Contents

Inleiding tot de aantekenschriften

INLEIDING

Inleiding bij de getranscribeerde en geannoteerde negen aantekenschriften van L.E.J. Brouwer, door hem ter voorbereiding op zijn dissertatie geschreven gedurende de jaren 1905 tot 1907.

Het doel van deze transcriptie is een zo nauwkeurig mogelijke weergave van Brouwers gedachtengang en van zijn invallen gedurende de tijd van voorbereiding.

Het karakter van de aantekeningen is soms gecompliceerd en ogenschijnlijk verward met vaak korte paragrafen (in de transcriptie steeds gescheiden door een ruime spatie met een horizontale lijn halverwege), waarin tal van doorhalingen, verbeteringen en toevoegingen tussen de regels, in de kantlijn of soms elders op de pagina (bovenaan of onderaan) of in enkele gevallen zelfs, bij plaatsgebrek, in de kantlijn van een volgende of vorige pagina.

Ook worden onderwerpen veelal schijnbaar terloops aangeroerd, soms in één geïsoleerde paragraaf van slechts enkele regels. Kennelijk viel hem op dat moment iets te binnen wat het opschrijven waard was. In andere gevallen neemt de behandeling van een onderwerp één of meerdere gehele pagina's in beslag.

Deze schijnbaar chaotische behandeling en de vele doorhalingen en toevoegingen vereiste vaak enig wikken en wegen hoe dit alles weer te geven, gezien het doel om enerzijds een zo getrouw mogelijke weergave van het geschrevene te geven en, anderzijds, een goed leesbaar resultaat aan te bieden.

Brouwer maakte zelf een synopsis van de negen schriften,[1] kort voordat hij de tekst van zijn dissertatie begon te schrijven.[2] Hierin groepeerde hij naar on-

[1] welke synopsis overigens eerder bekend was dan de schriften zelf; in feite werd het bestaan van de schriften min of meer onthuld en voorspeld door de synopsis.

[2] Zie de brief van Brouwer aan zijn promoptor Korteweg van 7 september 1906. Zie hiervoor b.v. Van Dalen, *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde* (2001) pag. 10. Zie ook Kuiper, *Ideas and Explorations, Brouwer's Road to Intuitionism* (dissertation, 2004) pag. xiv e.v.

derwerp in acht hoofdstukken de inhoud van de negen aantekenschriften. Deze synopsis is als laatste en tiende hoofdstuk in deze transcriptie opgenomen.

Teneinde de leesbaarheid te optimaliseren, wordt de volgende conventie gebezigd:

– De gekozen paginanummering voor de schriften in deze transcriptie is die, welke Brouwer gebruikte in zijn synopsis ter verwijzing naar de vindplaatsen in de schriften. Dus VI-27 verwijst naar pagina 27 van het zesde schrift.

– Onderstrepingen in de schriften worden weergegeven in cursief.
Een dubbele onderstreping wordt vetgedrukt weergegeven.

– Brouwer heeft zijn hele leven een oude spelling van het Nederlands aangehouden, die evenwel in 1906 nog geldig was. Deze spelling is gehandhaafd in de transcriptie. Ook door hem veelvuldig gebezigde afkortingen zijn ongewijzigd weergegeven. Waar nodig is één en ander in voetnoten toegelicht.

– Brouwer schreef snel en veranderde zinnen vaak. Door veranderingen en toevoegingen ontstonden een enkele maal kleine grammaticale fouten (bv. toevoegingen die i.p.v. een enkelvoudsvorm van een werkwoord of voornaamwoord een meervoudsvorm vereisen), die klaarblijkelijk niet opgemerkt en hersteld werden door hem. Deze zijn zonder verdere toevoeging gecorrigeerd.

– Een enkele maal was Brouwer niet consistent in de spelling van namen (b.v. Lobatchewski en Lobatchevski). In de transcriptie wordt weergegeven zoals Brouwer de namen spelde op die plaats; echter in de index wordt een uniforme spelling aangehouden.

– Vaak staat er een punt aan een oorspronkelijk einde van een zin, waarna de zin verlengd is met een toevoeging tussen haakjes met, opnieuw, een punt aan het eind. Dit is zonder commentaar verbeterd weergegeven, zoals ook een enkele andere slordigheid in leestekengebruik, ongetwijfeld ontstaan door de snelheid van werken.

– Veranderingen en latere toevoegingen, tussen de regels of in de kantlijn weergegeven, worden als zodanig aangeduid door ze te plaatsen tussen haken als volgt:
⟨de veranderde of toegevoegde tekst ⟩ .

– Doorgehaalde tekst wordt als volgt weergegeven:
⟦doorgehaalde tekst⟧ .

– Een korte doorgehaalde en verbeterde tekst van één of enkele woorden lang wordt in de tekst weergegeven in zijn verbeterde vorm, en is deze verbetering geplaatst tussen de haken ⟨ en ⟩. In een voetnoot onderaan de pagina, in de tekst van de transcriptie aangegeven door het betreffende voetnootnummer tussen haken, b.v. ⟨17⟩, wordt dan de oorspronkelijke tekst (vóór de doorhaling en verbetering dus) geheel of gedeeltelijk weergegeven, met het doorgehaalde gedeelte tussen de daarvoor aangegeven haken ⟦ en ⟧ .

De haken ⟨ en ⟩ om een voetnootnummer in de tekst worden overigens ook benut om in de bijbehorende voetnoot kleine toelichtingen en verduidelijkingen uit de tekst te geven, zoals het uitschrijven van een niet vanzelfsprekende afkorting.

Staat een verbetering in de plaats van een onleesbaar gemaakte doorhaling, dan wordt dit eveneens in een voetnoot onderaan de pagina weergegeven als *(onleesbare doorhaling)* of *(onleesb doorh.)* of *(in plaats van een onleesbare doorhaling)*

– Een hele doorgehaalde paragraaf of pagina, die niet verbeterd is maar slechts verwijderd, wordt weergegeven in de hoofdtekst tussen de daarvoor aangegeven haken, voorafgegaan door de toevoeging *(doorgehaald)*.

Is in een doorgehaalde paragraaf een woord of een zin onleesbaar, dan wordt dit ter plekke aangegeven als *(onleesbaar woord)* of *(onleesbaar gedeelte)*.

– Een tweede soort voetnoten, aangegeven door een voetnootnummer zonder haken, zijn toelichtende noten met commentaar of verwijzingen. Deze worden aan het eind van elk hoofdstuk weergegeven.

– Een derde soort 'voetnoten' zijn die, welke Brouwer zelf in de schriften heeft aangegeven. Meestal staan ze in de kantijn naast de tekst, soms echter bovenaan of onderaan een bladzijde. Deze worden in de transcriptie aangegeven met *) in de tekst en de voetnoot staat dan meestal (en uiterlijk) direct aan het einde van de betreffende paragraaf, maar een enkele maal eerder als een paragraaf meer dan één bladzijde beslaat.

– Er staan in de schriften vaak ook toelichtende noten van een meer algemeen karakter in de kantlijn, niet verwijzend naar één specifieke plaats in de tekst. Deze worden eveneens meestal aan het eind van de betreffende paragraaf weergegeven, door een kleine spatie gescheiden van de hoofdtekst en voorafgegaan door de mededeling *(kantlijn:)* en wederom omsloten door de haken ⟨ en ⟩.

– Ten slotte, Brouwer bezigde zelf vaak de tekens [en] aan het begin en aan het einde van een paragraaf. Deze tekens zijn onveranderd opgenomen.

Chapter 1

Brouwer's Eerste Schrift

⟦Het vectorveld als deel der projectieve meetkunde.⟨1⟩

1 week Russell
1 week niet-Eucl. (Klein, Lie)
1 week Dedekind en Cantor
1 week Poincaré en Revue de Metaph.⟨2⟩
——
Zondags aanteekeningen uitwerken

Lie: Sachs. Ber. 1890⟨3⟩
Schering: Gött. Nachr.⟨4⟩ 1870 – '73
Neumann: Letzte Preisschrift
Fürst Jablonowski

Over Mengenlehre:
Math. Ann. 61, 1.⟨5⟩
(Sept. 1905)
Hier Literatuur

. . . .

⟨1⟩ *Deze eerste ongenummerde pagina (I–0) staat op de binnenzijde van de kaft van het eerste schrift, en is gehaal doorgehaald*

⟨2⟩ Revue de Métaphysique et de Morale

⟨3⟩ *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematisch Physische Klasse.*

⟨4⟩ Göttinger Nachrichten

⟨5⟩ Mathematische Annalen

Tannery: 'Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable'.⟧

. . . .

I-1 *(kantlijn:)* ⟨*Punten voor Diss.*

1. Grondsl. Russell; ⟨Couturat: algèbre de la logique; D. Hilbert in Heidelb. congres; D. Hilbert: Gr. der Geom. Teubner.⟩
2. Niet-eucl. Klein, Lie.
3. Getallen. Cantor, Dedekind
4. Metaph. Kant, Poincaré, Couturat.
5. Projectieve opvatting van het vector- en pot. veld. (snuffelen Bacharach)
6. Aanteeken. uitwerken.
7. Hankel; complexe Zahlen
8. Hertz; Prinzipien cf. Poin. pg 127⟩[1] *(einde kantlijntoevoeging.)*

⟨Wie⟩ wiskunde werkt met een conscientie ⟨al wordt die ook vaak slechts door vrees of onverdiend respect voor anderen ⟨en door anderen gesuggereerde theorieën⟩ gehandhaafd⟩ ⟨vindt⟩ weinig dingen, al ⟨maken⟩ die weinig ook ⟨misschien⟩ een genialen indruk.[2] ⟨Veel meer kan hij produceeren, als⟩ in plaats van conscientie is getreden de stemming van den zakenman, die maar 'in den handel brengt'.[⟨6⟩]
⟨Men hield zich met het oneindige, d.i. het buiten eigen sfeer liggende niet op, integendeel men vooronderstelde altijd, dat het als vuilnisbak over zou blijven zoals elk mensch de wereld als vuilnisbak behandelt.⟩

. . . .

Voor de moderne wiskunde is de *arbeid* verboden zoo goed als alle uitspattingen ⟨cf. ook op hist. en geogr. gebied,⟩ en het *publiceeren* zoo goed als het in den handel brengen van vleeschextract.

. . . .

Het is bij de wisk. carrière ook: publiceer maar op een nog niet geheel afgeneusd gebied, echter niet op een, dat voor *allen* toegankelijk is.

. . . .

Planimetrie voert in een stel van definities,[3] die op grond der axioma's gedwongen worden, het grootste deel van het ⟨door die definities en allerlei verder willekeurig ingevoerde relaties⟩ gevormde uit te laten vallen, *)[⟨7⟩] en slechts eenige te behouden: die we de *betrekkingen* tusschen de gedefinieerde grootheden noemen.[4]

[⟨6⟩] *Veel correcties in deze eerste alinea staan in de plaats van onleesbaar gemaakte doorhalingen.*

[⟨7⟩] Planimetrie voert in een stel van definities die op grond der axioma's gedwongen worden, het grootste deel van het ⟦er door⟧ gevormde uit te laten vallen, Hetgeen intusschen alleen ondergeschikt belang heeft, als methode bij het volgende:

Direct uit aanschouwing met wilstendens nog staan de axioma's; maar het zijn (mathematische n.l.) eenzijdige extracten.[5] ||

Hierin zich nu gevangen houdend,⟨8⟩ en in alle fijnere verschijnselen ook niets **I-2**
meer dan een mathem. extract willende zien (wat dáár, juist omdat ze mathematisch beschouwd ingewikkelder zijn, niet als ⟨directe⟩ copie van het echte meer kan worden gevoeld.

En nu is de bepaling, de wiskundige betrekking niets dan het door de heksenketel geleverde *middel* ; (dikwijls, bij samengestelde betrekkingen weer gesplitst in een heeleboel ondermiddelen), dat hoort bij het stille *doel* (een onderdeel van het *leven*),⟨9⟩ dat onder alle wetenschap zit.[6]

*) *(kantlijn:)* ⟨zoo vervalt b.v. driehoek met basis 4, hoogte 5, oppervl. 6⟩

. . . .

De onderdrijfveer der wiskunde zij hang naar het goede, niet passie of verstand.

. . . .

Het zoeken naar de 'gronden' sluit noodzakelijk in, dat het terrein der 'verstandhouding' wordt verlaten, zoodat de kwestie voor een promotiedebat moeilijk wordt.[7]

. . . .

Het wiskundig zien van een verschijnsel in mathem. physica – ook al is het één directe visie – is het doortrekken van de nederige visie hoovaardig met de menschelijke intellectueele belasting.[8]

. . . .

doorgehaald: ⟦Alle gelijkheden der rekenkunde zijn een projectie der werke- **I-3**
lijkheden, waarmee getalbewerkingen samenloopen, – op het tientallig stelsel.⟧

$7 \times 4 = 28$ is een projectie op het *middelstelsel*: het talstelsel ('tellen' van gelijkheden; je ziet eerst 4 gelijke 7 tallen, dan 2 gelijke 10 tallen en nog 8).[9]

. . . .

Gelijkheden in wiskunde zijn ⟨geopende⟩ trappen ⟨(baanvakken)⟩ van de doel-middel vloed, waardoor alles, wat in het stelsel wordt gebracht, direct wordt

---

⟨8⟩ ⟦Hieruit⟧ Hierin zich nu gevangen houdend,

⟨9⟩ dat hoort bij het stille *doel* (⟦het le..⟧ een onderdeel van het *leven*), meegenomen. (Gewoonlijk is bij dien vloed keus, dat is kansverschil tusschen verschillende banen.)[10]

. . . .

Dit alles is een bekijking van het wetenschapsbedrijf uit het moreele, dat is het eenige niet hoovaardig-menschelijke.

. . . .

Het wetenschappelijk doel-middelstelsel tracht zooveel mogelijk dimensies (vroeger storingen) in zich op te nemen; toch blijft altijd nog een oneindig aantal storingen over.

. . . .

Sterk is altijd eenzijdig: er zijn altijd invloeden mogelijk, waartegen de te bieden weerstand niet alleen machteloos, maar zelfs uiterst zwak is. (hard ijs, maar de zon?)

. . . .

I-4 De Faraday theorie is niets dan direct *beschrijving*, is daarom in zijn soort zuiver.[11]

Maar niet de *hypothesen*, als van Newton en Van der Waals.

. . . .

Bij de eerste blijft men wat het in 't oog gevatte eenzijdige verschijnsel betreft, ten minste zuiver (al zal men dat verschijnsel later in meer dimensies moeten uitbreiden.)[12]

Bij de laatste echter, is men in het verschijnsel zelf al niet zuiver meer, en moet men direct hopeloos gaan bijknoeien, zoo bij de wet van Van der Waals: de attractie van den wand, want dan zal meestal uit straf het verschijnsel, dat de hypothese wil vervangen, op zichzelf niet meer denkbaar zijn (d.w.z. zonder storende invloeden). ⟨Of anders voor de werkelijkheid tot allerlei moeilijke bijberekeningen vervallen (electriciteitsattractie bij oude theorien bij eindige lichamen); in de bijinvloeden is dan de hypothese alles behalve gemakkelijk.⟩

. . . .

Die hypothesen komen er gewoonlijk op neer, dat alles wordt teruggebracht op punt, rechte lijn *) en getal, en die gemakkelijke reductie wordt verderop toch weer gestoord.

Maar daarom kan natuurlijk bij nog zoo directe aanschouwing de reductie op lijn, punt en getal ook wel moeilijk zijn.

En daarom kan een zuivere aanschouwing wel weinig 'vruchtbaar', d.i. voor
I-5 helsche aan- ‖ passing aan 't afgegrensde leven vatbaar zijn.

*) *(kantlijn):* ⟨d.w.z. ééndim.; de 3-dim. blijft voorloopig een randverschijnsel⟩

. . . .

Voor zoover de wetenschappelijke arbeid niet is geworden een in concurrentie op de markt brengen, is ze toch een in 't oog vatten als doel op zichzelf van een partieel gezien stuk der wereld als een intellectueel systeem en dan als *middel*, dat gaan 'onderzoeken' (d.w.z. projecteren op een stelsel van getal, punt en lijn) of 'verklaren'; in elk geval een helsch lichtzinnig streven, zooals het toppunt er van wordt bereikt in de 'waren wereld' en het stelsel van de handelsconcurrentie.[13]

. . . .

Het spreekt volgens onze doem vanzelf, dat onze ruimte drie afmetingen heeft. ⟨Dat getal 3 zit daar in ons als onze veruiterlijking.⟩

. . . .

Het doel-middel stel der wiskunde kan wel sterke vereenzijdiging, maar nooit falikant–uitkomen te voorschijn roepen, omdat de oorspronkelijke eerste doel-middel stelling (b.v. omzetting van de aanschouwing van het ding in aanschouwing van zijn getalkant) steeds voorop blijft staan.

. . . .

De meeste onderzoekingen der wiskunde[⟨10⟩] (ook de Lob. en Riem.[⟨11⟩] geometrie) is op de markt brengen van 'wel aardige' waar. En evenmin hieruit kan zegen komen, als uit de vrije concurrentie en reclame in de liberale waren wereld. **I-6**

. . . .

[De groote ontdekkingen in de wiskunde zijn gedaan naief, zonder geleerdheid, maar daarna maakt het vee er zich van meester, en haalt ze binnen het gebied der analyse, waar buiten het centrum rustig weer kan worden gegrasduind.][14]

. . . .

Het is der menschen begeerte naar vastheid, die in de heterogeniteit der ruimte legt de meetkundige homogeniteit, en er de meetkundige ruimte in plaatst.[15]

. . . .

Al deze dingen kan ik niet bewijzen, maar ik vraag u: retireer u, en ge zult het zien.

⟨10⟩ ⟦Dit komt⟧ De meeste onderzoekingen der wiskunde

⟨11⟩ Lobatchevski en Riemann.

. . . .

De meetkundige ruimte is de eenheid van de verscheidenheid der wereld en de menschelijke wil tot maat, gestempeld door de ⟨drieeenheid der⟩ 3 afmetingen.

. . . .

[(Goethe) 'Solche Leute gehen im Irrtum fort, weil sie ihm ihre Existenz verdanken'.][16]

. . . .

I-7 De mathematische logica ontnam aan de wiskunde alle illusie van 'waarheid die het leven raakt',[17] en men merkt, met niets anders dan met een *hersen*schim te hebben gewerkt; een hersenschimmig extract,⟨12⟩ dat op de werkelijkheid is 'toegepast', maar haar niet raakt, ⟨de Euclidische theorie is werkelijk niets als een oppervlakkig mechanisme zonder meer, en daarom wel verder te ontleden, hoewel je dan het *leven* verlaat.⟩

Dat zulk een desillusie moest komen bij het zoeken der 'grondslagen', spreekt van zelf; totnogtoe was men gewoon zijn gang gegaan in de passie, in het subjectieve; zoo gauw men echter zich wil inkeeren tot de 'objectieve' waarheid van het geknutselde, blijkt het aan objectieve waarheid *hol* te zijn.

. . . .

En alle denken, dat niet levend wordt gevoed door de lichamelijke daad, kan niet anders, dan ten slotte hopeloos verschrikt, zich zelf opheffen, 'er mee uitscheiden'.[18]

. . . .

[Het willen zien van maat, en hoekmaat enz. is het primaire in de menschen, volgend op den drang om alles te willen vergelijken.⟨13⟩ Het maatidee hoort thuis bij de ⟨analyse.⟩⟨14⟩

I-8 [De projectieve meetkunde heeft er zich buiten kunnen houden; ⟨ze is overigens veel meer een goochelmachine dan de gewone meetkunde. ⟩

En om nu dat maatidee ook een plaats te geven in de projectieve meetkunde, is wel een aardig kunstje, maar onzuiver; even goed als het onzuiver is, om het geestelijke karakter een plaats te geven in het stoffelijk verrichtingssysteem, zoals de medische wetenschap doet.]

. . . .

⟨12⟩ en men merkt, met niets anders dan met een *hersen*schim te hebben gewerkt; ⟦natuurlijk⟧ een hersenschimmig extract

⟨13⟩ Het willen zien van maat, en hoekmaat enz. is het primaire in de menschen, ⟦de eerste op zichzelf, de tweede⟧ volgend op den drang om alles te willen vergelijken.

⟨14⟩ Het maatidee hoort thuis bij de ⟦rekenkunde en getallenleer.⟧

Wat men ook doe, er *blijft* van de wiskunde niets over, dan een spel van vernuft, en reken'snelheid door gemeenheid', (door de stille kunstjes, die men kent.)

. . . .

[Bij debatten mag niets worden aangeroerd, wat voor den gezonden leek onbegrijpelijk zou zijn.][19]

. . . .

[Ten slotte gaan ze tóch uit van de ééndimensionale 'Massbestimmung' als gegeven, onafhankelijk of ze elliptisch, hyperbolisch of parabolisch is.]

De juiste blik op de basis der wiskunde krijg je door te kijken, niet in jezelf, **I-9**
maar naar die gekke wiskundigen.

. . . .

(Klein over functies zonder diff. quotient).[20] Wie ist nun dieser Zwiespalt zwischen der Differentialrechnung und der Anschauung anders zu erklären als durch unsere Annahme von der Ungenauigkeit der Anschauung? *) Maar die 'werkelijkheid', die met de aanschouwing in strijd zou zijn, is niets als een zelfgemaakte hersenschim.

*) *(kantlijn:)* ⟨Je zou kunnen zeggen: 'Wij kunnen olifanten (d.i. snuitdieren) met acht pooten denken; wat bedriegt ons dus de aanschouwing!'⟩

. . . .

[Het irrationaal getal is een A.B. stoornis op de *wil* tot invoering van de *maat*-vastheid.][21]

. . . .

