwd met y.

$$\forall x \, \exists y \, [V(y) \wedge O(y, x)]$$
$$\wedge$$
$$\forall x, y, z \, [(V(y) \wedge O(y, x) \wedge V(z) \wedge O(z, x)) \rightarrow y = z]$$

Alternatief:

$$\forall x \, \exists y \, [V(y) \wedge O(y, x) \wedge \forall z((V(z) \wedge O(z, x)) \rightarrow y = z)]$$

- Iedereen heeft precies twee oma's.
- Een man heeft hooguit één echtgenote.

Inhoud

Noodzakelijk

Het regent

Deze zin kan waar zijn of niet waar zijn, maar hij is niet noodzakelijk waar.

Noodzakelijk

Het regent

Deze zin kan waar zijn of niet waar zijn, maar hij is niet noodzakelijk waar.

Als het regent dan valt er water uit de lucht.

Deze zin is duidelijk wel noodzakelijk waar: het hoort bij de betekenis van het woord 'regenen' dat er water uit de lucht valt. Woordenboek:

R	het regent
W	er valt water uit de lucht

Modale logica heeft een operator $\Box$ voor 'noodzakelijk'.

Noodzakelijk

Het regent

Deze zin kan waar zijn of niet waar zijn, maar hij is niet noodzakelijk waar.

Als het regent dan valt er water uit de lucht.

Deze zin is duidelijk wel noodzakelijk waar: het hoort bij de betekenis van het woord ‘regenen’ dat er water uit de lucht valt. Woordenboek:

R	het regent
W	er valt water uit de lucht

Modale logica heeft een operator $\Box$ voor 'noodzakelijk'.

Het is noodzakelijk dat als het regent dat er water uit de lucht valt

wordt geschreven als:

$$\Box(R \to W)$$

Niet noodzakelijk

Het omgekeerde geldt niet: het is niet per se zo dat, als er water uit de lucht valt dat het dan regent.

Niet noodzakelijk

Het omgekeerde geldt niet: het is niet per se zo dat, als er water uit de lucht valt dat het dan regent. Dus

Het is niet noodzakelijk dat als er water uit de lucht valt dat het dan regent.

wat als formule van de modale logica geschreven wordt als:

$$\neg\Box(W \rightarrow R)$$

Niet noodzakelijk

Het omgekeerde geldt niet: het is niet per se zo dat, als er water uit de lucht valt dat het dan regent. Dus

Het is niet noodzakelijk dat als er water uit de lucht valt dat het dan regent.

wat als formule van de modale logica geschreven wordt als:

$$\neg\Box(W \to R)$$

Evenwel kan de formule

$$W \to R$$

in specifieke situaties best waar zijn.
Als het regent is de rechterkant van de implicatie waar, en de waarheidstabel van de implicatie leert ons dat in dat geval de hele formule waar is.

Mogelijk

Behalve voor noodzakelijkheid heeft modale logica ook een notatie voor mogelijkheid: $\Diamond$.

Mogelijk

Behalve voor noodzakelijkheid heeft modale logica ook een notatie voor mogelijkheid: $\Diamond$.
De ware zin:

Het is mogelijk dat het regent.

wordt in de modale logica weergegeven door

$$\Diamond R$$

Mogelijk

Behalve voor noodzakelijkheid heeft modale logica ook een notatie voor mogelijkheid: $\Diamond$.
De ware zin:

Het is mogelijk dat het regent.

wordt in de modale logica weergegeven door

$$\Diamond R$$

Deze zin betekent hetzelfde als:

Het is niet noodzakelijk dat het niet regent.

Deze zin wordt weergegeven door de formule:

$$\neg\Box\neg R$$

Dus $\Diamond = \neg\Box\neg$.

Noodzakelijk en Mogelijk

G	ik heb geld
K	ik koop iets

Formaliseer de volgende zinnen als formules in de modale logica.

- Als ik geld heb dan is het mogelijk dat ik iets koop.
- Als ik geen geld heb dan is het noodzakelijk dat ik niets koop.
- Het is mogelijk dat ik geen geld heb en toch iets koop.

Noodzakelijk en Mogelijk

G	ik heb geld
K	ik koop iets

Formaliseer de volgende zinnen als formules in de modale logica.

- Als ik geld heb dan is het mogelijk dat ik iets koop.
  $G \to \Diamond K$
- Als ik geen geld heb dan is het noodzakelijk dat ik niets koop.
- Het is mogelijk dat ik geen geld heb en toch iets koop.

Noodzakelijk en Mogelijk

G	ik heb geld
K	ik koop iets

Formaliseer de volgende zinnen als formules in de modale logica.

- Als ik geld heb dan is het mogelijk dat ik iets koop.
  $G \to \Diamond K$
- Als ik geen geld heb dan is het noodzakelijk dat ik niets koop.
  $\neg G \to \Box \neg K$
- Het is mogelijk dat ik geen geld heb en toch iets koop.

Noodzakelijk en Mogelijk

G	ik heb geld
K	ik koop iets

Formaliseer de volgende zinnen als formules in de modale logica.