Een interessante, maar philosophisch onbelangrijke vraag is: Is het mogelijk de geometrie ⟨ook de projectieve⟩ op te bouwen uit enkel logische principes en het eendimensionale continuum? (En misschien zelfs, om ook dat eendimensionale continuum uit logische principes op te bouwen?)[22]

De vraag is natuurlijk bevestigend te beantwoorden: denk maar aan de analytische meetkunde ⟨met homogene coördinaten.⟩

Hier wordt [zie Veronese] uit het eendimen- ‖ sionaal continuum het meerdi- **I-10**
mensionale met zijn 'rechte lijnen' opgebouwd als lineaire betrekkingen.⟨15⟩[23]

Maar dán moet het ook mogelijk zijn, de meetkunde op te bouwen zonder axioma's; de oude axioma's zijn dan slechts oppervlakkige feiten met een dieperen

---

⟨15⟩ Hier wordt [zie Veronese] uit het eendimensionaal continuum ⟦met maatbegrip⟧ het meerdimensionale met zijn 'rechte lijnen' opgebouwd als lineaire betrekkingen ⟦$ax + by = c$.⟧

grond.⟨16⟩ [24]

Hoe het zij, duidelijk is, dat men alles kan opbouwen uit eendim. continuum met òf ⟨eendimensionaal⟩ maatbegrip *) òf ⟨projectieve⟩ axioma's.

Beide kan men noemen 'werkhypothesen' ter verklaring van eenzelfde natuurverschijnsel; beide moeten op gelijke elementen weer zijn terug te voeren.

In het tweede geval gebruiken we alleen het *getal*, en voeren ook alleen *dat* in de meetkunde in; de maat, dus de irrationale getallen blijven weg. Want het is alleen die maat d.i. vergelijking van getallen op verschillende lijnen ⟨en ook in zekeren zin op dezelfde lijn,⟩ die dan onderl. onmeetbaar blijken, die de irrationale getallen heeft doen invoeren (in de werkelijkheid, b.v. de kristallografie, vergelijkt men ook alleen afstanden op eenzelfde lijn, en ook de projectieve meetkunde doet dat alleen.)

*) *(kantlijn:)* ⟨d.w.z. lengtevergelijking waarbij niet op richting wordt gelet n.l. bij de vergelijking van segmenten op verschillende lijnen, zoals de anal. meetkunde doet op elementairen weg⟩

. . . .

(Irrationale getallen, wortels en orthogonaliteit komen samen).

. . . .

I-11 [De menschen zien met hoogere oogen, en dan zien, hoe zij zien met wiskundige, 3-dimensionale oogen.]

. . . .

De drie afmetingen *zijn* er, als een eenzijdige kant van de ruimte, maar alleen omdat gij ze er door uw zonde in hebt gebracht (uw eenheid van tegendeelen), en nu let ge alleen op die zondige kant er van.

. . . .

Als bijzonder geval van al de logische opbouwsels komen de gewone rekenkunde en de gewone meetkunde.[25]

. . . .

(doorgehaald): ⟦Bij hyperbol. geometrie is de basis kegelsnede een hyperbool, d.w.z. van het standpunt der Euclidische meetkunde.⟧

. . . .

[Is eenmaal de projectieve ruimte opgebouwd, dan is er maar één, niet keus tusschen verschillende soorten. Maar men kan er de saus van de *maat* over

---

⟨16⟩ Maar dán moet het ook mogelijk zijn, de meetkunde op te bouwen zonder axioma's; ⟦want dat⟧ de oude axioma's zijn dan slechts oppervlakkige feiten met een dieperen grond.

verdeelen naar Eucl., Lobatch.⟨17⟩ of Riemann].[26]

Het projectieve systeem is bepaald door 3 ⟨verschillende⟩ dingen, men kan ze punten noemen of niet, maar in elk geval kan men ze continu in elkander laten overgaan, en wel bij elk paar op één *bepaalde* manier.

(doorgehaald:) ⟦Of voor onze ruimte de Euclidische meetkunde geldt? Dat **I-12**
doet er weinig toe; zien wij de ruimte als grafische voorstelling van reëele ⟨ruimtelooze⟩ problemen (projectief n.l.) dan zien we direct, dat er gevallen van evenwijdigheid zijn; want dan hebben we telkens te doen met onderl. strijdige eerstemachtsvergelijkingen.⟧

. . . .

(doorgehaald:) ⟦*Vraag*: Geldt de projectieve meetkunde niet net zoo goed voor den cylinder? En misschien voor elk willekeurig oppervlak, als het maar in elk van zijn deelen gelijk te zien is?⟧

. . . .

[Het axioma der projectieve geometrie [er zijn platte vlakken, d.w.z. vlakken zóó, dat een rechte lijn, die er twee punten mee gemeen heeft, er geheel in valt, en door 3 punten gaat er een], gaat door voor elke schaar van oppervlakken $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0$.

Neem nu maar elke verhouding $f_1 : f_2 : f_3 : f_4$ als een punt, dan gaat door elke 3 punten een vlak, en door elke 2 punten één ⟨serie, voldoende aan twee lineaire⟩ betrekkingen tusschen de f's, dus één rechte lijn, waardoor dan een bundel van de oppervlakken loopt.

En elke r. lijn, die twee punten met een oppervlak ∥ gemeen geheel in. Op **I-13**
zulk een stel oppervlakken geldt dan nu ook de geheele projectieve meetkunde.

Het axioma zien we zoo direct in, dat gelijk loopt met het stellen der homogene projectieve betrekking (want met het stellen van een lineair stelsel van oppervlakken), dus met het stellen der *maat*-vergelijkbaarheid op verschillende lijnen.]

(kantlijn:) ⟨neen, de betrekking volgt er alleen streng uit, als we analytische functiebetrekkingen voorop stellen, wat natuurlijk niet mag.⟩

. . . .

De kromlijnige coördinaten op een oppervlak zijn niets als twee willekeurige functies, die ik over het oppervlak willekeurig laat beloopen; over het oppervlak, d.w.z. over een ∞^2 uitgebreidheid

Ik kan dus ook zeggen: ik breid twee functies over elkaar uit, zonder meer.

Hoe breng ik nu de rechte lijnen, platte vlakken enz. in de meerdimensionale uitgebreidheid zonder meer?

⟨17⟩ N.I. Lobatchevski

Wel, eenvoudig door de lineaire betrekking ⟨dat is eenduidige maatvergelijking,⟩ in de verschillende uitgebreidheden; en daardoor mogelijke betrekking van de meerdim. uitgebr.h. op meer eendimensionale coördinatenidee.

. . . .

I-14 ⟨*Grondstelling*⟨18⟩ Heb ik een schaallooze continuiteit eeneenduidig op zichzelf betrokken,⟨19⟩ ⟨met niet meer dan 2 dubbelelementen⟩ (zoo, dat b.v. A_1 bij A_2; B_1 bij B_2; C_1 bij C_2) dan kán ik er een schaal op bouwen, zoo dat er geldt een betrekking⟨20⟩ $x_2 = x_1 + b$ of $b - x_1$ voor één dubbel-punt, en $x_2 = \frac{a}{x_1}$ of $= ax_1$ voor twee dubbelpunten (Elem. operaties: $x_2 = -x_1$ en $x_2 = \frac{1}{x_1}$ en verder $x_2 = x_1 + a$ en $x_2 = ax_1$?). *)⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨Denk nu een 3-ledige groep van zulken transform. Probeer eerst met 2 vaste dubbelpunten. Herbouw de schaal uit één transform. geconstrueerd, blijkt maar van één-ledige groep mogelijk, ⟨die er trouwens minstens zijn moet.⟩ Met een der dubbelpunten veranderd komt een nieuwe groep, staande tot de oude als vermenigv. tot opt.. Een 3^{de} groep op deze wijze aan de vermenigv. geknoopt, blijkt geen 3-ledige groep voor 't geheel te geven. Het is dus onmogelijk de hele groep gelijkgericht te houden. We hebben alleen de beide reciproke operaties nog, die de 2-groep vanzelf tot een 3-groep completeeren (n.l. $x_2 = -x_1$ en $x_2 = \frac{1}{x_1}$).⟩

. . . .

[*Vraag.* Hoe kan men, zonder van *maat* te spreken, de imaginaire punten invoeren, en dan uit den *eenduidigen samenhang* ⟨of een ander kenmerk zonder 'maat' als voldoende kenmerk⟩ direct de rechte lijn invoeren? Zonder van maat of lineaire betrekking te behoeven te spreken?]

. . . .

[De nieuwere meetkunde reduceert de ruimte-intuitie op andere intuities, los van de ruimte.][27]

I-15 [Men geeft drie *verschillende* dingen uit de tweevoudige oneindigheid van het functiebeloop, en wil dan poneeren een *wet*, volgens welke rechte lijnen en platte vlakken kunnen worden gevormd. Van *maat* wil men echter niet spreken.]

. . . .

Maten en punten op verschillende lijnen kunnen niet worden vergeleken, dus

⟨18⟩ *In deze stelling en toelichting daarop is vrijwel alles meerdere malen doorgehaald, verbeterd en toegevoegd en om die reden staat alles als latere toevoeging weergegeven. Veel doorhalingen hieruit zijn onduidelijk leesbaar of zelfs totaal onleesbaar; vraagtekens zijn weggelaten.*

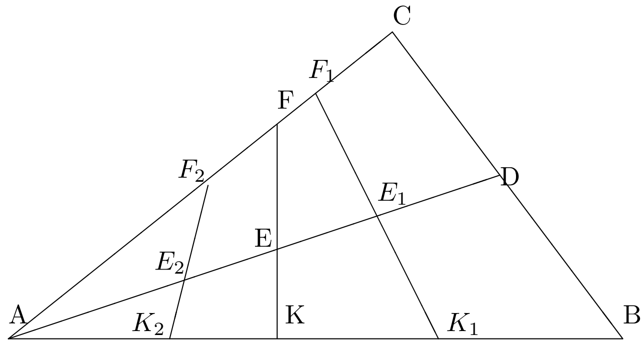
⟨19⟩ ⟦Wil⟧ ik ⟦twee⟧ continuiteiten eenduidig op ⟦elkaar⟧ betrekken

⟨20⟩ dan kán ⟦dit niet anders of er is⟧ een betrekking .. *(de rest van de doorhaling is onleesbaar)* niet op elkaar worden betrokken, dan als volgt:[28]

Stel op beide lijnen vast de zwaartepuntsidee, en neem 2 punten op zoo'n lijn als grondpunten aan, en bepaal een ander punt hierdoor,⟨21⟩ uit welke twee gewichten der grondpunten het de resultante wordt; maar nu kan men geen gewichten van verschillende punten (b.v. kleurtoestanden) vergelijken, en daarom krijgt men pas een bepaaldheid, als men begint bij dubbelverhouding, als eerste grondgetal.

. . . .

I-16



Zijn A....B. C. de drie toestandspunten, en stellen we daarin de zwaartepuntsbetrekking, of liever de zwaartepuntsmogelijkheid tusschen 2 willek. punten. Dat komt neer op hetzelfde, als de mogelijkheid van een continue overgang, door menging van toestanden; de meetk. plaats der zwaartepunten (of mengingspunten) uit 2 punten noemen we rechte lijn.⟨22⟩

Zij nu D een mengingspunt van B en C, dan is er een mengingslijn AD, een willekeurig punt E waarvan we kunnen beschouwen als mengingspunt van 2 punten F en K, gelegen op AC en AB. Verhoogen we nu van alle punten F ten opzichte van K het gewicht in dezelfde reden, dan is het duidelijk, dat de meetk. plaats der punten E alle onderling mengbaar *blijven*, dus *blijven* liggen op een rechte lijn.

Zoo blijkt dan tevens de dubbelverhouding projectief te zijn.

. . . .

(doorgehaald): ⟦Als de eenheden (de ongelijksoortige) in de 3 hoekpunten eenmaal zijn gekozen, zijn ze natuurlijk in alle punten, als mengpunt daarvan ook **I-17**

⟨21⟩Stel op beide lijnen vast de zwaartepuntsidee, en neem 2 punten op zoo'n lijn als grondpunten aan, ⟦uit verschillende⟧ en bepaal een ander punt hierdoor,

⟨22⟩de meetk. plaats der zwaartepunten (of mengingspunten) uit 2 punten noemen we een rechte lijn. ⟦En dan is het duidelijk, dat .....⟧

bepaald.⟧

Men kan het best de drie hoekpunten beschouwen als 3 stoffen: water, aether en olie: dan komt de beteekenis der mengpunten en menglijnen (rechte lijnen) het duidelijkst voor den dag.

We zien zoo de meerdimensionale meetkunde ontstaan, zonder dat we eenzelfde maat voor verschillende stoffen behoeven in te voeren.

....

Is de dubbelverhouding op de rechte lijn projectief gebleken, dan volgt nu vanzelf de beteekenis van de dubbelverhouding in den stralenbundel.

....

De projectieve meetk. in R_3 om O is op deze manier identiek met die in het platte vlak R_2.

....

I-18 Nog eenvoudiger stel de heele planimetrie op als een stelsel van verhoudingen van drie ongelijksoortige dingen, dus niet uit te drukken door een getalverhouding $a : b : c$; alleen door $\frac{a':b':c'}{a:b:c}$.

Op die manier vallen vanzelf alle oneindige getallen weg; we krijgen alleen $0 : 1 : a$ b.v.

(Dat oneindige komt er dan alleen in, als we bij de *maat*-invoering merken, dat van $1 : 0$ naar $1 : -1$ een oneindig groote *maatweg* wordt).

En definieer de dubbelverhouding van twee lijnen c en d in den bundel van a en b, als de dubbelverhouding der overeenk. punten van perspectivisch met elkander doorloopen segmenten van c en d ten opz. van de overeenk. punten der daarmee eveneens perspectivisch doorloopen segmenten van a en b.

....

Het is een *afspraak* in de projectieve geometrie, om alleen van kwaliteit (niet kwantiteit) der punten te spreken.

Ik kan nu over de wijze van samenhang nog allerlei afspraken maken – dit is een geheel nieuw chapiter – en kan er zóó zoowel een boloppervlak als een R_∞ van bouwen. Want ik kan reeds vooraf aan elk punt 1 of 2 of meer *plaatsen* toekennen, of aan sommige een, aan andere meer, enz. Zoo krijgen we de grensgevallen van regelmatige lichamen te onderzoeken.⟨23⟩

⟨Systeem aldus: *Twee kwesties* 1. van projectiviteit en ⟨maat.⟩⟨24⟩
2. van samenhang.

⟨23⟩ *De nu volgende alinea sluit hierop aan, maar staat in het schrift onderaan pag. 19.*

⟨24⟩ 1. van projectiviteit en ⟦samenhang.⟧

Eerst wordt 1 opgelost; met behulp daarvan nemen we de Euclidische ruimte met regelmatige lichamen als rekenhulpmiddel, en werken met behulp daarvan uit de *samenhangkwestie.*⟩

. . . .

In de wiskundige wetenschap wordt telkens de theorie 'verdiept', dat is meer gecentralizeerd, maar dan als terugwerking meteen weer verschrikkelijk uitgebreid, want door de nieuwe centralizeering als veralgemeening zijn allerlei nieuwe verbijzonderingen buiten de oude mogelijk geworden. **I-19**

. . . .

Projectieve eigenschappen zijn onafh. van het fundamentaalpunt (van twee punten komt dan ook alleen voor de $\frac{y_3}{x_3} : \frac{y_2}{x_2} : \frac{y_1}{x_1}$).

Metrische eigenschappen zijn wèl afhankelijk van het fundamentaalpunt; dán treden op de $x_3 : x_2 : x_1$ op zichzelf. (d.w.z. $\frac{x_3}{x_{3F}} : \frac{x_2}{x_{2F}} : \frac{x_1}{x_{1F}}$)

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Als voorbeeld van elliptische niet-spherische geometrie kunnen we nemen de eigenschappen van het oppervlak van een rhombisch kristal. **I-20**

Daar ik in de proj. geometrie niet heb te maken met punten ⟨op zichzelf,⟩ maar alleen met de verhoudingen van allerlei punten tot één fundamentaalpunt, kan ik vrij het fundamentaalpunt driemaal plaatsen ⟨als aangenomen punt,⟩ en krijg dan vanzelf ....⟧

. . . .

[Naar projectief kenmerk heb ik alleen te maken met $\frac{x}{x_F} : \frac{y}{y_F} : \frac{z}{z_F}$; maar nu kan ik nog wel bovendien een manier van topografeering aannemen, die maakt, dat elk geometrisch punt twee topografische punten krijgt.⟨25⟩

[Zoo b.v. als ik den bundel in R_3 ga snijden met een bol.]

. . . .

De drie ongelijksoortige punten in het projectieve continu hebben ieder twee tegengestelde 'zinnen' (a en b of pos. en neg.). Zijn die zinnen P_1 P_2 Q_1 Q_2 R_1 R_2. Dan is er een continuiteit van $P_{\frac{1}{2}}$-zinnen naar $Q_{\frac{1}{2}}$-zinnen door **I-21**

$\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ heen en door $\begin{pmatrix} P_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} P_2 \\ Q_1 \end{pmatrix}$ heen.

We kunnen die continuiteit afbeelden op een bol, door het projectieve vlak af te beelden op de eene bolhelft uit het middelpunt, en de tegenstralen dan gelijk

---

⟨25⟩ Naar projectief kenmerk heb ik alleen te maken met $\frac{x}{x_F} : \frac{y}{y_F} : \frac{z}{z_F}$; maar nu kan ik nog wel bovendien ⟦onderscheiden elk punt in tweeën of in drieën b.v. het punt $2 : -3 : 5$ verdeelen in twee getopografeerde punten, n.l. ... ⟧ een manier van topografeering aannemen, die maakt, dat elk geometrisch punt twee topografische punten krijgt.

te teekenen met de stralen zelf ⟨b.v. met kleuren in elk punt v.h. opp.⟩ . Zoo wordt dan het projectieve vlak tweemaal op den bol afgebeeld (het elliptische vlak er ⟨tweemaal⟩ op uitgebogen).[29]

(Zoo wordt de elliptische rechte lijn tweemaal afgebogen op den cirkel om een stralenbundel.)

. . . .

Zoo kan ik het projectieve systeem ⟨van twee dimensies⟩ plaatsen in *elken* samenhang ⟨desnoods komt elk punt 10 maal voor⟩ maar het is de vraag, of ik het, als ik een ⟨zekere⟩ formule voor ds opstel,[⟨26⟩] dán nog wel kan afbuigen op onze platte Euclidische R_3 ⟨althans in dien samenhang.⟩ En in 't bijzonder is het de vraag, welke oppervl. met const. ds-formule, dus met constante kromming, kan ik afbuigen op een platte Euclidische R_3? Welke samenhangen zal ik daarbij vinden?

. . . .

I-22 [Schrijf ik de formule van ds in den vorm[30]

$$\sum a_{\substack{ik\\lm}}(\frac{dx_i}{x_i}-\frac{dx_k}{x_k})(\frac{dx_l}{x_l}-\frac{dx_m}{x_m})$$

of

$$\sum a_{\substack{ik\\lm}}(dlogx_i - dlogx_k)d(logx_l - logx_m)$$

dan krijg ik *eigenschappen* ⟨onafhankelijk⟩ van ⟨de⟩ 3 bepaald gegeven grondpunten ⟨en⟩ het fundamentaalpunt.[⟨27⟩]

Ik vind dus ⟨echte projectieve⟩ maatbepalingen.[⟨28⟩]

(kantlijn:) ⟨⟨in 't alg.⟩ functie van: $x_i : x_k : x_l$ en:

$$\frac{x_i+dx_i}{x_i} : \frac{x_k+dx_k}{x_k} : \frac{x_l+dx_l}{x_l} \qquad enz.$$

Want als ik weet $\frac{dx_i}{x_i}+\frac{dx_k}{x_k}$
weet ik ook

$$\frac{d(x_i+px_k)}{x_i+px_k}-\frac{dx_i}{x_i}=\frac{p}{p+\frac{x_i}{x_k}}(\frac{dx_k}{x_k}-\frac{dx_i}{x_i})$$

Voor de Euclid. fund. driehoek krijg ik vanzelf zoo: functies van x, y, $\frac{dx}{x} en \frac{dy}{y}$ (want $\frac{df}{f}=0$), d.i. van x, y, dx en dy.⟩ *(einde kantlijntoevoeging)*

⟨26⟩maar het is de vraag, of ik het, als ik een ⟦constante⟧ formule voor ds opstel,

⟨27⟩dan krijg ik *eigenschappen* ⟦tusschenpunten⟧ van 3 bepaald gegeven grondpunten ⟦maar onafhankelijk van⟧ het fundamentaalpunt.

⟨28⟩Ik vind dus ⟦zoo eigenschappen van de punten v.h. platte vlak ten opz. van 3 vaste punten onafh. van maatvergelijking tusschen die punten.⟧

. . . .

De algemeene transformatie voert de punten van het continu in elkander over, waarbij we hetzelfde of een ander coörd. stelsel kunnen houden. De bijzondere (lineaire) is ook door eenvoudige verandering van het coörd. stelsel te krijgen. De gewone homogeen lineaire is ook onafh. v.h. fundamentaalpunt, en bovendien óók te valueeren door wisseling der ⟨3 grondpunten⟩ alleen.][⟨29⟩]

. . . .

Men moet die fijne wiskundige kennis beschouwen als een centraal verfijnd punt van een deel der cultuurtechniek, die ook als ruilwaarde is aan den man te brengen (het best, als je er goed reclame voor maakt), en zoo een redelijk bestaan kan verzekeren.

. . . .

[Het projectieve verband tusschen bewegingsgroepen in R_3 en in R_4 om een punt (verschuiving; draaiing / r.glh.dr.; l.glh.dr.), gaat niet door voor R_2 en in R_3 om een punt. Misschien weer wel zoo twee groepen te vinden in R_6 ⟨om een punt⟩ uit R_5 (een groep van 6 en een van 9).[31] **I-23**

. . . .

Maar dit zal wel niet; want het aantal glh. stellen is al ∞^6, ⟨hetgeen geeft ∞^7 dr..⟩ en de r.glh. dubbeldr. vormen bovendien geen groep. Wat zou dán een reëele groep van ∞^5 in de R_6-beweging moeten zijn?]

. . . .

⟦[⟨30⟩] Op ⟨het opp. van⟩ een ellipsoide is altijd nog weer een speciale maatbestemming mogelijk, die fraaiere resultaten geeft, dan de gewone eenmaal over de ruimte aangenomene. Want die over de ruimte moet ⟨invariant zijn voor de transform., dus⟩ een ellipsoide constant laten, terwijl de speciale voor de bepaalde ellipsoide ⟦maar invariant hoeft te blijven voor een⟧ nu bovendien nog gespecialiseerd kan worden zóó, dat ze een bepaalde kegelsnede op de ellipsoide ook nog constant houdt.

. . . .

De maatgeometrie is niets als een poging om de ‘maat in het hoofd’systeem af te grenzen, zonder last te hebben, *dat* op het lichaam, op de lichamelijke invloed bij het maatidee, Rücksicht behoeft genomen te worden.⟧

. . . .

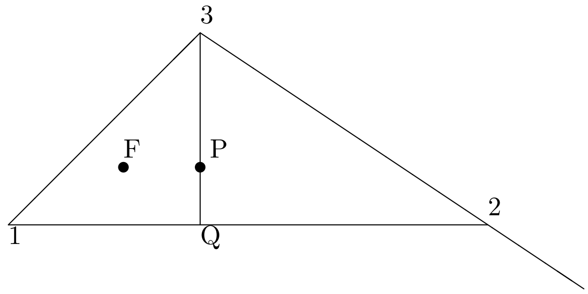
[⟨29⟩] en bovendien óók te valueeren door wisseling der ⟦fundamentaalpunten⟧ alleen.

[⟨30⟩] *De rest van deze pag. I–23 is doorgehaald*

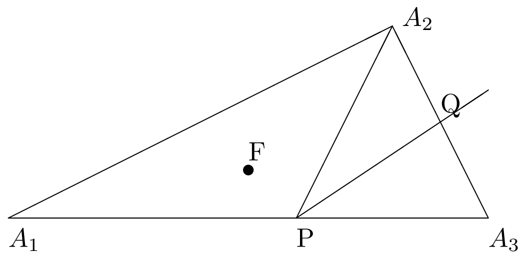
I-24 Het inzicht van Newton over de cosmografie hebben wij nu algemeen. Wat is het bijzondere en tevens waardelooze ervan? Het hebben van een betrekking van een speciaal deel van het al op grondprincipes, dat is grond-verstarring-in't hoofd, van onze logica.

. . . .

[*Directe definieering der coördinaten van een rechte lijn in proj. coördin.*[32]



Voor een punt P vereenig ik eerst met 3 en in het punt Q weet ik dan weer den weg, omdat dáár het fundam. punt uitsluitsel geeft. (Dat geeft alleen uitsluitsel op de zijden van den driehoek.)



Nu met de r. lijnen: ik bepaal eerst weer het snijpunt met een der zijden,⟨31⟩ en bepaal dan de ⟨ontbindings⟩-verhouding⟨32⟩ in den zoo gevormden bundel als de dubbelverh. van PQ en PF t.opz. van PA_2 en PA_1. [Dat wordt de ontbindingsverhouding van PQ langs PA_2 en PA_1.]

. . . .

I-25 Dedekind's getallentheorie[33] is niet een redelijk inzicht van de intellectueele verwording van het levende tot het steeds meer centralizeerend groeiende doode

⟨31⟩ik bepaal eerst weer het snijpunt met ⟦de⟧ zijden

⟨32⟩en bepaal dan de ⟦dubbel⟧verhouding

stelsel van het doode; maar niets dan een zoo overzichtelijk mogelijke (zoo paedagogisch mogelijke) beschrijving van dat centralizeerende doode stelsel.

. . . .

Die definitie van het oneindige bij Dedekind bewijst, dat we niets hebben, dan een kunstmatig, d.i. intellectueel gepassioneerd, gebouwd systeem, waarin zóó het oneindige optreedt.

Want 'zuiver' doet zich dat ⟨(het oneindige)⟩ bij ons alleen op als de notie van een gebied, waar zich de vastheid van onze eindige arrestaties begeeft. (Bij dood, begrenzing der ruimte enz.) Het komt als onmogelijkheid voor het intellect om op zichzelf te blijven leven.

. . . .

De getallentheorie van Dedekind is niet de nagang van de opvolgende partieeringen of associaties, die tot het rekenen hebben gevoerd, dus ook niet het centralizeerend stelsel der 'middelen', dat altijd nog intuitief is; maar een kunstmatige gooi ‖ naar dat laatste, een zuiver *logisch* systeem, dat, van de wereld **I-26**
afgescheiden, is opgebouwd; waarbij het slechts een vaag probeerseltje is, dat het parallel zal loopen met het centraliseerend systeem; maar niet direct zelf is gevormd als centraliseerend systeem (zoals zoo'n ding uit zucht tot omgrijpen en veralgemeenering vanzelf door de menschen wordt gemaakt ⟨want men werkt er met onvoorstelbare definities, die des duivels zijn.⟩

. . . .

Wiskundige prijsvragen zijn even droevig als prijs-zakloopen op de kermis, en wie er in ernst aan mee doet, is voor de betere standen geblameerd.[34]

. . . .

Zoo'n uitgebreiden logica van Dedekind bewijst alleen, dat de vroegere logica toch de aanschouwing niet dekte. Maar de nieuwe grijpt er even goed naast!

. . . .

Er zijn geen *feiten* of *waarheden*; zulke dingen zijn alleen goed, om menschen kort te houden in bepaalden zin.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Dedekind is ook dáárom knoeiwerk, omdat hij maar oordelen velt over *alle* elementen van een systeem, ook voor een oneindig systeem, wat hij wel kent als de reeks van zijn voorstellingen, maar waarover!⟧

. . . .

De logische (*beperkende*) 'Begründung' ⟨der wetenschap⟩ wordt eerst noo- **I-27** dig,⟨33⟩ als ze niet meer centraal bedreven wordt; dan is haar zekerste leidsman weg, en men kiest een nieuwe, die tevens echter al het bereikte waardeloos maakt.

. . . .

Dedekind bouwt feitelijk bij zijn 'voorbeeld van een oneindig systeem' de 'keten' op⟨34⟩ door telkens herhaling van de volgoperatie.[35]

Want feitelijk zegt hij: 'het geheel, dat ik maken *kan* (waar haalt hij de tijd daarvoor?) is aldus gevormd.

. . . .

Het teruggaan tot diepere elementen (ánders dan als machinebouw ten verderve) zou alleen zuiveren zin hebben, als dan van daaruit de mogelijkheid tot uiteengaan (opbouw) naar alle kanten werd getoond (waarvan de feitelijke een bijzonder geval is; zoodat die feitelijke als willekeurige zondeval werd gezien). Maar wat doet Dedekind? Hij zoekt moeizaam niets op, dan dat feitelijke systeem, dat er al is.

[En ook de hyperb. en ellipt. maatbepaling heeft niet veel waarde; het is geen geometrische veralgemeening *) – die zijn trouwens altijd moreel ⟨zoo goed als de verbijzonderingen⟩ – maar alleen een methodische centralizeering.]

*) *(kantlijn:)* ⟨natuurlijk niet, want de maatwiskunde is empirisch⟩

. . . .

I-28 De wil tot syllogisme is de wil tot gelijkstelling van doel en middel.[36]

. . . .

Een heel andere kwestie is, dat een centralizeerend systeem dikwijls ook afgescheiden van het doel, waarvoor het gemaakt werd, op zichzelf aanwending kan vinden.

[b.v. stellingen van Dedekind voor de groepentheorie].

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Als voorbeeld van dingen 'waar je wat aan hebt' mijn potent. theorie en de projectieve meetkunde.⟧

. . . .

Je wiskunde is je levenswerk, waarvan de grootste kracht eerst komt in den ouderdom. Maar je filosofie en kunst heb je alleen in je jeugd: zorg dus tijdig *die* uit te leven.

⟨33⟩De logische (*beperkende*) 'Begründung' ⟨der wetenschap⟩ wordt eerst ⟦mogelijk⟧ ,

⟨34⟩Dedekind bouwt feitelijk bij zijn 'voorbeeld van een oneindig systeem' ⟦zoo⟧ de 'keten' op

. . . .

De universiteitswiskunde negeert die van de H.B.S. en begint breeder weer van voren af. Zoo begint ook later de wiskunde van den wiskundigen nà de universiteit weer van voren af.[37]

. . . .

⟨Er bestaat een⟩ wérkelijke zuivering en vervolkomening van *de wiskunde*⟨35⟩ **I-29**
[maar ten koste van de andere deelen der levenspraktijk.]

Zoo is een huis een vervolmaakt hol, maar toch waren de holbewoners gelukkiger.

. . . .

De ruimte, driehoeken, maatstokken enz. zijn door den duivel ingevoerde bevestigingen; meer niet. Maar ga ik die nu alleen *logisch betrekken*, dán gebruik ik schijnbaar bij die logica zooiets als een dood geraamtesubstraat van die dingen, wat dan blijkt en wordt gezuiverd en vervolkomend (mathem. logica enz.)

Analoog gebruikten de menschen kruiden en baden in de natuur, tot ze die dood verstandelijk logisch gingen zien. Toén konden ze de natuur zuiveren en vervolkomenen en tot zijn beginselen reduceeren, (Scheikunde, kunstmatige medicijnen.)

De mathem. logica is als een samenvattende hypothese, zooals de moleculairtheorie en de mechanica in de natuurwetenschap. (Een mensch *wil* vaste wetten zien, dus ziet ze.)

. . . .

Zoo'n ding als van Dedekind[38] is toch eigenlijk hoogelijk oninteressant; interessant is het, het nieuwe gebied te openen, zooals Cayley of Cantor. Maar dat nu theoretisch te gaan napeuteren, och, doe maar! Doe groepentheorie of wat ook. In ons leven van bepaaldheden, vindt elk centralizeerend systeem van bepaaldheden, dus alle wiskunde, zijn toepassing (rebussen, geometrie, groepentheorie en Sherlock Holmes, wat nog meer leeft.) **I-30**

. . . .

Ten slotte doet alle berekening van iemand toch niets, dan zijn levensweg *begeleiden*, niet *leiden*.

. . . .

Ook in wiskunde: is een vraagstuk *goed* opgelost, dan is er geen hokuspokus meer bij, maar spreekt het vanzelf.

⟨35⟩ ⟦De nieuwere wiskunde, symbolische logica enz. is een⟧ wérkelijke zuivering en vervolkomening van *de wiskunde*

. . . .

En dan zeg je: is dat nu alles? De oplossing is eenvoudig het doordringen tot bewustheid van *wat* ik gesteld heb.

(kantlijn:) ⟨Dit zei Schop.,[⟨36⟩] maar is niet waar; men kan wel degelijk een eisch stellen, iets te bouwen met bijvoorwaarden, en moet dan echt probeeren, of het gaat; en de oplossing is niet vanzelfsprekend, maar doet wonderlijk aan.⟩

. . . .

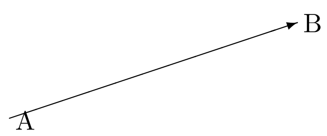
I-31 *(doorgehaald:)* ⟦De menschen die zoeken naar 'fraaie' uitkomsten, hokuspokus uitkomsten zijn gek.⟧

. . . .

De R_3-geometrie is niets als een *methode*, die we op de werkelijkheid toepassen.

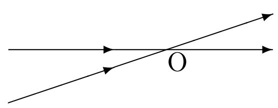
. . . .

In de elliptische meetkunde[39] is de rechte lijn 'gesloten' ⟨d.w.z. omsluit in c over het platte vlak⟩ als ik hem tweemaal wil rondloopen, en dan gaat ook de rotatiestelling door.



2x lijnintegr. langs AB =

$$\int_{\circlearrowleft} rot.\ \text{over opp. rechts van } AB + \int_{\circlearrowleft} rot.\ \text{over opp. links van } AB.$$



De distributie zonder divergentie heeft wel degelijk rotatie[⟨37⟩]

[⟨36⟩] A. Schopenhauer

[⟨37⟩] De distributie zonder divergentie heeft ⟦wèl divergentie (2 vlak bij elkaar die elkaar opheffen in O), en heeft ook⟧ wel degelijk rotatie.

De stelling: vector distr. = één bepaalde *rot.* distr. + één bep. *div.* distr. – gaat algemeen door [want gaat door: $\int$ langs gesl. kromme = $\int rot.$ er binnen (d.w.z. binnen de binnenruimte.]

(kantlijn:) ⟨[want aan ∞-heden en discontinuiteiten doen we niet]⟩

....

[Onderzoek de functie $\frac{1}{r}$ in ell. m., en onderzoek of hetzij die, hetzij een andere er een divergentie 0 heeft buiten het agenspunt; ⟨d.w.z. buiten de 2 agenspunten, want in ell. meetk. komen de agenspunten altijd gepaard.⟩ **I-32**

....

Nu eerst nagaan wat is U voor $div.U = 0$ op een bol?]

....

[Dat onze proeven ons niet anders leren, ook op groote afstanden, dan: som der $\angle\angle$ van driehoek is 180^0, is natuurlijk, daar het concept der Euclidische meetkunde is geboren uit een notie ook van zeer groote afstanden.]

....

Het is een projectie van de wet der eeuwige gerechtigheid, dat de ruimte elliptisch zal blijken, zoo goed als de aarde rond.[40]

Je kunt maar niet eeuwig knoeien, en het oneindige of der 'Verstand' als vuilnisbak gebruiken; neen er moet een grens zijn, waarboven de ‖ zonden op eigen hoofd neerkomen, zooals ook aan het aardoppervlak. **I-33**

....

Wiskundige bewijsvoering is de eenige mogelijkheid om (in zeker gebied) een ander in verstandhouding te houden en mee te nemen.[41]

....

[De niet-Eucl. en n-dim. wiskunde heeft alleen zin voor het *doode* denksysteem en kan dat eerst uitbreiden, als het leven er af is; dat is niet erg, want het leven is er bijna altijd toch al ⟨altijd⟩ af.][42]

....

[Alles, waarin het 'oneindige' wordt gepostuleerd (Dedekind) heeft misschien logische, geen levend-wiskundige waarde. Die kent alleen het eindelooze en het gesloten elliptische.][43]

....

Twee lijnen worden als hetzelfde *gesteld*, zoo goed als twee electr. *stroomen*, maar ze *zijn* het niet.

....

Bij menschen alleen is het hoofd door de hals gescheiden van het lichaam, en daardoor neiging tot 'wiskunde' of 'wetenschap' (tenzij door uitw. natuurprikkels de distributie zuiver over het lichaam verdeeld wordt gehouden; maar bijna nergens zijn de omstandigheden daartoe aanwezig)

....

I-34 Vroeger was de wiskunde wel leuk als leuke lichtzinnigheid van de rijken, ⟨die telkens hun attentie weer in 't lichaam konden terughalen⟩ (dat was oorspr. alle cultuur). Maar nu ze in ernst wordt bedreven, is het hoogst droevig.

....

Wiskunde wordt thans in hopelooze afgrenzing van het volk bedreven uit maatsch. handhavingsdrang of domme eerzucht.

....

(doorgehaald:) ⟦Tusschen de zoogen. 'grondslagen' en uitbreidingen als R_n is niet veel verschil.⟧

....

Men verwijt soms 'oppervlakkige' kennis, doch bedenke dat zintuigen slechts werken van oppervlak naar oppervlak.

....

[Spreek tot den leek, maar niet autoritair van buiten af ⟨als Lorentz,⟩ maar ken hemzelf recht van oordeel toe.][44]

....

[Ieder weet wel, dat zijn niet wetende jonkheid zuiverder kan oordelen, dan de wetende ouderdom. Dat hij langzaam afsterft.]

....

Om het geluk der onbepaaldheid (in aanschouwing, d.w.z. droomen) te hervinden, heeft de tegenwoordige afgedwaalde noodig bepaaldheid, b.v. boeken.

....

Zoekt men eenheid bij versch. verschijnselen (b.v. behoud v. prod. v. soortel. warmte en temperatuur; behoud van energie), dan zal men haar vinden, tot - - - - -

. . . .

(doorgehaald, bijna onleesbaar:) ⟦L.v.d.Z. ‘Studies in philosophische waardering der eerste wetenschappen⟧ [45] **I-35**

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De arme ‘slaven’, die zich door Lorentz ‘laten voorlichten’, ze zijn slaven van Lorentz, al weten ze het niet.⟧

. . . .

[Wil je de wetenschap in haar waarde voor het *leven* toetsen, dan moet je zulke populaire voordrachten als van Lorentz lezen.]

. . . .

Van Veronese lees je niets meer, als hij ‘réclame la priorité absolue’

. . . .

Wat de natuurwetenschap betreft, bedenke men eens, dat *alles* ten slotte niets is, als actie op den waarnemer, waarvan dus een gelijke en onbekende reactie uitgaat. ⟨En die laatste zou de moreele waarde kunnen geven, maar dáárvan scheidt men willekeurig af.⟩[46]

En die *actie* op den waarnemer wordt – lichtzinnig ⟨geëlimineerd in de wiskunde en de verstandhouding⟩ – als van:[⟨38⟩] een steen, die *ik* optil, en die ik zie optillen.

. . . .

[Sommige dingen zie ik alleen, en andere *voel* ik? Och, het *voelen* is een AB reactie, waar het leven in ’t hoofd niet meer *gaat*; eigenlijk moet ik ook den hemel voelen, niet *zien*.][47]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Is een inzicht u geleverd door een schurk, dan zal het u niet tot hereeniging kunnen helpen.⟧

. . . .

[Omdat in de elliptische ruimte geen vectorveld denkbaar is,[48] dan met $\int div = 0$; zullen we wel geen agenspunten ⟨d.w.z. eenvoudige divergentie als grondvorm voor het vectorveld⟩ moeten aannemen, maar ⟨misschien⟩ een verschuiving, die van een punt verloopt tot zijn poollijn.][⟨39⟩]

[⟨38⟩] En die *actie* op den waarnemer wordt – lichtzinnig ⟦gelijkheid in⟧, als van:

[⟨39⟩] maar ⟨misschien⟩ een verschuiving⟦sdivergentie⟧ , die van een punt ⟦langzaam tot 0⟧ ver-

. . . .

I-36 [Het is toch een bepaalde opgave: in de elliptische ruimte twee punten a en b; uit a een zekere pos. *uit*strooming; uit b een even groote *in*strooming.⟨40⟩ Hoe is daarbij de vectordistributie, als er een potentiaal moet zijn?

Voor een bol is het analoge vraagstuk: twee uitstroomingspunten aan de uiteinden van één middellijn en twee instroomingspunten aan de uiteinden van een andere middellijn.]

. . . .

(Poincaréc[49] Les mathématiciens procèdent donc 'par construction', ils 'construisent' des combinaisons de plus en plus compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ses ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments *et en déduisent* *) les rapports des ensembles eux-mêmes'.

'L'induction mathématique n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même'.

)(kantlijn:)* ⟨liever: *et essayent d'en construire*⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦In wiskunde is geen continu, de werkelijkheid breekt door in de wiskunde, als notie van continu.⟧

(P.) 'La seule propriété des échelons qui interviennent dans leurs raisonnements, c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons; elle doit donc seule aussi intervenir dans la définition'.[50]

'Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe, la forme seule les intéresse'.

(onderaan de pagina en, in het originele schrift, onderaan in de kantlijn van pag. 37) ⟨*Hoe zou ik anders na het tellen van 1 weten, voor welk ding ik moet tellen.*[51]⟩

⟨*door datzelfde werden de 'begrippen' in het hoofd gevormd, daarom alleen bestaat een aantal. Als ik tel, weet ik vooraf al de dingen, die ik wil tellen. Dedekind denkt daaraan niet.*[52]⟩

. . . .

I-37 *'La conception,* où un nombre incommensurable est regardé comme la frontière commune de deux classes de nombres rationels'.[53]

---

loopt tot zijn poollijn

⟨40⟩uit b een even groote ⟨⟦negatieve⟧⟩ *in*strooming

'Lesprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison'. (d.w.z. de wiskunde is dood.)[54]

. . . .

De uitbreiding der wiskunde is het langzaam uitwerken er ⟨van tot zoo volledig mogelijke benadering van⟩ de intuitie,⟨41⟩ zoo vervolkoment zich het systeem, zonder ooit ⟨iets van den aard der intuitie te zijn, maar alleen de *actie*, waartoe de intuitie ons prikkelt.⟩⟨42⟩[55]

. . . .

Je geloofsbelijdenis ná je loopbaan kan wel ánders zijn, dan aan 't begin; maar daarom is de laatste niet te verwerpen; ze zijn ten slotte beide gebaseerd op 'wil' (dat opheffende woord der phil.), en dat die twee willen strijdig zijn, pleit tegen de gewetenszuiverheid er van ⟨van hun gemeensch. grond.⟩

. . . .

De getallen (d.w.z. anders dan *één*) zijn gekomen uit het zien van de dingen onder een deel-gezichtspunt. Daardoor kon de overgang van een ding naar een ander ding plaatshebben, zonder dat verschilgewaarwording werd gevoeld. Maar nu kon men daardoor heerlijk vervallen in het samenvatten van meer dingen dan één in de verstandhouding, en zoo te komen tot allerlei waardeloos begeerde *kennis* d.i. wilssamenhouding.[56]

. . . .

Maar niets heeft het *getal* te maken met die afbeelding van een oneindig systeem in zichzelf.[57]

'Afbeelden' (Dedekind), wat is dát al niet een samengesteld begrip. (d.w.z. **I-38**
vèr van het centrum). En met behulp van zoo iets wil hij veel samengesteldere gaan ⟨geven⟩ als de primaire.⟨43⟩

En als Mannoury zegt, dat hij *zooveel* maal het syllogisme heeft toegepast, stelt hij zich mét het aantal buiten het aantal.

Neen, er zijn geen logische *grondslagen* van wiskunde, alleen *moreele.* Logisch moet je doorjagen op zelf-gesteldheden, gedreven door de duivelsche logica.

. . . .

⟨41⟩ *De toevoeging staat als verbetering in de plaats van een onleesbare doorhaling.*

⟨42⟩ zoo vervolkoment zich het systeem, zonder ooit ⟦te slagen⟧

⟨43⟩ En met behulp van zoo iets wil hij veel samengesteldere gaan ⟦opbouwen⟧ als de primaire.

Zoo is er ook de wil tot gelijkheid, die de maatvergelijking heeft ingesteld; maar ook maar weer zonder eind, maar toch niet oneindig; hoe zou het gaan, áls ik maar altijd doorging, dat hebben we er niet bij gesteld.

. . . .

Een gedeelte ⟨facet⟩ nu van onze zelfgesteldheden is, dat ze worden ingeordend in een logisch systeem; intusschen hebben ze ∞ veel facetten, en elk facet kan in een logisch systeem worden ondergebracht.