- Als ik geld heb dan is het mogelijk dat ik iets koop.
  $G \rightarrow \Diamond K$
- Als ik geen geld heb dan is het noodzakelijk dat ik niets koop.
  $\neg G \rightarrow \Box \neg K$
- Het is mogelijk dat ik geen geld heb en toch iets koop.
  $\Diamond(\neg G \wedge K)$

Modaliteiten

Er zijn veel verschillende interpretaties mogelijk voor $\Box$ (noodzakelijk) en $\Diamond$ (mogelijk)

Modaliteiten

Er zijn veel verschillende interpretaties mogelijk voor $\Box$ (noodzakelijk) en $\Diamond$ (mogelijk)

logica	$\Box f$	$\Diamond f$
modale	f is noodzakelijk	f is mogelijk
epistemische	ik weet dat f	f is niet strijdig met mijn kennis
doxastische	ik geloof dat f	f is niet strijdig met wat ik geloof

Modaliteiten

Er zijn veel verschillende interpretaties mogelijk voor $\Box$ (noodzakelijk) en $\Diamond$ (mogelijk)

logica	$\Box f$	$\Diamond f$
modale	f is noodzakelijk	f is mogelijk
epistemische	ik weet dat f	f is niet strijdig met mijn kennis
doxastische	ik geloof dat f	f is niet strijdig met wat ik geloof
temporele	altijd f	soms f
deontische	je moet f	je mag f
programma	na executie geldt f	na executie kan f gelden

Axioma's voor modale logica

Wat zijn de regels voor de modale logica?
Er is een keuze uit axiomaschema's. De belangrijkste zijn:

naam	axiomaschema	eigenschap
K	$\Box(f \to g) \to (\Box f \to \Box g)$	distributief
T	$\Box f \to f$	reflexief
B	$f \to \Box\Diamond f$	symmetrisch
4	$\Box f \to \Box\Box f$	transitief
5	$\Diamond f \to \Box\Diamond f$	Euclidisch
D	$\Box f \to \Diamond f$	serieel

Axioma's voor modale logica

Wat zijn de regels voor de modale logica?
Er is een keuze uit axiomaschema's. De belangrijkste zijn:

naam	axiomaschema	eigenschap
K	$\Box(f \to g) \to (\Box f \to \Box g)$	distributief
T	$\Box f \to f$	reflexief
B	$f \to \Box\Diamond f$	symmetrisch
4	$\Box f \to \Box\Box f$	transitief
5	$\Diamond f \to \Box\Diamond f$	Euclidisch
D	$\Box f \to \Diamond f$	serieel

- K geldt altijd; de andere hangen van de interpretatie van $\Box$ af.

Modellen voor modale logica

Modellen voor modale logica zijn Kripke modellen met mogelijke werelden.

Modellen voor modale logica

Modellen voor modale logica zijn Kripke modellen met mogelijke werelden.
We bekijken een specifieke temporele logica LTL, *Linear time Temporal Logic*.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

Modellen voor modale logica

Modellen voor modale logica zijn Kripke modellen met mogelijke werelden.
We bekijken een specifieke temporele logica LTL, *Linear time Temporal Logic*.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

- De mogelijke werelden zijn i, voor alle $i \in \mathbb{N}$.
- Bij iedere mogelijke wereld hoort een verzameling atomen W_i.
- Als $a \in W_i$ dan is a waar in wereld i: notatie $i \Vdash a$.

Modellen voor modale logica

Modellen voor modale logica zijn Kripke modellen met mogelijke werelden.
We bekijken een specifieke temporele logica LTL, *Linear time Temporal Logic*.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

- De mogelijke werelden zijn i, voor alle $i \in \mathbb{N}$.
- Bij iedere mogelijke wereld hoort een verzameling atomen W_i.
- Als $a \in W_i$ dan is a waar in wereld i: notatie $i \Vdash a$.
- We definiëren $i \Vdash f$ voor algemene formules als volgt:
  - $i \Vdash f \wedge g$ als: $i \Vdash f$ en $i \Vdash g$
  - Net zo voor $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$.

Modellen voor modale logica

Modellen voor modale logica zijn Kripke modellen met mogelijke werelden.
We bekijken een specifieke temporele logica LTL, *Linear time Temporal Logic*.

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

- De mogelijke werelden zijn i, voor alle $i \in \mathbb{N}$.
- Bij iedere mogelijke wereld hoort een verzameling atomen W_i.
- Als $a \in W_i$ dan is a waar in wereld i: notatie $i \Vdash a$.
- We definiëren $i \Vdash f$ voor algemene formules als volgt:
  - $i \Vdash f \wedge g$ als: $i \Vdash f$ en $i \Vdash g$
  - Net zo voor $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$.
  - $i \Vdash \Box f$ als: voor alle $j \geq i$ geldt $j \Vdash f$
  - $i \Vdash \Diamond f$ als: er is een $j \geq i$ met $j \Vdash f$

Voorbeeld van een LTL model

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

We bekijken het LTL model $\mathcal{M}$ met W_i als volgt:

$$a \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een tweevoud}$$

$$b \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een drievoud}$$

Voorbeeld van een LTL model

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \dots$$

We bekijken het LTL model $\mathcal{M}$ met W_i als volgt:

$$a \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een tweevoud}$$

$$b \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een drievoud}$$

Ga na of de volgende eigenschappen gelden:

- $1 \Vdash \Diamond(a \wedge b)$
- $1 \Vdash \Box(a \wedge b)$
- $\mathcal{M} \Vdash \Box\Diamond(a \wedge b)$

Voorbeeld van een LTL model

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots$$

We bekijken het LTL model $\mathcal{M}$ met W_i als volgt:

$$a \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een tweevoud}$$

$$b \in W_i \quad \text{als} \quad i \text{ is een drievoud}$$

Ga na of de volgende eigenschappen gelden:

- $1 \Vdash \Diamond(a \wedge b)$
- $1 \Vdash \Box(a \wedge b)$
- $\mathcal{M} \Vdash \Box\Diamond(a \wedge b)$

$$\Vdash \Box\Diamond(a \wedge b)$$

heet een liveness eigenschap:

"altijd geldt ooit weer een keer $a \wedge b$"

Dit is een eigenschap die je vaak wilt verifiëren voor computerprocessen

Vragen?

Cursus Formeel Denken

`http://www.cs.ru.nl/ freek/courses/fd-2014/`

Google: Formeel Denken 2015