. . . .

I-39 De mathem. logica is *onlevend*.[⟨44⟩]

Zeg nooit,[⟨45⟩] dat de staat niets is dan administratie, hij is de administratie toegepast op haar tegendeel, en als zoodanig levend.

En zoo is de wiskunde levend, als het is logica toegepast op haar tegendeel.

. . . .

Men spreekt van *herinnering*, omdat men het verleden afscheidt, anders was het ín het heden; herinnering is de scheiding van verleden en heden.[58]

. . . .

De meeste eenheden van tegendeelen zijn dit: dat men in lichtzinnigheid iets afscheidt van het centrum, en daardoor nu gelegenheid wordt geopend, om het afgesplitste op het overgeblevene te betrekken (kloppen tegen de wanden), wat een soort van tegendeel van de oorspr. scheiding is.

. . . .

Het is wèl onverkwikkelijk, je te verdiepen in al die uitspraken van menschen, die zeggen, hoe het *is*; aan anderen. Dát kun je alleen tegen jezelf zeggen.

. . . .

Is er iets flinks of verhevens in administratie of instrumenten? Ze zijn allemaal door joden uitgevonden.[59]

. . . .

I-40 *(doorgehaald:)* ⟦In het tellen ligt het zien van de dingen uit een oogpunt van *constantheid* ⟨dat ik hetzelfde ding straks nog heb, als gelijkwaardig met nu⟩ en *behoudbaarheid* en *doodheid*. Stelling en verkenning ⟨in 't hoofd⟩ van de tijdspartieering, zooals ik door de gelijkheid van twee dingen (tellen) stel en in 't

---

[⟨44⟩] De mathem. logica is *onlevend*, ⟦verloochent dus de wiskunde, zoals de corruptie van het stadsleven (zonder buiten er bij) zichzelf gaat verloochenen, en naar buiten terugverlangt.⟧

[⟨45⟩] Zeg ⟦dus⟧ nooit

hoofd verken: de ruimtelijke scheiding.⟧

En die dooding van het levende in de dingen is gekomen uit behoefte om ze gelijk te maken voor verschillende personen, en er zoo over tot een vergelijk te kunnen komen. Want oorspr. was de wereld voor de verschillende menschen verschillend.[60]

. . . .

Dat wij een hond kunnen leeren, een idee van *drie* te krijgen, bewijst niets, dan dat we hem kunnen leeren nadoen. Uit zichzelf was hij er nooit toe gekomen.

. . . .

Dat de menschen begeerte kregen naar *meer*, en niet naar *minder*, dan een ander, kwam van dwaze heerschzucht ⟨elke eenheid een rustpunt op den weg naar machtsuitbreiding.⟩ Er zijn er ook, die liever minder hebben; bij die *leeft* het getal niet, dan in nadoen, zooals bij een hond.

. . . .

Het maatcontinuum van één dimensie is onafhankelijk van het getalidee. Zooals de electriciteit onafh. is van de moleculairhypothese.[61]

. . . .

Wiskunde alleen zien in dienst van physica, *die* van techniek, *die* van oorlog (van landbouw is eenvoudig dom), *die* van kluizenaarseenzaamheid. Dáár zijn de vorige stadia dan weer te verdedigen als lichtzinnigheid, daaruit nieuwe zondeval, daaruit nieuwe nood en oorlog enz. Kringloop.

. . . .

. . . .

Notes

[1]Hier wordt, bij het noemen van punten voor de dissertatie, verwezen (meestal zeker, een enkele keer hoogst waarschijnlijk) naar de volgende werken:
– B. Russell: *Foundations of Geometry* (de Engelse èn de Franse editie) en: *Principles of Mathematics.*
– L. Couturat: *Algèbre de la Logique*, en: *Principes des Mathématiques.*
– D. Hilbert: *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, (Heidelberger Congres, 1902), en: *Grundlagen der Geometrie* (ed. Teubner).
– F. Klein: *Nicht–Euklidische Geometrie. Vorlesungen, gehalten während des Wintersemesters 1889–1890*, uitgave 1893. Door Brouwer wordt dit werk meestal aangeduid met *Klein, Nicht-Eukl.*.
– S. Lie: *Grundlagen der Geometrie.*
– G. Cantor: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig, 1883) en: *Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Mathematische Annalen).
– R. Dedekind: *Was sind und was sollen die Zahlen*, en: *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*
– I. Kant: *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik ...*
– H. Poincaré: *La Science et l'Hypothèse* (1902), en: *La Valeur de la Science* (1905).
– M. Bacherach: *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie* (Göttingen, 1883).
– H. Hankel: *Vorlesungen über die complexe Zahlen und ihre Functionen* (Leipzig, Voss, 1867).
– H. Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik*, (1894).

[2]Met name in de eerste aantekenschriften komen veel algemene opmerkingen voor, veelal slechts zijdelings met wiskunde te maken hebbende en dan ook nog vaak in negatieve zin.

[3]Eveneens zijn er veel 'discussies' en gedachten over de grondslagen der wiskunde, zoals hier over axioma's.

[4]i.e. axioma's beperken in sterke mate de door definities mogelijke relaties.

[5]Axioma's ontstaan door onze *wil*! De menselijke wil is een belangrijk thema in Brouwers opvatting over de ontwikkeling van de wiskunde. Zie bijv. *Willen, Weten, Spreken* (1932). Over axioma's denkt Brouwer negatief; deze zijn slechts nodig in een formalistische opbouw, maar niet in zijn opbouw op grond van de 'oer-intuïtie' van de tijd.

[6]Dit verwijst mogelijk al naar het begrip 'causale reeks'; zie verder.

[7]Hier treedt al op Brouwers afkeer van en weerstand tegen formalisme met zijn grondslagen; wij zien hier zijn eigen idee van intuïtionisme en constructivisme, waar 'de mensen elkaar verstaan'. Deze verstandhouding is incompatibel met formalistische grondslagen van de wiskunde. Dit thema komt verderop vele malen terug.

[8]Het eerste voorbeeld van een in alle schriften steeds terugkerend thema: het mathematisch zien van de natuur als een voorbeeld van menselijke hovaardij, namelijk het opleggen van onze wil aan de natuur. Wij willen de natuur wetmatig zien om haar te beheersen. Wiskunde is dan geen zuivere wiskunde meer, maar een middel tot een doel.

[9]Dit is Brouwers 'natuurlijke' intuïtieve fundering der rekenkunde als simpel tellen en doortellen, in plaats ven de formalistische fundering van Peano.

[10]Het idee van causale volgreeksen, via een middel naar een doel, waarbij meerdere reeksen naar hetzelfde doel kunnen voeren. Dit wordt voor het eerst uitgewerkt in Brouwers dissertatie.

[11]Het fenomenologische, zuivere en beschrijvende van Faraday versus het mathematisch abstracte, hypothetische en 'verwordene' van Newton en van der Waals, die zich 'ver van het centrum' bevinden en alles reduceren tot slechts punt en rechte lijn. Toch kan de abstracte methode wel tot meer resultaat leiden. Zie onderaan deze pagina 4.

[12]D.w.z. meer variabelen (invloeden) er bij betrekken.

[13]Hier wederom het idee van doel–middel, van causale reeksen ter beheersing van de wereld. Voor Brouwer is dit het, in morele zin, lagere gedeelte van de wiskunde, en bovendien nooit volmaakt doeltreffend; zie verderop op deze pagina.

[14]Dat wil zeggen de intuïtie geeft uiteindelijk de goede en oorspronkelijke ideeën en vormt de enige solide basis voor de wiskunde.

[15]'Ruimte' is hier te verstaan als de *empirische*, de door ons ervaren ruimte.

[16]Dit citaat is afkomstig uit J.P. Eckermann: *Gespräche mit Goethe.* Op donderdag 1 februari 1827 vertelt Eckermann over een gesprek met Goethe over diens kleurentheorie. Goethe vertelt, hoeveel moeite het hem vaak kost, om geleerden van een nieuwere en betere theorie te overtuigen. Eckermann schrijft dan: 'Wir sprachen von Professoren, die, nachdem das bessere gefunden, immer noch die Newtonische Theorie vortragen. *(bedoeld is hier de Newtonse kleurenleer)* Dies ist nicht zu verwundern, sagte Goethe, solche Leute gehen im Irrtum fort, weil sie ihm ihre Existenz verdanken'.
Het citaat slaat voor Brouwer, gezien de teksten hier omheen, duidelijk op diegenen, die vasthouden aan logistiek als fundering voor de wiskunde, omdat ze daar hun bestaan als wiskundige aan te danken hebben.

[17]De logica, die het leven uit de wiskunde wegneemt. Een reactie waarschijnlijk op Russells *Principles of Mathematics*, die de wiskunde laat voortkomen uit de logica, een opvatting waar Brouwer ernstige bezwaren tegen heeft. Ook Frege is logicist, maar Brouwer reageert nauwelijks of niet op Frege.

[18]D.w.z. wiskunde moet voortkomen uit de persoonlijke levende intuïtie en kan niet het resultaat zijn van een abstracte dode logica.

[19]Hier, hiervoor en hierna keert Brouwer zich tegen abstractie, formalisme en tegen het meten en rekenen, als zijnde een verwording van de wiskunde, slechts bedoeld voor de beheersing van de natuur en van de wereld.

[20]Een citaat uit *Nicht-Euklidische Geometrie, Vorlesungen, gehalten während des Wintersemesters 1889–90*, van Felix Klein, uitgegeven in 1893. In de 'derde periode', onder § 4 *Von der Ungenauigkeit der räumliche Anschauungen*, pag. 305, 306 is het genoemde citaat te vinden. (n.b. die drie periodes worden ook genoemd in Russells *Essay on the foundations of geometry* uit 1900, chapter I.) De 'functies zonder differentiaalquotient' zijn de continue, niet differentieerbare functies van Weierstrass (1860). Brouwer is het niet eens met dit citaat van Klein. Zijn argument is een argument tegen de abstractie in de wiskunde.

[21]Het is de editor onbekend wat met een 'AB stoornis' bedoeld wordt; zie ook I–35.

[22]Hier wordt nog de mogelijkheid tot de opbouw van het eendimensionale continuüm in overweging genomen; in dat geval op te bouwen uit de logische principes alleen.

[23]Veronese: *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen* (1891, Duitstalige uitgave uit 1894). Zie ook *Mathematische Annalen* 19 (1882): Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens.
Zie ook Felix Klein: *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (1902), pag 323 e.v.
Brouwer gaat op de nu volgende pagina's (t/m I–24) de projectieve ruimte opbouwen en de projectieve meetkunde behandelen, uitgaande van haar axioma (I–12). Hierbij wordt gewerkt aan de hand van Klein's *Nicht-Euclidische Geometrie.*

[24]Brouwers verzet tegen een axiomatische opbouw; met de 'diepere grond' is dan bedoeld de wiskundige oer-intuïtie.

[25]Wiskunde wordt hier nog als 'logisch opbouwsel' gezien. De houding is hier nog niet consequent die van 'logica leert ons niets nieuws'.

[26]Er *is* dus maar een projectieve ruimte. De maatbepaling beslist dan welke specifieke 'ondersoort' bedoeld wordt, de Euclidische, de Lobatschevskische of de Riemannse ruimte.

[27]Brouwer wil uiteraard terug naar slechts één intuïtie, die van de tijd, om de wiskunde te grondvesten.

[28]Het idee van barycentrische coördinaten: uitgaande van drie punten in een

vlak, niet op een lijn gelegen, elk met een bepaald 'gewicht', verkrijgt men voor elk punt op het projectieve vlak een drietal homogene coördinaten. Een willekeurig punt heet dan een 'mengingspunt' ten opzichte van de drie punten. In het nu vologende worden dubbelverhoudingen en homogene coördinaten besproken.

[29]Brouwer schetst hier het sferische model van de projectieve ruimte.

[30]Projectieve maatbepaling: over de infinitesimale afstandsmaat in een projectieve ruimte. Zie de methode van Cayley in Kleins *Nicht-Euclidische Geometrie* (1893), hoofdstuk II.

[31]Deze en de volgende § slaan op Brouwers artikel *Over de splitsing van de continue beweging om een vast punt O van R_4 in twee continue bewegingen om O van R_3*, gepubliceerd in de *KNAW-verslagen* 12, 1904. 'r.glh.dr.' en 'l.glh.dr.' staan voor 'rechts', resp. 'links gelijkhoekige draaiing'.

[32]1,2,3, resp. A_1, A_2, A_3 vormt de fundamentaaldriehoek, F het fundamentaalpunt.

[33]Brouwer bespreekt hier Dedekinds getalidee aan de hand van diens *Was sind und was sollen die Zahlen* uit 1888. Dedekinds definitie van oneindig is voor Brouwer kunstmatig (§ 5 e.v. uit Dedekinds werk).

[34]Dit kan heel goed slaan op de Jablonovski prijsvragen uit de Mathematische Annalen. Zie IX–29.

[35]Zie Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen*, § 6. De afbeelding van een keten op zichzelf. Hier zien we bij Brouwer, getuige diens opmerking, het tijdselement in de wiskunde. Dedekind bouwt op (Satz 66) door de vervolgoperatie van afbeelden van een gedachte op de herkenning van die gedachte als zodanig, dat dan de volgende gedachte vormt, enzovoort. De afbeelding φS van de verzameling van alle gedachten op zichzelf is dan een echte deelverzameling van de gedachten S, want er zijn gedachten, die geen afbeelding van een andere gedachte zijn.

[36]Hier begint, doorgaande tot en met pagina I–35, een serie algemenere en veelal negatieve opmerkingen over de wiskunde en de logica. De laatste is, zonder de wiskunde, een dood geraamtesubstraat van de dingen.

[37]Een duidelijke verwijzing naar Brouwers eigen nieuwe opbouw van de wiskunde en naar zijn eigen dissertatie.

[38]Dedekind bouwt hier niets nieuws, zoals Brouwer ook al stelde in I–27.

[39]Potentiaaltheorie in de elliptische ruimte op deze en het begin van de volgende pagina.

[40]Hiermee begint het vervolg van de algemene en veelal negatieve en pes-

simistische opmerkingen; dit gaat door tot en met pag. I–35.

[41]Over de fundamentele ontoereikendheid van de taal; een veelvuldig terugkerend onderwerp.

[42]Brouwers onderscheid tussen 'dode' en 'levende' wiskunde; deze laatste is de wiskunde die opgebouwd is uit de oerintuïtie alleen.

[43]Let wel, het oneindige wordt hier *gepostuleerd* en niet volgens een eenduidig algoritme (inductief) opgebouwd.

[44]Dit lijkt te slaan op de theoretische benadering van de natuur door o.m. Lorentz, dit in tegenstelling tot de meer directe en beschrijvende manier van Faraday.

[45]L.v.d.Z staat voor Lau van der Zee, een scholier die bij Brouwers ouders inwoonde. Brouwer gebruikte zijn naam als pseudoniem bij publicaties van zijn eigen hand in het studentenblad Propria Cures.

[46]Brouwers opvatting dat fysica en de geobserveerde natuur niet ontdekt, maar door ons gemaakt en opgelegd worden. Zie ook de correspondentie met Korteweg over fysische metingen.

[47]De onbekende AB-reactie, vergelijk de AB-stoornis uit I–9.

[48]De rest van deze pagina en het eerste gedeelte van de volgende behandelt potentiaaltheorie in de elliptische ruimte.

[49]Vanaf deze plaats tot het midden van de volgende pagina wordt geciteerd uit Poincaré's *La science et l'hypothèse* (1902). Het citaat staat in het eerste deel *Le nombre et la grandeur*, in hoofdstuk I *Sur la nature du raisonnement mathématique.*
Poincaré vraagt zich in dit hoofdstuk af of er wel wiskundige ontwikkeling mogelijk is, of dat er slechts sprake is van syllogismen en tautologieën. Hij stelt: er is alleen volledige inductie; in de fysica geeft volledige inductie nooit zekerheid, maar in de wiskunde vormt het de stap van eindig naar oneindig, van het bijzondere naar het algemene, het is hèt voorbeeld van synthetische kennis a priori. De geest kan die stap naar oneindig bevatten, het is een bevestiging van een eigenschap van de geest. Dit is het tweede gedeelte van het hier gegeven citaat, vermeld op pagina 24.
Wiskundigen *construeren,* maar dat is niet voldoende. Er moeten soortgelijke constructies bestudeerd worden om eigenschappen van de soort te vinden en niet slechts eigenschappen van samenstellende delen. Daarvoor is de stap van bijzonder naar algemeen nodig. Dit houdt de onderzoeker echter op hetzelfde niveau; voor een hoger niveau is volledige inductie nodig. Hierover gaat het eerste deel van het citaat (pag.24).

[50]Dit citaat staat in het begin van het tweede hoofdstuk, *La grandeur mathé-*

matique et l'expérience. Poincaré stelt hier de vraag, wat het continuüm is. Uitgaande van de 'ladder' van de natuurlijke getallen **N** kunnen wij door tussenvoeging het systeem van de rationale getallen **Q** krijgen, maar dit geeft slechts het 'primitief continuüm' en niet een van eenheid en samenhang; er is alleen orde, geen metriek. Het gegeven citaat (pag. 31) stelt dat het enige wat over de 'treden van de ladder' te zeggen is, de resulterende onderlinge orde is, dat is haar rol volgens de definitie.

[51]Het gedeelte, waar dit citaat in staat, heet *définition des incommensurables*, dat is de definitie van de irrationale getallen. Alvorens de methode van Dedekind te geven (de snede, ter definiëring van irrationalen) stelt Poincaré het gegeven citaat (pag. 32), waar Brouwer het, als constructivist, niet mee eens kan zijn.

[52]Voor Brouwer kan men alleen tellen als er iets te tellen valt, dit in tegenstelling tot Dedekind.

[53]Na het aangeven van de paradox, die in een fysisch continuüm zal optreden ($A = B, B = C, A < C$), poneert hij de noodzaak om, en de methode hoe, in twee stadia een mathematisch continuüm te definiëren. Het citaat (pag. 40) geeft de Dedekind snede, die Poincaré hier weergeeft als de opvatting van Kronecker. Dit laatste slaat op de opvatting van Kronecker, dat het continuüm construeerbaar is.

[54]Het resumé van de constructie van het mathematisch continüm begint op pag. 40 met het gegeven citaat. Het continuüm als constructie, naar de opvatting van Kronecker, waaraan Poincaré toevoegt dat contradictievrijheid de enige eis is voor een wiskundige constructie, hetgeen Brouwers korte commentaar begrijpelijk maakt.

[55]Aan het eind van de Poincaré citaten staat dit commentaar van Brouwer: intuïtie als enige sturende kracht bij de ontwikkeling van de wiskunde.

[56]De ontwikkeling van getallen volgens Brouwer: Dit vinden we terug in de dissertatie, de eenheid van discreet en continu. De overgang van het ene ding naar het andere ding vormt het continuüm daartussen.

[57]Het getalidee bij Dedekind: de 'Kette', de afbeelding van een oneindig systeem in zichzelf. Zie hiervoor het genoemde *Was sind uns was sollen die Zahlen*, § 2 en § 6.
Voor Mannoury: zie *Methodologisches und Philosophisches zur: Elementarmathematik*, deel II, hoofdstuk 1 *Die mathematische Logik*.
Brouwers conclusie is ook hier, dat er geen logische grondslagen voor de wiskunde zijn, maar slechts morele. Logica doodt de levende wiskunde. Zie hiervoor ook de citaten op de resterende pagina's van dit eerste schrift.

[58]Merk weer op het tijdsidee bij Brouwer. Het nieuwe wordt ervaren, terwijl men zich een eerdere gebeurtenis nog herinnert. Zo wordt het getalsysteem opgebouwd.

[59]Dit slaat mogelijk op fysische meetinstrumenten. Zie de discussie hierover in de Brouwer-Korteweg correspondentie van vóór 1907.

[60]De mens in zijn oer-toestand, zonder contact met anderen. Zie *Leven, Kunst, Mystiek.*

[61]Het eendimensionale continuüm is onafhankelijk van het getalidee: een maat wordt er later op gebouwd. Het idee van een intuïtief continuüm ligt aan de basis en gaat vooraf aan het meetbaar continuüm. V.w.b. de vergelijking: continuüm als fenomeen, niet atomistisch. De vergelijking toont overigens dat atomistische electriciteitsleer voor Brouwer slechts een menselijke constructie is.

Chapter 2

Het Tweede Schrift

In dit tweede schrift verzet Brouwer zich tegen Dedekind, tegen Peano (die Dedekinds ideeën hanteert) en tegen Russell. Tot en met pagina 25 komt Poincaré ter sprake, op pagina 20 en vanaf pagina 28 tot het einde is er veel kritiek op Russell.

Van het continuum kunnen we uitgaan, omdat de menschen zich daarop **II-1**
verstaan.[1]

. . . .

⟦[⟨1⟩] We kunnen aan de logische begronding der wiskunde geen andere waarde toekennen, dan als paedagogische aanloop, om den leerling in te leiden tot het krijgen van routine in een zekere groep van bepaaldheden. Maar nu moet men zich op dat *middel* niet blindkijken.

Omdat over het syllogisme, die menschelijke ziekte, geen strijd heerscht, daarom moet men de aanstaande ingenieurs en landmeters wel langs *dien* weg invoeren in het vak.[2]

. . . .

Daarom óók, is eenmaal het nieuwe gebied geopend (wat natuurlijk alleen zin heeft, als we mogen verwachten, dat mettertijd het operatiegebied in het oude gebied er door zal worden vervolkomend), dan heeft al dat oude gepeuter niet veel zin meer, hoe ze er toe zijn gekomen. Er zijn grondslagen; alleen voeren wij steeds diepere gronden ⟨en tusschenschakels⟩ in, om het systeem te vervolkomenen.⟧

⟦Al dat zoeken naar grondslagen is niets dan een pogen, rust te vinden bij **II-2**
en grenzen te stellen om het nu eenmaal afgegrensde gebied.

[⟨1⟩] *De rest van deze pagina alsmede pg. 2 zijn doorgehaald.*

Wordt het gebied weer uitgebreid, b.v. met Lobatchevski, dan gaan ze gauw weer nieuwe grondslagen zoeken, om het *nu* ten minste vast en binnen de grenzen te houden.

Daarom openen dingen als Peano en Veronese geen nieuwe banen, en zijn bovendien in gewissen Hinsicht *fout*.

Want de gestelde axioma's zijn het gevolg van het botsen tegen de niet doorgebroken *wanden*, die niet door het geweten, maar door *vastzitten* gesteld zijn.[3]

. . . .

Hoe meer gewetenlooze axioma's we zijn doorgegaan, van hoe minder *waarde* is de theorie.

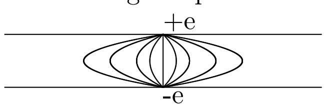
. . . .

Zooals de meetkunde oorspr. geldt voor een beperkt gebied; zoo ook elke theorie: kom je aan de grenzen, dan komen moeilijkheden, en moet je van nieuws af aan beginnen. Zoo moest uit het gewone begrip 'functie' wel de moderne functietheorie komen.⟧

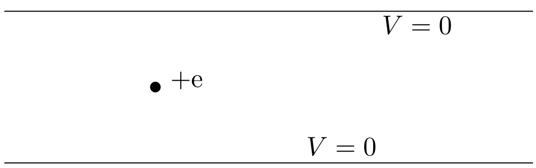
. . . .

II-3 [De potentiaaltheorie der elliptische ruimte van Schering is niet in orde,[4] omdat ze bij elke puntlading een even groote tegenlading in het tegenpunt onderstelt. En in de gewone ellipt. ruimte (zonder tegenpunten) zou dan in elk punt een lading=0 zijn.

We moeten dus nu uitgaan van stroomingen over een bol, die in 2 tegenpunten gelijke ladingen heeft. En wel kunnen we dan beginnen met een halve groote cirkel te verdeelen in **2n** gelijke deelen, en op de deelpunten beurtelings gelijke en tegengestelde ladingen te zetten; het boloppervlak wordt zoo verdeeld in meridiaansectoren; die elk een afgesloten gedeelte van de krachtlijnen bevatten; welk krachtveld is te krijgen door conforme afbeelding van een plat stroomveld in een oneindige reep.⟨2⟩



[En uit *déze* ladingsditributie is ten slotte elke willekeurige lading samen te stellen.] Dit nu is weer eenvoudig af te leiden uit het krachtveld:



⟨2⟩in een ⟦bijna⟧ oneindige reep.

Dat gemakkelijk is op te lossen, door een oneindige reeks van beelden te vormen.]

. . . .

De menschen, die voor hun pleizier planimetrie vraagstukjes maakten, zijn dichter bij het *ware* idee der wiskunde (aesthetisch, d.i. pleizier van otium in hoovaardij), dan de eerzuchtige werkers als Jahnke.[5]

. . . .

[Het op de vorige pagina opgeschrevene schijnt fout te zijn; de conforme afbeelding van een plat vlak op een bol geschiedt uit het poolpunt van dat platte vlak. (Op de vorige pagina was gerekend: uit het middelpunt). We beelden op die manier als 2 agenspunten +e en −e met kracht− en potentiaallijnen, die cirkels zijn, af: **II-4**

1^e 2 gelijke en tegengest. agenspunten in het platte vlak. (waar, zooals bekend, kracht- en potentiaallijnen cirkels zijn.)

2^e een enkel agenspunt in het platte vlak (d.i. feitelijk +e in het punt en −e in de lijn in 't oneindige; die lijn komt echter op den bol in het centrum van projectie terecht.)

. . . .

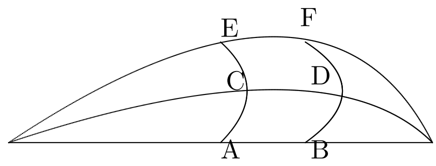
De opbouwing van nieuwe potentiaalvelden door conforme afbeelding gaat goed in 2 dimensies, maar niet in 3 dim. Want stel je hebt de pot. vlakken en krachtlijnen afgebeeld,⟨3⟩ en het lijnelement is voor een punt P met α vermenigvuldigd, dan zou je, om de potentialen over te brengen den vector met $\frac{1}{\alpha}$ moeten vermenigvuldigen, maar om dan de fluxeigenschap in de krachtbuis te handhaven, zou je ⟨den vector⟩ met $\frac{1}{\alpha^2}$ moeten vermenigv.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het zegt genoeg, dat wiskundige artikelen 'taai' zijn, niet meenemen in levende belangstelling.⟧ **II-5**

. . . .

⟨3⟩ Want stel ⟦ergens wordt⟧ je hebt de pot. vlakken en krachtlijnen afgebeeld,



[Heb je 2 stellen orthogon. krommen, dan heb je nog geen pot. veld, ⟨dat er in past.⟩ Immers de vector in A eenmaal bepaald, zou je nu uit de beide gegeven potentiaalniveau's ACE en BDF ook de vector in C en E bepaald hebben. Maar dan wegens de flux ook die in D en F. En het is de vraag, of *die* waarden voor D en F kloppen met die gevonden is uit de waarde voor B.

....

Is de potentiaal op de sfeer S_2 gevonden, kijk dan, of die niet uit de absol. kegelsnede van Cayley's maatbepaling[6] ware af te leiden geweest; en zie dán, of je op deze wijze het niet zou kunnen afleiden voor de hypersfeer S_3.]

....

(doorgehaald:) ⟦Ja, die mathematische logica. Ze is waardeloos, omdat ze het levende element aan de wiskunde ontneemt. (Terwijl de logica, die langs een
II-6 deel zich beweegt, alleen een hulpmiddel mag zijn ‖ – al is misschien ook dat weer uit den booze – om het intuitief, dat in geen begrip te vangen is, in 't rechte spoor te houden.)

Maar zelfs wat het logisch extract betreft, is het nog niet veel. Immers wij wenschen verband tusschen gecompliceerde logische agglomeraties, en worden juist door het samengesteld aanschouwde angeregt en het mathem. flair heeft dan de benoodigde logische combinaties in zich, om direct den weg te vinden.[7] ⟧

....

Zijn deze dingen niet scherp gezegd? Ze handelen *over* het begrip, zijn dus *in* het begrip niet scherp te zeggen.

....

De elliptische meetkunde is dáárom zoo mooi, omdat ze ons gelegenheid geeft, het oneindige mee te *begrijpen* in ons logisch systeem. En dat is in de Euclidische meetkunde alleen voor projectieve stellingen het geval. (*niet* in de potentiaaltheorie.)[8]

....

(Poincaré) 'Toen de krommen zonder raaklijn kwamen, heeft men het logisch systeem ⟨nog⟩ *niet* uitgebreid, om het weer eens te worden met de intuitie'.[9] ⟨Natuurlijk niet, want die krommen stimuleren niet zelf uit de natuur het systeem, maar zijn pathologische bijproducten van het voor andere dingen geconstrueerde systeem.⟩[⟨4⟩]

En heb je op de ruimte eenmaal het coörd. stelsel toegepast, dan kun je er allerlei krommen in teekenen, mèt of zonder zin voor de werkelijkheid, aan allerlei gekke wetten gehoorzamend.

Maar om de wèl zin hebbende ⟨volledig⟩ te kunnen arithmetiseeren moet je die arithmetiseeringsmethode completeeren met zijn consequenties, die allerlei gekke krommen en functies insluiten.

....

[Die functies zonder diff. quotient zullen er wel zijn, waarvan het d.q. oneindig snel verandert. Dan is er intusschen toch een gemiddeld diff. quot.][10]

....

Het voorbeeld (Poincar 'S. et H.', pag 42)[11] is niets bijzonders; alleen het **II-7**
nu en dan optreden van het actueel-oneindig kleine.

....

Bouw toch geen continu op ter grondvesting van de wiskunde. Het continu is *gegeven*. Om er mee te kunnen *rekenen* (die zondige wensch naar verstandhouding), pas je er op toe de rechte lijn ⟨dit alleen in project. meetk.,⟩ de maat ⟨niet bij elk continu,⟩ en maakt het zoo vatbaar voor arithmetiseering.[⟨5⟩ 12]

....

Als tegenpool tegen wiskunde bestaat alleen religie.

....

De bewustheid van 'oneindig', dat is 'altijd maar door' hebben we alleen ééndimensionaal. Alleen van die ééndim. oneidigheid kunnen we dus gebruikmaken om een meetk. systeem op te bouwen.[13]

....

De meetkunde is een reeds gevonden verstandhouding, gebracht onder het **II-8**
abstract begrip als bezegeling van, ⟨met nieuwe termen,⟩ de afgegrensdheid.

⟨4⟩ *n.b. De volgende alinea heeft Brouwer aangegeven als hier bij behorend, maar staat in schrift II vermeld op pag. 7 midden.*

⟨5⟩ pas je er op toe de rechte lijn ⟨dit alleen in project. meetk.,⟩ de maat ⟦daarop,⟧ en maakt het zoo vatbaar voor arithmetiseering

⟨Vroeger begreep men elkaar als men sprak van 'weg', nu eerst als van 'rechte lijn'.⟩[14]

. . . .

De meetkunde wordt aldus geordend uit de tweevoudige oneindigheid[15]: (die intusschen ook wel als enkelvoudig oneindig kon worden gezien, voor zoover ze is gearithmetiseerd, d.i. als puntcomplex gezien) er wordt ingevoerd het rechte lijn verband (door 2 punten bepaald), op willekeurige wijze ⟨hiermee is het systeen nog geheel willekeurig,⟩ *) en dan het *afstandsverband*, dat we altijd kiezen additief en minimaal langs de rechte lijnen. Kiezen we dat nu zóó, dat het in alle vlakken om eenz. rechte lijn analoog is ⟨en in elk pl. vlak symm t.o.v. de rechte lijn,⟩ (homogeniteit der ruimte), dan is de beweging van vaste lichamen mogelijk.⟨6⟩ We kunnen ook eerst achteraf de rechte lijnen invoeren⟨7⟩ na den afstand en de rechte lijnen definieeren als geodetische lijnen. (Zie hiervoor de stelling van Lie[16]. Het is dan maar de vraag of we krijgen een homogene en isotrope ruimte.)

*) *(kantlijn:)* ⟨maar ⟨voor 3 dim.⟩ zóó, dat de lijnen zijn te vereenigen tot platte vlakken (hiermee is nog niets bijzonders gezegd). Maar wél is het nu iets bijzonders, dat niet alleen 3 punten één vlak en 2 punten één lijn bepalen, maar ook, dat twee lijnen maar één punt, en twee vlakken maar één rechte lijn gemeen hebben (voor b.v. een ⟨lin.⟩ stel oppervl. met 3 paren: in 't alg. zullen de snijkrommen op één opp. elkaar in *meer* punten snijden). Daaraan is dan weer te ontkomen, door al die punten één punt te noemen; maar dán hebben we nu weer de gewone projectieve meetkunde⟩ ,

. . . .

II-9 Waarom zou men later niet meer verschijnselen kunnen omvatten, door aan te nemen een kromme ruimte, en waar geen lichaam zonder deformatie verplaatst kan worden; dat dan de waargenomen krachten b.v. niets zijn, dan een zich verzetten tegen de gedwongen deformatie, die op een bepaalde plaats wordt ondervonden.[17]

. . . .

Zooals de wereld als geheel zijn Calvinistische godsdienst noodig heeft als correctie; zoo heeft het ook elk afgegrensd vak, als de wiskunde, noodig.

. . . .

Men heeft ook altijd neiging, te zeggen, dat de zaken erg *knap* moeten zijn, d.w.z. getuigen van veel speciaalstudie; men bedenke, dat al het speciale toch

---

⟨6⟩ dan is de beweging van vast lichamen mogelijk. ⟦Het theorema ...⟧

⟨7⟩ ⟦Het theorema⟧ We kunnen ook eerst achteraf de rechte lijnen invoeren alleen weer zin heeft, naarmate het trapsgewijs telkens op iets meer centraals wordt betrokken. ⟨En daar uit zichzelf het gepartieerde nooit naar het centrale voert, kan men niet anders dan buiten de wetenschap tot zichzelf inkeeren en dan met volle bewustheid naar de wetenschap terugkeeren.⟩

Iets *wiskundig* uitspreken, is: het van zijn waarheid ontdoen.

....

(Poincaré[18] pag 71 ⟨boven⟩) Dit is niet juist, dan voorzoover wij voelen (niet experim. physisch constateeren) ⟨van de ∞ veel dimensies⟩ der aanschouwing er *drie* samen te vatten tot een ruimte.

Verder niet, *omdat we niet verder dan drie kunnen tellen.*

....

Overigens is het maar een kwestie van standpunt, of je dit werk 'gemakkelijk' **II-10**
noemt. Het is gemakkelijk om losjesweg te lezen, alleen, omdat geen voorstudie noodig is; maar *is* de voorstudie er wél, dan is het moeilijker *dit* met conscientie te schrijven, dan gewone wiskunde.[19]

....

Men kan met middeltjes kwaad voorkomen en bestrijden; maar het evangelie spreekt van 'dulden'. Daarom is ook de wiskunde veroordeeld.

....

Trouwens, je hoeft zulke types als Schuh[20] maar aan te kijken, om het pathologische van de wiskunde maar in te zien.

....

Wat te denken van het *verklaren* van verschijnselen, zooals Korteweg's verklaring van het verschijnsel van Huygens[21] . Och vooreerst zijn ál die verschijnselen dingen, door onze willekeur, die zijn eigen mathematische wetten tracht te veruiterlijken, zijn ingesteld; evenwel is die mathematische willekeur altijd voor een deel ondoordacht. Nu kan de verklaring:

1^e betrekking hebben op spontaan direct mathematisch aan te ziene verschijnsels, dan is ze niets als een reiniging van het zelfgestelde van ondoordachtheid. Hiertoe hoort ook het meetrillen in het verschijnsel van Huygens.‖

2^e Het verschijnsel zelf onmogelijk meer in doordachtheid te zien zijn – als **II-11**
de lichtverschijnselen –; hier is de verklaring een zoogenaamde hypotheseverfieering.

Dergelijke verklaringen kunnen niet het *wezen* der verschijnselen raken, en zijn uit den booze.

(kantlijn:) ⟨Ofschoon toch ook die kinetische evenwichten van kleine deeltjes door een zuiver physicus als even direct worden gezien, als wij de veerkracht

van een vast lichaam zien; het is dus geen scherpe grens. Het echte 2^e zou zijn te veroordeelen.⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het 'grondslagen zoeken' van Dedekind en Veronese neemt geen ondoordachtheid weg, want houdt zich niet op met zelfgesteldheden, maar met intuitie, die ze op die manier centralizeert.[22]

. . . .

Maar de reiniging van ondoordachtheden in ook de oorspr. meetkunde en algebra, die zoo door logica de trage intuitie helpt, d.w.z. vooruitleidt, maar voor afdwalingen behoedt.⟧

. . . .

Om over dingen te spreken – ze te ontleden – die je verfoeit, valt zwaar; want het onbedorven instinct wil zich afkeeren *zonder* verdere notitie.

. . . .

['De officiele staatswetenschappen hebben uit den aard der zaak een behoudend karakter'.

'Wiens brood men eet, diens woord men spreekt' [Barth. Mer. p.226][23]

. . . .

Wiskunde doet een Germaan niet uit zichzelf, maar uit gedwongen-zijn-tot meegaan met de knoeiers en joden, die het in de wereld hebben gebracht.

. . . .

II-12 Het is toch niet heelemaal waar, dat ⟨het leven in⟩ de 3 afm. alleen in verstandhouding ontstaan.[⟨8⟩] De verstandhouding maakte de wereld rijp, om in de partieering der 3 afm. te worden aangevallen door de joden, en zoo te worden gedwongen, óók in 3 afmetingen te gaan leven.

[En van onszelf – vrije Germanen – hebben de 3 afm. alleen zin als lichtzinnigheid. ⟨leven *in het oog*, in geen ander gevoel, droomend naar de telkracht in de hersenen⟩ .][24]

. . . .

Onderscheid in de dissertatie de ware wijsheid, die de dwaasheid retireert; en de practische wijsheid, die handig een doel nastreeft.[25]

. . . .

[⟨8⟩] *n.b. door de latere toevoeging van* 'het leven in' *moet dit zijn:* 'ontstaat'.

⟨[Inl. Een overzicht van de nieuwste vertooningen op wiskundig gebied die aanleiding geven tot zoeken naar de phil. grondslagen er van.⟩[26]

1 Grondslagen der wiskunde bij wiskundigen.

2. idem bij wijsgeeren.

3. Wiskunde in den Bijbel en volgens de waarheid, en in de kunst.

4. Wiskunde in de cultuur; handelswaarde.

5. Wiskunde in den ontwikkelingsgang van het individu naar vrijheid.]

....

(Poincaré pag 72) La troisième dimension vient du phénomène, que si deux sensations de convergence A et B sont indiscernables, les deux sensations d'accomodations A' et B' qui les accompagneront respectivement seront également indiscernables.[27]

(kantlijn:) ⟨Niet waar, de 3 afm. zijn er slechts, voorzoover wij de natuur bestrijden, en daarbij bekijken we de beweging van rigida met onze zintuigen, maar aan die zintuigen denken we niet; die mogen we niet waarnemen, en kunnen we ook niet waarnemen. Achteraf kunnen we wel kijken, dat het klopt, maar het is niet waar vooraf; wij voelen alleen de dimensielooze 'wisseling' in ons lichaam, maar de buitenwereld bekijken wij met dimensies.⟩

....

Sommige volken kunnen tellen tot drie, wij tot 3 dimensies.[⟨9⟩]

....

[Tracht te vinden een niet in een verschil te ontbinden projectieve uitdrukking, die voor de parabolische maatbepaling zich reduceert tot $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$.[28] **II-13**

Zoo is dan de potentiaal voor een elliptische ruimte ook af te leiden.]

....

(doorgehaald:) ⟦Ook allerlei wiskundige kunstjes als conforme afbeelding, hebben vaak meer van jodenlisten dan zuiver inzicht.⟧

....

[En nóg iets, wat is te probeeren, is het volgende:

Er is een potentiaalformule voor de stroom van punt P_1 naar zijn poollijn p_1. En evenzoo voor van P_2 naar p_2.

Degenereert nu misschien het somveld in een van P_1 naar P_2 en een van p_1 naar p_2?

[M.a.w. zijn de termen van het somveld niet geschikt in twee groepen te splitsen; de een waarvan is een stroom van P_1 naar P_2 zonder verdere divergentie?]

[⟨9⟩] Sommige volken kunnen tellen tot drie, wij tot 3 dimensies, ⟦zooals we kunnen komen via 't verstand tot de eenheid van tegendeelen.⟧

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Zooals overal, voert ook in de wiskunde het zoeken der grondslagen tot niets dan het ontdekken der grondeloosheid.⟧

. . . .

II-14 [Kritiek heeft altijd veel voor boven zelf scheppen, omdat de schepper nooit onbevangen kan zijn.][29]

. . . .

(Poincaré pag 108 laatste alinea)[30] Neen, wij zien dat geheel als van 3 dimensies, omdat wij tevoren al in 3 dimensies dachten. Dáárom zien wij het geheel van plaatspunten voor de pink al in 3 dimensies. Want wat physiek in 3 dim. is te zien, is het ook in twee en in een, denk maar aan een kluwen die ontward wordt.⟨10⟩

. . . .

Verklaren kan nooit; alleen in hereeniging inzien als vanzelfsprekend. Maar zooiets is *nooit* wiskundig uit te drukken.[31]

. . . .

Met het joodsche *zien* van 3 dimensies gaan wij tevens allerlei beperkingen, dat is wetten, waartegen wij onmachtig zijn, opmerken, die doorbreken, zoodra wij *streven* in beperking, b.v. in 3 dimensies.

. . . .

R_3 moet niet worden opgebouwd – dat is geen hereeniging –; want primair is R_∞. We hebben gepartieerd tot een *ruimte*; en daarin heeft zich ⟨een groep van drie⟩ geassocieerd tot een tweede natuur;⟨11⟩ maar die groep van drie is een ⟨van⟩ getallen-meetassociaties.

. . . .

II-15 [Vertrouwen kun je zulke heeren als Poincaré *nooit*; dán hadden ze geen boeken geschreven.]

. . . .

Kan herinnering ons leren, dat de ruimte homogeen is? Wij *willen*, dat onze herinnering ons dat sprookje voorhoudt. Want wat is er objectief aan

---

⟨10⟩Want wat physiek in 3 dim. is te zien, is het ook in twee en in een, ⟦neem het voorbeeld van de puntketen, in één en in 2 dim. te zien,⟧ denk maar aan een kluwen die ontward wordt.

⟨11⟩en ⟦een groep van drie⟧ daarin heeft zich ⟦weer⟧ geassocieerd tot een tweede natuur;

herinnering? Het is geplaatst in een zelf gewild raam van constantheid⟨12⟩ als tegendeel van de wisseling der tijden, die in duivels dienst wordt opgemerkt.[32]

. . . .

Want twee spierbewegingen *zijn* nooit gelijk; wij *voelen* ze als gelijk, eerst *omdat* wij ze bekijken ⟨in ons wisk. systeem der aanschouwingswereld. Wij hebben geen *herinnering* van onszelf, maar alleen van de actie der buitenwereld op ons.⟩[33]

. . . .

Bij het zoeken van de grondslagen der wiskunde blijkt ook haar bestaan als zelfstandige wetenschap te vervloeien.[34]

. . . .

Zooals het radium gaten vreet in het cader van de ⟨constante⟩ *materie* als omheining van de physica,⟨13⟩ (die men intusschen er toch wel weer in zou brengen, ⟨dán neemt men maar de ether, die beweegbare materie,⟩ want men wil haar behouden; want tot nog toe zei men: 'het licht heeft geen materie', omdat een lichtgevend deeltje niet in gewicht afnam); *) zoo kunnen ook wel bressen worden geschoten in de Euclidische meetkunde; tòch zal men trachten die bressen te stoppen; ⟨omdat er zoo makkelijk mee valt te rekenen.⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨en het werken met een constante materie geeft zoo'n groot gemak⟩

. . . .

Het is willekeur om de ruimte te stellen.[35] Het is willekeur om daarin het **II-16**
afstands- en rechtelijnverband te stellen,⟨14⟩ dat een Euclidische groep representeert[36]. Ik kan die verbanden nog heel anders – en toch ook Euclidisch stellen – maar zal dan waarschijnlijk voor 'afstand' en 'rechte lijn' andere woorden gebruiken.

Maak ik de afstandsrelaties nóg anders, dan kan ik ze ook niet-Euclidisch of zelfs heel onregelmatig maken.

En wij *stellen* nu de mogelijke beweging van vaste lichamen als norm voor onze experimenten. Voor zoover ze daarvan afwijken, schrijven we dat op rekening van 'afwijkingen'.[37]

Daarom is de geometrie eigenlijk een physische *werk*hypothese, waarin *vele* experimenten, b.v. van meten met een lijnhout goed gaan.

⟨12⟩ Het is ⟦vanzelf als⟧ geplaatst in een zelf gewild raam van constantheid

⟨13⟩ Zooals het radium gaten vreet in het cader van de ⟨constante⟩ *materie* als ⟦grondslag⟧ omheining van de physica,

⟨14⟩ Het is willekeur om daarin het afstands- en ⟦richtingsverband⟧ rechtelijnverband te stellen,

(doorgehaald:) ⟦Wel te verstaan hebben we het begrip lijnhout, die jodepartieering, vooraf en maken met behulp daarvan het 'afstands- en rechtelijnverband'.
Experim. opm. Als twee lijnhouten hier gelijk zijn, dan ook ergens anders, enz. tot de experim. opmerking der mogelijke beweging van vaste lichamen en de Euclidische meetkunde.⟧

II-17 Maar die geldt alleen voor onze eigen scheppingen (die omgekeerd weer alleen het gevolg zijn van prae-existente *wil* tot Eucl. meetk.) in een beperkt geheel van stoelen en tafels ⟨en lijnhouten⟩ – niet boomen – om ons heen.

. . . .

(na een onleesbare doorhaling:) [Maar de hokuspokus waan van een uitw. ruimte (waarmee de stomme mathematici alles verklaren, als ook de medici de verschijnselen in hún vak alle verklaren) laat zien, dat de vaste lichamen – die de mensch echter eerst moet *maken* uit de natuur, omdat hij de natuur in dat gareel wil wringen – door verplaatsing tusschen al hun punten evenveel ⟨minimaal afstanden*(?)* van de rigide groep⟩⟨15⟩ houden – voor een beperkt gebied van R_3.][38]

. . . .

Hereeniging in het hoofd op zichzelf gaat tóch niet, want de hoofdverstopping komt van zonden niet van 't hoofd maar van 't lijf.

. . . .

Daar de wereld oneindig veel facetten heeft spreekt het van zelf,⟨16⟩ dat ⟨het maar⟩ een dier facetten ⟨onzer veruiterlijking is, die⟩ past in onze Euclidische meetkunde, die de hoovaardige veruiterlijking (in plaats van stilte binnen) is van de menschelijkheid tegen de natuur, ten verderve.[39]

. . . .

Zoo gauw men volkshoogescholen gaat invoeren, zal de wetenschap gauw ontmaskerd zijn, en niet *meer* in eere, dan lezen of schrijven of timmeren.

. . . .

II-18 [Nemen wij de beweging van vaste lichamen experimenteel waar? Och, ten eerst doen we al dat experimenteeren niet in het ware leven, maar in een dwaze zucht tot veruiterlijking van onszelf of nog eerder onder de vreessuggestie van meedoen met wat de cultuurwereld je heeft verteld.

Maar dan is genoemd experiment ⟨gegrond⟩ op een herinneren van vroeger hetzelfde (n.l. op een ribbe van een kubus 4 maal een cm afgepast), maar dat

---

⟨15⟩ *deze moeilijk leesbare verbetering staat in de plaats van een onleesbaar gemaakte doorhaling*

⟨16⟩ Daar de wereld oneindig veel facetten heeft ⟦is het geen won..⟧ spreekt het van zelf, is toch niets als onze wil om hetzelfde te vinden – en doen we dát anders, dan door een dwang van vrees en meedoen gebukt met de booze wereld?– en dat hetzelfde vinden is het complement ⟨en tegendeel⟩ van de wil tot zien van een verandering, die we noemen verplaatsing.]

⟨Die corrigeerende lichaamsbewegingen van Poincaré komen geheel achteraan, in de laatste plaats, achteraf bijgevonden. De *aprioriteit* van de ruimte blijft gehandhaafd.⟩[40]

. . . .

[Ten slotte blijft de eenige richting, je los te maken van de suggestie van de wereld om je heen, volgens de vorige lezing.]

. . . .

Als wisk. ontw. nog wérkelijke ontw. (volgens talentwil en niet door dwangsuggestie) was, zou je het niet direct ⟨weer⟩ vergeten.

. . . .

Poincaré aan het slot van zijn onderzoek naar de grondslagen der mechanica: **II-19**
'Les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs'[41]

. . . .

De natuur beweegt zich niet volgens de wetenschappelijke wetten, maar de menschen vervormen de natuur volgens hún wetenschappelijke wetten (⟨in⟩ experiment en techniek), waarvan oorspronkelijk in de natuur zeer weinig zat; maar dat weinige wordt door de wetenschap snel opgemerkt.

. . . .

Gronden der mechanica? Het instrument heeft zich langzamerhand vervolkomend, juist zooals het rijwiel. ⟨De methode is op den duur proefhoudend gebleken, maar haar nu logisch af te leiden, heeft niet veel zin, en is vrij ondoenlijk. Het heeft een voorgeschiedenis, juist als Faraday's researches.⟩

. . . .

De waarde der wiskundige ⟨studie⟩ is groot, in zooverre ze kan leren ⟨bekijken, dus⟩ losmaken van vaste menschelijkheden, die men op de natuur ⟨al steeds onbewust⟩ wil toepassen, en die oude erfzonden een voor een als huidjes doet afvallen. Maar *niet* in het leeren rekenen is ze goed voor het individu, *dan* alleen voor de samenleving als handelsartikel.

. . . .

Kracht (te onderscheiden in statische en kinetische d.i. hypothetische) en massa zijn geschikte verstarringen om sommige verschijnselen samen te vatten.[42]

. . . .

II-20 Datgene wat over de grondslagen redeneert, is toch immers niets als de in boeien strevende menschelijkheid, en die boeien zijn de levende cathegorieën, die werken tot steeds verdere centralizeering van zichzelf, ⟨wat echter een afdwaling is; het mag de natuur (het ándere), niet zichzelf centralizeeren,⟩ ten gevolge van vastheidszoeking.

. . . .

(Russell, inleiding! pag. 1[43])) ‘This discussion of indefinables is the endeavour to see clearly, and to make others see clearly, the entities concerned, in order that the mind may have that aquaintance with them, which it has with redness’.[44]

. . . .

Een voorbeeld als Poincaré geeft van de niet-Euclidische wereld, heeft dezen zin:[45]

Wil je in die dwaze wiskundige wereld met kennis van zaken ingaan, dan zal ik je volgen en je op je weg je contradicties aanwijzen.

Maar zuiverder is het: de fouten aan te wijzen buiten de zonden.

Zooals Christus beter predikte zonder, dan *met* wonderen.

. . . .

II-21 Zich niet te druk maken over de ‘grondslagen’, en maar wiskunde gaan doen; staat gelijk met:
zich niet te druk maken over ekonomie en ekonomische moraal, en maar gaan handel drijven en geld verdienen en carrière maken.

En in beide kun je heel knap zijn en toch een nul.

. . . .

Het verschil tussen mechanica en geometrie is hoofdzakelijk, dat het systeem van de laatste wat meer ⟨als algemeen geldig en door ieder ingestemd geactiveerd gebouw,⟩ gecentralizeerd is, dan van de eerste; maar zoo verstard, dat het weer als ⟨aprioristisch⟩ wordt gezien;⟨17⟩ de foute (n.l. van de empirie) aprioriteit van Kant.[46]

. . . .

Ik kan achteraf wel definities geven van 3 afmetingen, om de verstandhouding samen te houden, maar tevoren *had* ik het al in me, en die definitie is als *inzicht* waardeloos.[47]

En dat ik merk, dat ik ∞^3 plaatsen met mijn pink kan innemen, is geen grondleggend experimenteel feit; maar dat ik dat zóó kan zeggen, is een as-

⟨17⟩dat het weer als ⟦primair⟧ wordt gezien;

sociatiegevolg van de ruimte, die er al was, als spreekwijze, die komt uit de bewustwording (d.i. buiten zich in rustige vastheid stellen) van de vastigheden der Eucl. ruimte.[⟨18⟩]

. . . .

Dat onderzoek naar cycloze[48] als opening van een nieuwe tak van weten- **II-22**
schap, nadat eerst de wiskunde er was, is niets als openen van een nieuwe onanistische prikkelbaarheid.

Het wennen aan zoo'n prikkelbaarheid kan natuurlijk later jodendoelnajagging gemakkelijker maken; zoo kan men aan zijn paardrijkunst veel hebben in den oorlog.

. . . .

(rest van de pagina is doorgehaald:)

⟦Zoolang men bij getal, rechte lijn enz. de directe aanschouwingsvoorstelling had, die die woorden completeerde, ging alles goed. Maar toen men ze in abstracto ging behandelen ter vorming van een levenloos centraal systeem, ging het 'verworden', zooals een dier, dat uit zijn woud op stal wordt geplaatst, er kwamen woekeringen ⟨waarbij de verstandhouding verloren gaat,⟩ die door de frissche woudlucht niet konden opkomen, nú naar buiten; zoo quotienten als $\frac{1}{0}$, oneindigheid, imaginariteit; nu gaat men veel eenvoudiger d.i. dooder (d.i. menschelijker) grondbegrippen als uitgang nemen, zóó, dat bij alles in het systeem de verstandhouding behouden blijft.[49]

(Of daarmee de verstandhouding niet veel beperkter en eenzijdiger wordt t.o.v. het leven, is een andere vraag; lees Veronese. en Dedekind[50] Door die uitbreiding verschijnt het oud n.l. zijn dood beeld in een nieuw licht; en wordt het rekenen waardeloos gemakkelijk.⟧

⟨[⟨19⟩] Met groote ijver zoekt men het systeem te vervolkomenen op *alle* **II-23**
voorkomende gevallen, en breidt het zoo meteen uit zóó, dat dat tevens allerlei behoeften kan voldoen, waaraan men te voren nog niet dacht; maar nu het nieuwe middeltje er is, gaat men het wel gebruiken ook.⟩[51]

. . . .

Je moet niet over de *gronden* van de doktersstand spreken; op het redeloos mysterie daarvan berust de waardeering van hun waardeloos talent.

En zoo ook staat het wiskundig talent naakt in zijn schande daar, als de gronden der wiskunde worden aufgedeckt.

. . . .

⟨18⟩ van de vastigheden der Eucl. ruimte ⟦die zelf gewild zijn.⟧

⟨19⟩ *Deze eerste alinea van pag. 23 (niet doorgehaald) staat in de kantlijn en sluit aan op laatste doorgehaalde van de vorige pagina.*

Van het *aesthetische* van de wiskunde blijft niets over, dan de prikkeling van verwonderd aankijken van eigen ondoordachtheid en zelfgesteldheid.

. . . .

En de *practische* waarde er van is: rekenen, d.i. instinctlooze joodsche onedele handhaving van zichzelf door gluipstreken.

En verder samenhouden van het maatschappelijk verband, want alle ekonomie en regeling en discipline is wiskunde.

Rekenen doe je voor jezelf steeds, maar rekenen voor anderen heeft ook marktwaarde (boekhouden en administratie); en evenzoo *onderwijs* in boekhouden en administratie.

Zoo kun je timmeren voor jezelf en timmeren voor anderen en timmeren onderwijzen.

. . . .

Moreele plicht: reken nooit voor jezelf, maar houd je aan 't maatsch. verband en reken mee met een traan in 't oog; desnoods verdien er ook je brood mee.⟨20⟩

. . . .

II-24 Zeg niet, dat ik hier niets doe, dan eenzijdig beweren, wat men doet in de wiskundige wereld;

de wiskunde op haar beurt doet niets, dan beschrijven wat men doet in de meet- en schacher wereld.

. . . .

Niemand in deze wereld heeft wat *te doen*; 't is alles vunze begeerte en afleidingsbezigheid, die het centrum niet raakt.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het principe der wiskunde bezint op de *veralgemeening* – vrijheid om door te gaan – een vrijheid als alle moeitevol verworven vrijheid, des duivels – en die vrijheid tot veralgemeening is, wat men het oneindige noemt; maar om er mee te werken,⟨21⟩ met dat oneindige, moet men het toch weer als bepaaldheid invoeren; waar men dat b.v. in de anal. meetk. doet, doet men eigenlijk *afstand* van zijn recht tot veralgemeening, en houdt zich weer op met een bepaalde beperking. Zoo gauw men spreekt van 'de lijn in 't oneindige', heeft men geen oneindig meer.⟨22⟩[52]

⟨20⟩reken mee met een traan in 't oog; ⟦geef⟧ desnoods verdien er ook je brood mee

⟨21⟩*(eerdere doorhaling in deze doorhaling:)* wat men het oneindige noemt; maar ⟦het element ...⟧

⟨22⟩*(eerdere doorhaling in de doorhaling:)* ⟦erkent⟧ men geen oneindig meer.

. . . .

En in zooverre heeft Dedekind gelijk met: ‘Es giebt unendliche Systeme’.[53]⟧ **II-25**

. . . .

[Maar ook juist daarom is dáárin al voorondersteld de stelling der volledige inductie, en die behoeft hij dus niet meer expres te bewijzen.][54]

. . . .

Het otium leidt niet tot wijsbegeerte, maar tot religie; ⟨d.i. niet tot *strijd tegen* de wereld in wiskundig bekijken tot eigen ‘richting’, maar tot *ontvluchten.*⟩

. . . .

De continuiteit van de lijn was totnogtoe het onbekende, waarover geen gemis aan verstandhouding mogelijk was.[⟨23⟩][55]

. . . .

De opvolging bij de ontwikkeling der wiskunde is: ondoordachtheid; *) ⟨zoo door logica tot absurditeit; terugvoering op intuitie, waarna zoo nieuwe beperkingen als eigenschappen blijken,⟩[⟨24⟩] nieuwe onderzoekingen.

*) *(kantl.:)* ⟨d.i. dwaas toegepaste wiskundige bekijking van de wiskunde,⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Overigens,[56] die uitspraak opvatten niet als een zelfbekijking – want *die* heeft alleen zin als inkeerende genezing van de wereld; niet echter, om als deel van de wereld daarin te worden gezet – maar als een gesteldheid in het centralizeerend systeem. Het komt hierop neer dat ik kan zeggen: ‘Ik kan, levende in mijn volledige inductie, zoo’n ∞-systeem opbouwen; dat zich wat de toepaspraktijk betreft, in het eindige dekt met het toegepaste. *(reeds eerder doorgehaald:)* ⟦Aan het ∞ heb ik echter bij de toepassing niets, of ik moet het eerst toch weer tot iets anders en bepaalds herleiden⟧ ⟧

. . . .

[Dedekind bouwt het continu op, en ook ik, met mijn mengmethode; in beide gevallen ga je toch van intuitie uit][57]

. . . .

[⟨23⟩] De continuiteit van de lijn was totnogtoe het onbekende, ⟦de vuilnisbak, waar⟧ waarover geen gemis aan verstandhouding mogelijk was.

[⟨24⟩] *deze laatste verbetering staat in de plaats van een onleesbaar gemaakte doorhaling.*

Poincaré poogt ten slotte toch alleen te 'beschrijven', niet moreel in te zien; trouwens dat kan niet in 't intellect.[58]

. . . .

II-26 *(doorgehaald:)* ⟦Tot de grondslagen van Lie toe: het zijn alles tautologieën van den scheppenden geest. Een zelfopgebouwd geheel wordt op twee wijzen in zijn bouw getoond, van twee eenzijdige kanten bekeken.

. . . .

Logische wetten? Och, dat wil niets zeggen, dan dat, áls je eenmaal met je hersenen langs zoo'n kanaal loopt, het er zóó doorgaat; maar je moet niet in zoo'n kanaal gaan.⟧

. . . .

[*(kantlijn:)* ⟨Eenzijdigheid=wil tot constantheid⟩

Constantheid en wetten zie ik pas, als ik zelf mij in die wetwereld opsluit, dan ontspint zich vastigheid; maar in het centrum is geen vastheid, maar een eeuwige herinneringlooze wisseling.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Wetten in abstracto staan nooit vast, want er wordt altijd bij aan een *bepaalde* aanschouwing gedacht. Daarbuiten vervallen ze.

B.v.

1. In een keerpunt is de kromming ∞. En dan een bijz. keerpunt met kr. 0?

2. Als $A = B$ en $B = C$, is $A = C$. Maar: Luthersch = kettersch en kettersch = paganistisch, en toch niet Luthersch = paganistisch?

3. Som der $\angle\angle$ v. een $\triangle = 2\pi$. En dan tusschen 2 lijnen en de lijn in 't ∞?

4. Ik kan niet van binnen naar buiten een kromme komen, zonder de kromme te snijden. En dan langs een complexe weg? ⟧

. . . .

II-27 Wetenschap is wil tot berekening, geven van waarden van alles, en afgeleiden van die waarden volgens wetten, die komen uit eenzijdigheid. De wereld vloeit; houdt men nu een deel vast, dan verwijdert men zich des te meer van de rest.

Gaat men nu hypothesen ⟨in physica⟩ invoeren voor de berekening, dan raakt men nog verder van de wijs; offert nóg grooter deel op.[59]

De wiskunde is bij dat alles het instrument, die alle eenzijdigheden der vastheden gretig opslokt, maar op het volle geen vat heeft.

(doorgehaald:) ⟦Ze *moet* daarbij wel versubtilireeren,⟨25⟩ en voor ze daartoe

⟨25⟩Ze *moet* daarbij wel ⟦veralgemeenen⟧

overgaat (splitsing van lichttrillingen; invoeren van complexe grootheden), ziet ze dan zichzelf als een reeks van operaties, maar dat zich-zelf-zien heeft weer geen andere waarde dan ook als instrument in nieuwe partieering.⟧

. . . .

Maar ten slotte is dat heele ⟨gereken⟩ alleen goed,⟨26⟩ om elkaar gemeen een hak te zetten, tot verderf van het geheel.

. . . .

Men kan de wereld zien van de kant van liefde, van ekonomie, van physica, en van het weer;⟨27⟩ ⟨het is alles een wiskundige bekijking.⟩

. . . .

In de onbewuste continuiteit der r. lijn – nog niet door mathem. logica weggenomen – lag nog niet van het oude onbewuste: $\pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\epsilon\iota$.

. . . .

De universiteit met haar aula: het is de valsche buiging van een der vakken, die van het kapitaal vreten moeten, dus optimistisch daarvoor zichzelf in een speciaal vak vernederen, en dan dat vak en de kapitaalwereld optimistisch verheerlijken, en zagen over 'tijdsprobleem' en geschiedenis der philosophie' en alles wat het kapitaal versiert en er van leeft, en het nooit mag aantasten. **II-28**

. . . .

Men zegt dat op dien weg – gericht van wiskunde naar wijsbegeerte *) – geen omkeeren is.

*) *(kantl.:)* ⟨d.i. van verleeren⟩

. . . .

(Russell pag. 121[60]) 'all finite numbers?' Ik kan niet spreken van 'all', want ik kan ze niet omvatten.

(kantlijn:) ⟨wel waar; n.l. door inductie⟩[61]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Men kan op allerlei manieren de verstandhouding samenhouden: Dedekind doet het heel anders als Russell.⟧ [62]

⟨26⟩ Maar ten slotte is dat heele ⟦gereken⟧ ⟨gereken⟩ alleen goed,

⟨27⟩ Men kan de wereld zien van de kant van liefde, van ekonomie, van ⟦wiskunde,⟧ en van het weer;

. . . .

[Het is anders een toer, om op dat vuile en stomme gedraai van die heeren wiskundigen in te gaan.]

. . . .

Het is de vraag of de volledige inductie niet het $\pi\rho\omega\tau o\nu\ \psi\varepsilon\upsilon\delta o\varsigma$ der wiskunde is,[63]⟨28⟩

. . . .

II-29 Dat wat belet philosophische waarheden in te zien, is de zucht tot hebben en afzondering, is moreele minderwaardigheid.

. . . .

[De transfinite getallen moeten aanschouwelijk intuitief opgebouwd worden; redeneer er dan achteraf, maar logisch over: maar ze *zijn* iets anders dan een logisch systeem.][64]

. . . .

⟨Het geloof in een objectief bestaande (d.i. waarvoor je bang moet zijn)⟩ ruimte is tegelijk de straf voor de begeerte, en die begeerte zelf.

. . . .

(rest van de pagina is doorgehaald:) ⟦Toegepast kunnen de transfin. getallen niet, hier wel in de meetkunde, om te bewijzen, dat lijnen door één punt gaan of zoo.

. . . .

Ook transfinite getallen 'bouw ik op' als aanschouwing en ook die kunnen zich dekken met combinaties, die ik noodig heb in het zeggen van mijn tautologieën, kunnen dus dienstig zijn als methode.[65]

[De logica wordt ook hier gehaald *uit* de aanschouwing, al kan ik achteraf wel net doen of ik alleen het logische systeem had. Och, ik kon uit deze aanschouwing nog wel meer systemen halen, maar dat was hetgeen ik noodig had.] ⟧

. . . .

II-30 Die logische opbouw is alleen noodig, om te voorkomen, dat eventueele verschillende aanschouwing bij twee personen schade zou doen aan de verstandhouding.

⟨28⟩ Het is de vraag of de volledige inductie niet het $\pi\rho\omega\tau o\nu\ \psi\varepsilon\upsilon\delta o\varsigma$ der wiskunde is, ⟦waardoor ook de grondslagen van Cantor geen andere zin hebben dan als verergering van het kwaad.⟧

(kantlijn:) ⟨Zoo waren in de oude ondoordachte Eucl. meetkunde axioma's noodig.[66]

En dát komt omdat de verstandhoudende personen vaak niet het *heele* systeem zelf hebben nagebouwd, maar alleen enkele deelen, welke deelen door vage indrukken worden saamengehouden; die dienen dan wel gepreciseerd door axioma's.⟩

. . . .

Intusschen zijn de elementen van het ⟨logistisch⟩ systeem zelf weer ⟨wiskundige abstracties⟩ uit het 'leven',[⟨29⟩] ⟨en hierin gelijkwaardig met het wisk. systeem,⟩ die de menschen nu als oorspronkelijke ommuurdheden willekeurig ⟨willen⟩ stellen.[67]

. . . .

(Russell) '*Rest* is a loose and ambiguous expression': ja, voor het altijd bewegelijke jodengesjacher heeft het weinig zin, omdat het geen pos. beteekenis in het sjachersysteem heeft.[68]

(kantlijn:) ⟨Het is de afzweering van de tweeheid constantheid/wisseling.⟩

. . . .

Het is de vraag of Dedekind's 'meer dan enkelvoudige inductie', die het *alles* samenvat in zijn : 'es giebt unendliche Systeme' niet buiten de menschelijkheid valt.[69]

. . . .

[Russell p.268 1*ste* al. slot.][70]

. . . .

Wij kunnen niet beter bidden of wenschen, dan nog eens al onze wiskunde te mogen vergeten.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Alles van de transfinite getallen moet ik kunnen zien aanschouwelijk (direct of met behulp der enkelvoudigen inductie). Van andere dingen te spreken, die ik niet *kan* aanschouwen ware zinloos.⟧ [71]

. . . .

(noot bovenaan blz.:) ⟨Als Lob.[⟨30⟩] had ingezien, dat als het eenige Exis- **II-31**

[⟨29⟩] Intusschen zijn de elementen van het ⟦centrlizeerend⟧ systeem zelf weer ⟦resultaten⟧ uit het 'leven' tenzbeweis der Eucl. meetkunde was te beschouwen de anal. meetk., had hij nooit zijn stout axiomatisch systeem als iets essentieels opgebouwd.⟩

Zoo was de theorie van Beltrami noodig, om van de geometrie van Lobatchevski te toonen, dat ze niet zinneloos was. Vreemd was dat resultaat overigens niet, want de Euclidische theorie is niet de Euclidische meetkunde, maar kan daarop worden toegepast.

. . . .

⟨En ook zal men bijna⟩ *nooit* *) kunnen weten of de indefinables ⟨en hun axioma's⟩ onafhankelijk zijn,⟨31⟩ ⟨anders⟩ dan uit getoonde gebouwen.[72]

*) *(kantl.:)*⟨een enkele maal, cf Hilbert⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het eenige ⟨nieuwe⟩ van Cantor's transfinite getallen,⟨32⟩ is het opbouwen van de meetkunde uit theorie van getallen [d.i. eenheden en enkelv. inductie].[73]⟧

. . . .

Mijn heele theorie: of ik ze *mag* toepassen op de wereld, blijft toch weer een kwestie van instinct en spontaniteit.
(volgt een onleesbare doorhaling van 4 regels.)
Maar is de vraag, of men *mag* toepassen, wel te stellen? Men *doet* het, en daarmee uit.

. . . .

[Spreek ik vaag. Och, als je spreekt in een systeem van verstandhouding, kan je niets *waars* meer zeggen.]

. . . .

II-32 (Russell) ['No numerical comparison is possible, even by means of transfinite numbers, between an area and a length, or a volume and an area. Numerical measurement, in fact, is wholly dependent upon the axiom of Archimedes, and cannot be extended as Cantor has extended numbers.'][74]

. . . .

Het is waar: *elke ruimte heeft 3 afmetingen*,[75] zooals het waar is voor

⟨30⟩ Lobatchevski

⟨31⟩ ⟦Want⟧ nooit ⟦kan men⟧ weten of de indefinables ⟨en hun axioma's⟩ onafhankelijk zijn,

⟨32⟩ *(eerdere doorhaling:)* Het enige ⟦principe⟧ van Cantor's transfinite getallen, een kind: *alle menschen dragen kleeren*; het is alleen ten gevolge van nieuwe begripssplitsing ter centralizeering, *) dat die begripswaarheden (d.i. zuivere mathem. waarheden) uiteenvallen.[76]

*) *(kantlijn:)* ⟨d.i. steeds meerdere kleine systemen opnemen in één groot,⟩

. . . .

[(Russell) 'Geometry may be considered as a pure a priori science, or as the study of actual space. In the latter sense, I hold it to be an experimental science, to be conducted by means of careful measurement'.][77]

. . . .

[(Russell) 'Theory of Functions – of little interst fo the philosopher'.][78]

. . . .

Men zou het heele mysterie van ruimte en vlakken ⟨nooit⟩ kunnen ophelderen zóó, dat er geen hokuspokus meer aan is; immers het aantal mogelijke gebouwen is aftelbaar *onaf*, dus niet te overzien.[79]

. . . .

(Russell p. 381) **II-33**

1) The non-Euclidians.

2) 'The work of Dedekind and Cantor, which showed the necessity of investigating carefully the prerequisites of analytical Geometry'.

3) The Italian work on closed series, mentioned in part IV, has enormously increased the range of pure projective Geometry.[80]

. . . .

['given a certain body of geometrical propositions concerning a certain number of entities, it is more or less arbitrary which of the entities we take as indefinable and which of the propositions as indemonstrable'. 'But the logical differences which result from different selections are very great'.]

'Projective space itself is, so far as it goes, indistinguishable from the polar form of elliptic space'[81]

. . . .

De gewone 2-dim. geometrie met niets als rationalen en vierkantswortels is een gesloten geheel. Ook met niets als vierk. en derdem. wortels.[82]

. . . .

[Als je alleen werkt met als geheel aanschouwde systemen, niet met logische stelsels, sta je ten minste nog *iets* dichter bij de werkelijkheid.]

. . . .

[(Russell p. 393)[83] ' The definition of the segment (*abc*) involves the quadrilateral construction – which demands, for its proof, a point outside its own plane, and four pairs of triangles in perspective']

. . . .

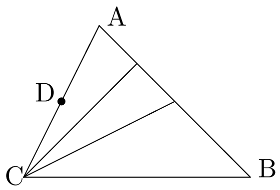
Wij willen alleen postulaten, die vrije bouwsteenen zijn.[84]

. . . .

II-34 *doorgehaald:* ⟦(Russell p. 391) 'Euclidian and hyperbolic spaces are projective spaces but something more. They are open series, but an open series may directly be seen as a closed series'.[85]

. . . .

(Russell p. 384)[86] Het axioma reg. 17 is duidelijk noodig; maar geeft geen genese aan van het platte vlak. Maar zou men er niet aan kunnen ontkomen uitgaande van de minim. betr. 'rechte lijn' im allg. Raum.



Zij vooreerst de punt-volgorde op AB gegeven; laat ik dan A overgaan continu in B. Dan kan ik ook CA laten overgaan ⟨continu⟩ in CB. En daarbij gaat een punt tusschen C en A continu over in B. De rechte lijn BD is zoo'n puntreeks, die niet tusschen D en B aan den anderen kant van AB kan komen, moet dus alle lijnen van C naar een punt van AB in één punt snijden aan dezen kant van AB.⟧

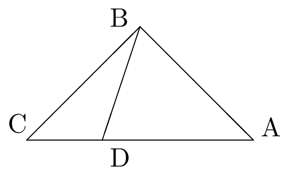
. . . .

Bij de mengvorming der projectieve ruimte definieer de punten als polaire splitsingen (ongelijksoortig, zooals de kleurensplitsingen van A. Schopenhauer, maar van eenzelfde punt).

Neem nu de hoekpunten A, B en C, niet in een rechte lijn; die bepalen 8 driehoeken. Kies ik een bepaalde uit, dan is het heel duidelijk, wat punten *binnen* die driehoek zijn. (n.l. gecomponeerd uit $\left.\begin{matrix} pos. \\ neg. \end{matrix}\right\}A$, $\left.\begin{matrix} pos. \\ neg. \end{matrix}\right\}B$ en $\left.\begin{matrix} pos. \\ neg. \end{matrix}\right\}C$.

En dan is ook duidelijk, dat twee ⟨neg.⟩ lijnen van A naar een punt van BC⟨33⟩ en van B naar een punt van AC binnen den driehoek liggen, en elkaar snijden. (axioma § 364 Russell).[87]

(kantlijn:) ⟨



Kan ik punten *binnen* den △ niet definieeren, als punten samengesteld uit pos. A, pos. B en pos. C? En kan ik dan geen oneindige divisibiliteit invoeren, zóó, dat ik eerst spreek van binnen ABC, dan van binnen ABD. Als ik eerst ⟨vooraf⟩ de axioma's der Anordnung op de r. lijn volgens Hilbert laat gaan.⟩[88]

....

De axiomatizeering komt vooral door ⟨de⟩ *woorden*;⟨34⟩ om den wil der individuen samen te houden. Want die woorden blijken dan toch niet zeker vast te houden,⟨35⟩ en om ze toch zeker te houden, gaat men ze axiomatizeeren.⟨36⟩ **II-35**

....

(doorgehaald:)⟦Die moderne wiskunde gaat uit van ding en relatie, dus van discreetheid; maar als dat nu eens fout was, en men uit moest gaan van continuiteit?

En als de stelsels met eenvoudige relaties nu eens *nooit* direct zijn op te bouwen – dan axiomatisch natuurlijk, en zoo achteraf gesteund door de existentiestelling – omdat ze niet genetisch uit den geest voortkomen? Maar in allen is de *wil* tot de axioma's, waaraan de wereld dan wel wordt aangepast?[89]

....

Zijn het axioma van 'punt buiten het vlak bestaat' en de quadril. constr. als axioma niet aequivalent? *Drie* afmetingen noodig voor het bewijs daarvan hangt samen met drie punten noodig om de om de punten op de lijn te ordenen?⟧ [90]

....

⟨33⟩ En dan is ook duidelijk, dat twee ⟨neg.⟩ lijnen ⟦binnen de driehoek⟧ van A naar een punt van BC

⟨34⟩ De ⟦steeds verde gaande differentieering⟧ komt vooral door *woorden*:

⟨35⟩ Want die woorden blijken dan ⟦vatbaar voor steeds⟧ toch niet zeker vast te houden

⟨36⟩ gaat men ze ⟦steeds verder splitsen.⟧

Geef eerst op r. lijn punten binnen A en B ⟨die je bij ax. vaststelt en lineair ordent:⟩ verdeeld in tusschen A en C en tusschen C en B. Definieer dan punten binnen D en AB, verdeeld in binnen D en AC en binnen D en CB.

....

II-36 *(heel pg. II-36 is doorgehaald.)* ⟦Het axioma van § 364 wil eigenlijk zeggen, dat er al een enkel plat vlak door A, B en C gegeven is, waarover al die rechte lijnen moeten loopen. We moeten dus eigenlijk al weten, dat er maar één plat vlak is door 3 punten; maar dat heeft alleen zin, als we de heele ruimte, waarvoor dat platte vlak een minimumeigenschap moet hebben, al kennen. Dus zoo zou, willen we met onze punten iets kunnen doen ⟨door er n.l. rechte lijnen uit te vormen,⟩ de ruimte, waaruit die punten te nemen zijn, al voorondersteld zijn.[91]

....

Is het eigenlijk geen larie, dat stellen van een relatie tusschen elke twee punten; punten, die er niet zijn? Bouw op, schep zoo het continuum tusschen a en b en tusschen a en c, en daarmee uit en ga dan daaruit een vlak opbouwen, na eerst aan die beide continua getallen waarde te hebben gegeven.

We hebben ten slotte toch alleen met existentietheorema's te maken. En met meer dimensies? Och, om die op te bouwen kunnen we toch niets, dan de
II-37 enkelvoudige inductie a priori nemen; waarom dan niet ‖ gewoon twee van die inducties naast elkaar als gesloten reeksen?⟧ [92]

....

Bij een willek. ruimte van n afm. is natuurlijk geen geodetisch vlak zóó, dat elke geodetische lijn, die er twee punten mee gemeen heeft, er geheel in valt. Wel kan men een ∞ bundel geod. lijnen nemen, maar twee willek. punten van twee van die lijnen liggen op een geod. lijn, die de andere lijnen van den bundel (cf. Klein pag. 211) *niet* snijdt. Dat bestaan van het platte vlak is het axioma van § 364 dat zegt:

Een geod. lijn tusschen 2 punten van den bundel loopt snijdend over alle lijnen van den bundel heen. (Het dient *niet* alleen op de Eucl. en hyperb. geometrie uit te sluiten, zooals Russell meent.)[93]

(kantlijn:) ⟨Het is echter alleen iets bijzonders dat *bestaan* van het platte vlak voor meer dan 2 afmetingen (want in 2 afm. is het er zeker, n.l. de ruimte, waarin we opereeren). Hiermee hangt samen dat Von Staudt's constructie het platte vlak moet postuleeren voor drie afmetingen.⟩[94]

....

En ook Klein voert bij axioma dat bestaan van het pl. vlak in (pag 317), en gaat *dan* het getal invoeren.[95]

(doorgehaald:) ⟦Och, maar juist de pl. vlak postuleering voor meer dan 2

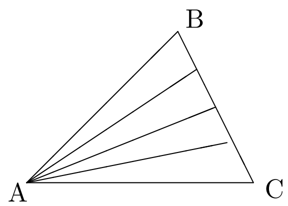
afmetigen loopt ⟨volgens Klein⟩ parallel met de betrekking der geometrie tot de enkelvoudige mathem. inductie, het eendimensionale continuum. En daarin zitten feitelijk de getallen al, volgens mijn mengconstructie.⟧

....

Ik wil toch rekenen, niet waar? Dan heb ik ook alleen te maken met betrekking op eendim. continuum (de aprioristische inductie, waarmee alleen te rekenen valt), dus met daaruit af te leiden existentietheorema's ⟨en op te bouwen geometrieën.⟩ En aan axioma's op andere wegen heb ik voor 't rekenen niets; ze hebben dus geen zin. **II-38**

....

(doorgehaald:)[96] ⟦



Het axioma van § 64 zegt precies, dat ik met ⟨geen andere punten⟩ te doen heb, dan met die liggen op den bundel der r. lijnen van A naar de punten van BC, m.a.w. met niets dan met een lineaire afhankelijkheid van twee eendim. continua (immers met een eendim. continuum van twee eendim. continua), en dat is juist mijn meng-genereering.⟧

....

Het is bij wiskunde, evenals bij kunst, hoogst gevaarlijk af te wijken van het 'schaffe Künstler, rede nicht', want de grondprincipien zijn ook hier ‖ *niet te zeggen*, alleen tusschen de regels te lezen.[97] **II-39**

....

Het leven heeft geen speciale behoeften; alleen de joden kunnen de wereld zien als een mechanisme [d.w.z. een deel van de wereld als deel-aspect van een mechanisme], en dan ook jou zien als een mechanisme, en zoo jou een bodem onder de voeten wegtrekken, omdat ze die bodem bij jou zagen als noodzakelijk optredend in het mechanisme (jou zien als mechanisme kunnen ze alleen, doordat ze de wereld aanschouwen als iets *buiten* zich, d.w.z. gepartieerd zijn in 't hoofd); voor jou verschijnt dan in jou*(w?)* wereld het 'kwaad', dat je lijdelijk hebt te dulden; want doe je dat niet, dan zit er niets voor je op, dan met de joden mee te leven in de partieering, om je daar te kunnen verdedigen, d.w.z.

ook de wereld te gaan aanschouwen.

Een jood heeft alleen vat op je, als je je aan de wereld gebonden hebt.

Een mensch voelt zich losser van de wereld dan een dier, kan hooger leven, maar als keerzijde is meer vatbaar voor jodigheid.

. . . .

(doorgehaald tot en met de eerste helft van de volgende pagina, en moeilijk leesbaar:) ⟦Een complexe vergrooting is een lineaire vergrooting plus een draaiing, d.w. zeggen een transformatie ten opz. van een kegelsnede, die in 2 dubbelpunten is gedegenereerd; gevolgd door een die in twee rechte lijnen is gedegenereerd. Op die manier is de complexe rekening in de reeële projectieve meetkunde ondergebracht; want daarin kunnen we de complexe punten als dubbelelement zien en involutie geheel zonder getalhulp als spreekwijze invoeren.

. . . .

II-40 *Bij het* axioma v. § 364[98]. Vooreerst ligt dan, om als deelbare relatie tusschen 2 punten te nemen een enkelv. inductie – eendim. continuum –. Het axioma van § 364 zegt dan niets dan dat voor 3 punten a, b en c en de lijnen ab en ac als relaties tusschen willek. punt van ab en willek. punt van ac een 2-dim. ruimte voldoende*(?)* blijft; n.l. het geheel van relatielijnen tusschen de projectief verbonden punten van ab en ac.

Blijft dan nog verder aan te tonen bij axioma's, dat deze ruimte een platte is. Volgens het axioma kan ze nog willekeurig gekromd zijn.⟧ ⟨37⟩

. . . .

Het zien van tijd en ruimte is niet veel meer dan imitatie en dwangsuggestie.

. . . .

Daar we toch alleen uit punt, relatie en eendim. continuiteit kunnen opbouwen, is het zoeken der grondslag volgens Lie nog het beste.[99]

. . . .

De wisseling, die de eendim. oneindigheid is, wordt eerst mogelijk door de afgesloten partieering, waarna de verbeelding is overgelaten aan verwondering en eindeloos wisselspel.

. . . .

Een dissertatie dient als slotsom haar eigen waardeloosheid te geven.

. . . .

⟨37⟩ *Deze pagina bevat een viertal onleesbaar doorgehaalde toevoegingen in de kantlijn en tussen de paragrafen*

Wat staat Russell Fond. p. 5 onderaan, drukt uit, dat het vaak gelukt diverse dingen te centralizeeren uit een pseudo-centrum, vanwaaruit het minder hooge moreele eischen stelt, dan uit het centrum.[100]

. . . .

. . . .

Notes

[1]D.w.z. er is geen constructie van het continuüm npdig, zoals bij Poincaré en Kronecker.'Mensen verstaan zich daarop', dat wil zeggen dat iedereen weet waarover gepraat wordt, zonder een of andere vorm van constructie of definitie.

[2]Een doorgehaald fragment: hier wordt aan een logische grondslag voor de wiskunde nog enige waarde toegekend, namelijk een pedagogische. Maar in zijn dissertatie wijst Brouwer elke grondslagen-rol voor de logica af. Ze leert ons niets nieuws. Zie hst. III van de dissertatie.

[3]Nog steeds doorgehaald. Logische grondslagen zijn alleen nuttig uit pedagogisch oogpunt.
Lobatchevski breidde de methode uit door verandering van het vijfde postulaat: er gaan meerdere lijnen door een punt P evenwijdig aan een gegeven lijn l.
Peano en Veronese daarentegen doorbraken geen grenzen, zoals Lobatchevski deed. Zijn axiomatiseerden slechts het bekende terrein.

[4]De pagina's 3, 4 en 5 van dit schrift behandelen potentiaaltheorie.

[5]Brouwer had onenigheid met Jahnke over de primeur van een publicatie over Rotaties in R_4. Brouwer publiceerde hierover in de KNAW verslagen van 1904.

[6]Cayley's maatbepaling in de Projectieve Meetkunde ($k.log(dubbelverhouding)$). Zie Klein, *Nicht-Euklidische Geometrie* (1893) pag. 62 e.v.

[7]Logica kan geen fundamentele grondslag van de wiskunde zijn. Zij ontneemt er het levende aan. Slechts de intuïtie kan fundament zijn.

[8]In de elliptische meetkunde bestaat er geen lijn door een punt P evenwijdig aan een lijn l die niet door P gaat, dus elke twee lijnen l en m snijden elkaar in het eindige.

[9]Brouwer geeft dit, gezien de geplaatste aanhalingstekens, als een citaat, maar het staat niet in die bewoordingen in een van Poincaré's werken. Bovendien citeert Brouwer altijd in de oorspronkelijke taal en er was toen nog geen Nederlandse vertaling beschikbaar. Wel spreekt Poincaré over dit onderwerp in:
– *La Science et l'Hypothèse*, deel I, hoofdstuk 2, pag 43 e.v., *remarques diverses* 2^o
– *La Valeur de la Science*, deel I, hoofdstuk 1, punt II.
– *La Science et la Méthode*, livre II, hoofdstuk 2.
Zie voor de betreffende kromme ook: Klein, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien* (door Brouwer gewoonlijk aangeduid met *Klein's Prinzipien*) over de functie van Weierstrass (1861).
Deze kromme lijkt tegenintuïtief en niet in de natuur voorkomend, maar moet

wiskundig toch geaccepteerd worden.

[10]Dat is het Weierstrass voorbeeld uit *Klein's Prinzipien.*

[11]Dit voorbeeld staat onder *Remarques diverses* nummer 1: Is de creatieve geest uitgeput met de schepping van het continuüm? Neen, er zijn oneindig kleine grootheden (getallen) van verschillende orde, die ten opzichte van elkaar oneindig klein of groot zijn (vergelijk de non-standaard analyse).

[12]Om met het continuüm te kunnen rekenen, moet de rechte lijn er op toegepast worden in de projectieve meetkunde. 'Vatbaar voor aritmetisering' is dan het rekenen met behulp van dubbelverhoudingen door middel van homogene coördinaten. Deze opmerking wordt hier door Brouwer gemaakt naar aanleiding van Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, pagina 35 e.v. *création du continu mathématique*, welke creatie nodig is ten gevolge van de bekende contradictie in het fysisch continuüm $A = B$, $B = C$, $A < C$.

[13]Dit naar aanleiding van Poincaré, pagina 44, *Le continu physique à plusieurs dimensions.* Het eendimensionale 'altijd maar door' is de successor operatie van de natuurlijke getallen, resulterend in ω.

[14]Vanaf hier tot en met de volgende pagina, derde paragraaf, leest Brouwer hoofdstuk 3 van *la Science et l'Hypothèse*, getiteld *Les géométries non euclidiennes.* Poincaré gaat hierin na het verschil tussen de meetkunde van Riemann (geen evenwijdige lijnen) en Lobatchevski (oneindig veel lijnen door een punt, evenwijdig aan een gegeven lijn). Ver weg van alle 'verstandhouding' dus.

[15]De twee coördinaten van het platte vlak.

[16]Het theorema van Lie (zie pagina 62, 63 Poincaré) bewijst dat het aantal meetkundes eindig is. Zie ook Lie, *Über die Grundlagen der Geometrie.*

[17]Brouwer was kennelijk bekend met de ideeën van de Lorentz contractie en/of van de speciale relativiteitstheorie.

[18]Vanaf hier tot en met pagina 13 van dit tweede schrift leest Brouwer het vierde hoofdstuk van *La Science et l'Hypothèse*, getiteld *l'Espace et la Géométrie.* Volgens Poincaré ontstaat de gewaarwording van afstand door spierwerking (accomodatie) in plaats van door zintuigelijke indrukken. Brouwer is het hier niet mee eens.

[19]Dit slaat klaarblijkelijk op het besproken boek van Poincaré.

[20]Toemalig hoogleraar te Groningen.

[21]De gekoppelde slinger, het 'sympatisch uurwerk'. Een 'verklaring' daarvan is òf slechts een wiskundige beschrijving, òf een hypotheseverifiëring.

[22]Dedekind zoekt grondslagen van de rekenkunde en de analyse, in respec-

tievelijk *Was sind und was sollen die Zahlen* en in *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*
Veronese zoekt grondslagen van de meetkunde in *Grundzüge der Geometrie von mehrere Dimensionen.*

[23]Een voor de editor onbekende verwijzing van een bekende spreuk.

[24]Een in onze ogen tamelijk gechargeerd fragment, dat inhoudelijk gezien dient te worden in relatie tot Poincaré's ruimteopvatting in het vierde hoofdstuk (*l'Espace et la Géométrie)* van *La Science et l'Hypothèse.*

[25]Filosofie die Brouwer in de dissertatie wil gaan verwerken, maar die Korteweg er niet in wil hebben.

[26]Een schets voor de (inleiding van de) dissertatie? De gegeven vijf punten (nieuwste vertoningen op wiskundig gebied) moeten dus aanleiding zijn tot het zoeken van filosofische grondslagen van de wiskunde.

[27]Dit is geen letterlijk citaat. De eerste woorden 'La troisième dimension vient du phénomène, que' lijkt een eigen toevoeging van Brouwer. Poincaré bespreekt hier de meetkundige driedimensionale ruimte versus de 'weergegeven ruimte' (l'espace réprésentatif). Het netvlies is tweedimensionaal, en de derde dimensie ervaren wij door accomodatie en door 'convergence des yeux', dat wil zeggen de gemeenschappelijkheid der beide ogen. De gehele visuele ruimte is dus niet isotroop. Maar deze twee (accomodatie en convergentie) gaan altijd samen. Zie het citaat. Dus de twee methodes hebben hetzelfde resultaat. Brouwer heeft hier, in de kantlijntoevoeging, kritiek op.

[28]Pagina 13 behandelt potentiaaltheorie.

[29]Mogelijk een opmerking naar aanleiding van zijn kritiek op Poincaré, van wie Brouwer toch een bewonderaar is.

[30]Vanaf deze alinea tot en met pagina 17 van dit tweede schrift gaat het over het vijfde hoofdstuk van *La Science et l'Hypothèse.* De opmerking in deze paragraaf slaat op pagina 108 onderaan: de driedimensionaliteit van de ruimte komt doordat de verzameling van de klassen (alle lichaamshoudingen, die eenzelfde punt in de ruimte aanwijzen, vormen één klasse) voor ons het karakter heeft van een fysisch continuüm van drie dimensies. Hiermee is Brouwer het dus niet eens. Zie ook onder de vierde paragraaf van pagina 12 van dit tweede schrift.

[31]Deze opmerking slaat waarschijnlijk ook op bovenstaand commentaar op Poincaré. De 'verklaring' van Poincaré legt het af tegen Brouwers intuïtieve inzien van de drie dimensies.

[32]Zie pagina 82 van *La Science et l'Hypothèse*: *Loi d'Homogénéité.*

[33]Diepte kunnen wij zien ten gevolge van spierbewegingen. Zie hierboven, de laatste voetnoot op pagina 12.

[34]D.w.z. alleen de intuïitie als basis garandeert haar zelfstandigheid.

[35]De term 'willekeur' moet hier begrepen worden in de letterlijke betekenis van 'uit vrije wil', 'naar eigen vrije keuze'.

[36]Zie pagina 68 e.v. van *La Science et l'Hypothèse.* Het stellen van een afstands- en rechte-lijnverband, dat een Euclidische groep representeert, is willekeur. Zie pag. 85 van genoemd boek.

[37]Zie pagina 80 van *La Science et l'Hypothèse*: 'Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie'.
Dus basis voor de geometrie is bij Poincaré de waarneming, de fysica.

[38]De paragraaf is niet geheel leesbaar, maar lijkt te stellen dat Brouwer de benadering van Poincaré om met behulp van de rigide bewegingsgroep de meetkundige Euclidische ruimte te definiëren, onzin vindt.

[39]Verzet tegen Poincaré's grondslagen voor een meetkundige ruimte. Volgens hoofdstuk 5 van *La Science et l'Hypothèse*, getiteld *l'Expérience et la Géométrie*, is niet experimenteel en door ervaring uit te maken of wij in een Riemannse, een Euclidische of in een Lobatchevski ruimte leven.

[40]Zie Poincaré, hoofdstuk 6, *La Mécanique classique*: over de beweging van lichamen in de ruimte. Voor 'corrigerende lichaamsbewegingen' zie pagina 76 e.v. 'changements d' état et changements de position'. Een verandering in positie van een object kunnen wij corrigeren met een eigen beweging. Een positie van een object kan veranderen – zonder spierbeweging, als het object beweegt, – en door een beweging van onszelf; wij voelen dan een spierbeweging.

[41]Zie *La Science et l'Hypothèse*, pag. 127. Over de hele pagina van dit schrift reageert Brouwer op de inhoud van dit hoofdstuk: wij ontdekken geen natuurwetten, maar wij leggen ze op aan de natuur.

[42]Zie de opmerkingen van Poincaré in hoofdstuk 6 kracht, massa en versnelling. Hoe zijn deze te definiëren?

[43]Van Russell's *Principles of Mathematics.* Hier begint Brouwer met de behandeling van, en commentaar op dit werk, hoewel het commentaar op Poincaré's *La Science et l'Hypothèse* ook nog enige pagina's doorgaat.

[44]In dit voorwoord stelt Russell dat dit boek twee hoofddoelen heeft:
1. Het bewijs leveren, dat alle zuivere wiskunde uitsluitend werkt met concepten, die definieerbaar zijn in termen van een klein aantal fundamentele logische concepten, en dat alle proposities afleidbaar zijn uit een klein aantal fundamentele logische principes.
2. Het uitleggen en verklaren van de fundamentele concepten, die de wiskunde accepteert als ondefinieerbaar. Hier slaat het gegeven citaat op: de betreffende concepten helder zien en er een mate van vertrouwdheid mee krijgen, zowel bij

zichzelf als bij anderen.

[45]In *La Science et l'Hypothèse*, hoofdstuk 3, geeft Poincaré een inleiding over de niet-Euclidische meetkundes (de hyperbolische van Bolyai/Lobatchevski en de elliptische van Riemann). Op pagina 52 e.v. geeft Poincaré een voorbeeld van een niet-Euclidische wereld, in de vorm van een twee-dimensionale meetkunde op een bol. De ontwikkelde meetkunde zal daar elliptisch zijn, want twee rechte lijnen (grootcirkels) snijden elkaar altijd.
Maar mogelijkerwijs wil Brouwer zeggen: het in een dwaas model op zoek gaan naar contradicties is een vorm van zonde. Beter is het om de fouten in een model aan te wijzen zonder op zoek te geen naar contradicties. Dit is op te vatten als een hint in de richting van het intuïtionisme: niet een contradictie doet een model sneuvelen, maar de onmogelijkheid om dat model te bouwen.

[46]Dit moet op Poincaré slaan, want Russell spreekt niet over mechanica. Zie hoofdstuk 6 van Poincaré's *La Science et l'Hypothèse*.

[47]Vergelijk pagina 14 van dit tweede schrift. Zie *La Science et l'Hypothèse*, pagina 44: het fysisch continuüm van meer dimensies; en met name pagina 105 e.v., het Supplément van het vijfde hoofdstuk: wat willen wij zeggen met 'de ruimte heeft drie dimensies'?
Brouwer stelt: de drie dimensies zitten al in ons.
Poincaré: elke houding van de 'premier doigt' bepaalt een punt en dat alleen definieert een punt in de ruimte.
Brouwer: nee, juist omgekeerd! Ik kan dat doen omdat de ruimte er al is.

[48]'Cyclose' is een begrip van waarschijnlijk Listing (een leerling van Riemann) en geeft weer een 'samenhang van elementen in een verzameling'. Zie Brouwer 1912F, 1912L, waar hij dit begrip gebruikt bij het bewijs, dat een gesloten kromme topologisch invariant is.

[49]Tegen de abstracte geometrie, tegen Poincaré's constructie van het wiskundig continuüm, omdat het fysisch continuüm tot een contradictie leidt, en tegen Russell, die helemaal vanuit abstracties opereert.

[50]Zie pagina 11 van dit tweede schrift.

[51]Twee pagina's met relativerende en kritische opmerkingen over wiskunde en de grondslagen daarvan. Hier wordt Russell kennelijk gelezen, en met weinig instemming.

[52]Brouwer noemt hier het begrip oneindig als slechts een rekenmiddel. Vergelijk Hilbert in *Über das Unendliche*.

[53]Satz 66 uit *Was sind und was sollen die Zahlen*.

[54]In het systeem **N** wordt volledige inductie als stelling opgevoerd door Dedekind (stelling 80). Maar bij het bewijs van stelling 66 wordt deze stelling 80 in feite

al gebruikt.

[55]Dat wil zeggen bij iedereen bekend en ieder was ermee vertrouwd, zonder dat het geconstrueerd of gedefinieerd was.

[56]Nog steeds betrekking hebbende op Dedekinds gebruik van volledige inductie.

[57]Dedekinds opbouw van het continuüm: zie *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Voor de 'mengmethode' van Brouwer: zie pagina 16 van het eerste schrift, de methode van de barycentrische coördinaten.

[58]Poincaré spreekt op pagina 35 e.v. van *La Science et l'Hypothèse* over de 'création du continu mathématique', maar hij spreekt niet over 'moreel inzien'. Dit laatste doet alleen Brouwer in zijn veroordeling van de niet-intuïtief opgebouwde wiskunde.

[59]Brouwer doelt hier weer op de abstracte wiskundige modellen van de natuur, zoals bij Maxwell en van der Waals.

[60]Vanaf hier tot aan het eind van dit tweede schrift wordt commentaar gegeven op Russells *Principles of mathematics* uit 1903.
Hier leest Brouwer Part II, *Numbers*, hoofdstuk 13 *Finite and Infinite.*

[61]Pagina 121 'If u be the class of all finite numbers ...'.
Brouwer stelt dan: ik kan niet spreken van 'alle', met als latere toevoeging: wel waar, namelijk met behulp van inductie.
Inderdaad kunnen de gehele getallen (de natuurlijke getallen en de negatieve getallen) als geheel gezien worden door hun wijze van opbouwen met behulp van de opvolger-operatie.

[62]Dat wil zeggen Dedekind definieert de natuurlijke getallen heel anders dan Russell, terwijl toch de 'verstandhouding' blijft, dat wil zeggen dat iedereen bij die definitie hetzelfde concept begrijpt.

[63]Zie Russell pag. 123, met als commentaar van Brouwer: de volledige inductie als eerste leugen, als meest fundamentele fout. Het duidt op het opvoeren van een bewijs of een redenering met *bewust* foute argumenten.
Het '$\pi\rho\omega\tau o\nu$ $\psi\varepsilon\upsilon\delta o\varsigma$' staat ook vermeld in Cantors artikel *Über die verschiedenen Standpunkte in Bezug auf das aktuelle Unendliche*:'alle sogenannten Beweise wider die Möglichkeit aktual unendlicher Zahlen sind, wie in jedem Falle besonders gezeigt und auch aus allgemeinen Gründen geschlossen werden kann, der Hauptsache nach dadurch Fehlerhaft, und darin liegt ihr '$\pi\rho\omega\tau o\nu$ $\psi\varepsilon\upsilon\delta o\varsigma$', daß sie von vornherein den in Frage stehenden Zahlen alle Eigenschaften der endlichen Zahlen zumuten oder vielmehr aufdrängen, ...'.

[64]Zie Russell, hoofdstuk 13, *Finite and Infinite.* Russell behandelt dit onderwerp aan de hand van Cantors publicatie in M.A. 46. Brouwer verzet zich tegen

de Cantorse opbouw daarvan; men moet intuïtief en aanschouwelijk opbouwen en pas daarna er eventueel logisch over redeneren.

[65]Zie Russell, hoofdstuk 37, *Transfinite cardinals.* Hier wordt de methode Cantor gevolgd, maar bij vermenigvuldiging de methode Whitehead (§ 286). Brouwer wil een 'opbouwmethode' van transfinite getallen. Het werken met zulke getallen kan nuttig zijn als methode. Vergelijk de opvatting van Hilbert in *Über das Unendliche.*
Met betrekking tot de logica: eerst de intuïtie, de aanschouwing, en dan, ten behoeve van de onderlinge verstandhouding, de logica. Zie ook de volgende paragraaf.

[66]Dat wil zeggen dat logica alleen dienstig is als communicatiemiddel.

[67]Dus éérst wiskunde en pas daarna (eventueel) logica.

[68]In deel V behandelt Russell *Infinity and Continuity* en in het eerste hoofdstuk van dit deel (hoofdstuk 32) de 'correlatie van reeksen'. De begrippen oneindigheid en continuïteit zijn door Cantor en Weierstrass ingrijpend behandeld, los van ruimte en tijd. De infinitesimaal (fluxion) verdween en het begrip oneindig ontwikkelde zich vrijer.
Twee reeksen zijn gecorreleerd, als er een 1–1 afbeelding is met behoud van orde: *ordinal corrrelation.*
Twee classes zijn gecorreleerd, als er een 1–1 afbeelding is: *correlation simply.*
Als P een generating relation is van een reeks, dus $P : x \to y$, of xPy, en R is een relatie tussen x en x_R, dus xRx_R, dan geeft dit een reeks in x_R als volgt: $x_R\overline{R}x$, xPy, $yRy_R \Rightarrow x_R\overline{R}PRy_R$, en is P transitief an asymmetrisch, dan $\overline{R}PR$ ook. Dit geeft het verschil tussen *onafhankelijke reeksen* en *reeksen door middel van correlatie.*
Twee relaties P en Q zijn 'like' als er een 1–1 relatie S is, zodat $dom(S) = field(P)$ en $Q = \overline{S}PS$
Met behulp van correlatum van reeksen is een functie te definiëren, waarvan er ook niet–numerieke zijn, bijvoorbeeld een woordenboek.
Twee particularisaties van functies:
1–1 of veel–een: bij elke referent een uniek relatum.
de onafhankelijk variabele tot reeksen beperken; dan is de afhankelijk variabele een reeks bij correlatie. Bijvoorbeeld een bewegingsvergelijking. Maar daar is er voor elke waarde van t een unieke plaats, terwijl het omgekeerde niet hoeft, want een plaats kan op meerdere tijdstippen ingenomen worden.
Vandaar het citaat. Het commentaar van Brouwer hierbij is wat dubieus, de kantlijntoevoeging is evenwel minder.
Dus: is R een veel–een relatie, dan kan dat een 'series by correlation' geven, maar de gevonden reeks is dan niet meer onafhankelijk.

[69]Zie Dedekinds *Was sind und was sollen die Zahlen.*
Enkelvoudige inductie is volgens één algoritme, de opvolgeroperatie. Brouwer accepteert dit bij de opbouw tot ω, waarna verder gegaan kan worden met

hetzelfde algoritme in de tweede getalklasse, naar hogere ordinaliteit waarbij de cardinaliteit $\aleph_0$ blijft.
'Meer dan enkelvoudige inductie' is voor Brouwer onacceptabel.

[70]De inhoud van het genoemde fragment van Russell is:
Essentieel voor de correlatie van oneindige klassen is dat, gegeven P_{xy}, bij gegeven x de bijbehorende y te vinden is. Dit is logisch niet uit te werken; het moet psychologisch gebeuren. Practisch is dit belangrijk, maar het theoretisch belang is twijfelachtig.

[71]Verderop is deel V behandelt Russell (hoofdstuk 37 en 38) de transfinite ordinalen en cardinalen, geheel volgens Cantor, met kritische kanttekeningen en verbeteringen.
Brouwer: alleen enkelvoudige inductie bij de opbouw van transfinite getallen, en dan komt men qua cardinaliteit nooit voorbij $\aleph_0$. Cantor komt met zijn 'Erzeugungsprinzipien' wel voorbij $\aleph_0$.

[72]Zie Russell § 108. Elke zuivere meetkunde bevat een stel 'indefinables' (punt, rechte lijn). Volgens Russell zijn deze indefinables slechts logische concepten. Zijn ze dat niet, dan hoort het resultaat al tot de toegepaste wiskunde. Uit het resultaat blijkt dan ook hun onafhankelijkheid (de gebouwen!).

[73]Zie Russell, hoofdstuk 35–38.

[74]Hoofdstuk 40: numerieke vergelijking kan alleen met behulp van Archimedes' axioma. Een lijnstuk is oneindig vaak deelbaar, maar een vierkant met dat lijnstuk als zijde is oneindig maal oneindig vaak deelbaar, maar is van een andere orde. Archimedes' axioma is hier onbruikbaar om die twee te vergelijken (dit is analoog aan de onvergelijkbaarheid van $\mathbf{Q}$ en $\mathbf{R}$.
In een compacte reeks bestaan ook geen infinitesimale segmenten, elk segment is oneindig maal deelbaar. Een infinitesimaal is een relatieve term (zie de definitie), onbruikbaar in de wiskunde. Een oppervlak is van een andere soort dan een lijn. Dan volgt bovenstaand citaat. N.b. dit slaat volgens Cantor dus niet op het 'aantal punten', want $\mathbf{R}$ is 1–1 afbeeldbaar op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, waar Brouwer het helemaal mee oneens is.

[75]Hier begint deel VI *Space*. Nadat Russell hieraan voorafgaand de logische theorie van getallen en de theorie van eendimensionale reeksen behandelde, volgt nu de behandeling van complexe getallen, van de meetkunde en van de ruimte.

[76]Weer de drie dimensies. Zie terug op pagina 12 van dit schrift. De drie dimensies zitten in ons, als onze intuïtie. Dat wordt min of meer teniet gedaan door Russells wijze van definiëren.

[77]Meetkunde heeft van nature en historisch natuurlijk van doen met de ruimte rondom ons. Dat is voor Russell experimentele wetenschap. Als zuivere wiskunde is het een apriori wetenschap, streng deductief en abstract.
Meetkunde als studie van reeksen van meer dimensies: voor planimetrie tweed-

imensionale reeksen, voor stereometrie driedimensionale. Historisch: zie § 353 (Kants opvatting, Lobatchevski en Bolyai). Voor de definite van tweedimensionale reeksen, zie § 354: elke term van de reeks is weer een reeks.

[78]Dus dimensies zijn abstract gedefinieerd, evenals complexe getallen. Deze theorie werd vroeger beschouwd als een belangrijk deel van de wiskundige filosofie, maar is dat niet meer omdat het niet langer controversieel is. Onderzoek van imaginairen leidde tot de functietheorie, die wiskundig zeer belangrijk is, maar onbelangrijk voor de filosoof. De filosofie van de imaginairen werd deel van de filosofie van universele algebra.

[79]Hoofdstuk 75, de projectieve meetkunde. Abstracte definities van meetkundes geeft een aftelbaar onaf aantal mogelijkheden. Een niet te overzien geheel. Hier komt overigens de term 'aftelbaar onaf' voor de eerste maal voor, zij het nog niet in expliciet gedefinieerde vorm. Zie voor het begrip 'aftelbaar onaf' Brouwers dissertatie (1907), pag. 148 e.v.; zie voor een nadere analyse van dit begrip Kuipers dissertatie *Ideas and Explorations, Brouwer's Road to Intuiionism* (2004), pag. 266 e.v.

[80]Dit is niet één citaat, maar een samenraapsel uit § 361, waarvan de eerste zin luidt: De grondslagen van de meetkunde zijn in recente tijden onderwerp geweest van een drievoudig nauwkeurig onderzoek.
Dan volgen de genoemde drie punten.

[81]Dit zijn twee citaten uit § 362, uit het begin en uit het eind. Russell verdeelt hier de meetkunde niet in de gebruikelijke Euclidische, elliptische en hyperbolische, want die verschillen niet in de 'indefinables', maar slechts in enkele later ingevoerde axioma's. Russells verdeling is fundamenteler: in projectieve, descriptieve en metrische meetkunde. Deze hebben grotere verschillen, maar zijn onderling wel compatibel.
'That is to say..', en dan begint het eerste citaat, wat dan ook duidelijk is: wat je als indefinable en wat als axioma's neemt, is willekeurig, maar de resultaten hebben grote logische verschillen. Alle beginnen met 'punt' als indefinable, maar bij 'rechte lijn' gaan ze al verschillen. Zie § 362. Dit geeft verschil in axioma's die kunnen leiden tot Euclidische of niet–Euclidische ruimte. De projectieve meetkunde heeft de eenvoudigste axioma's, waarna het tweede citaat volgt.

[82]Dat wil zeggen, de vlakke meetkunde heeft alleen maar gehele getallen, rationalen en vierkantswortels nodig om een gesloten geheel te vormen.

[83]Hier begint hoofdstuk 46, *descriptive geometry*. Deze verschilt in het algemeen niet scherp van projectieve meetkunde, maar de laatste spreekt over dingen, die onveranderd blijven bij projectie. Echter in de projectieve meetkunde zijn vier punten nodig om een orde te definiëren; bij drie punten kan nog niet van een 'tussen' gesproken worden (§ 367), want van de vier benodigde punten zijn er drie vaste punten. Dan volgt het citaat. Zie § 365 voor een toelichting. Voor het bewijs, dat het harmonische punt behorend bij a, b en c onafhankelijk

is van de keuze van de hulppunten u en v, is een punt buiten het vlak van abu nodig, zo stelt Russell.

[84]De constructivistische opvatting van Brouwer. Vrije bouwstenen versus rigide formalisme.

[85]Brouwer keert weer terug naar de behandeling van de projectieve meetkunde, met name naar de behandeling van het axioma in § 364 (regel 17).
In deze paragraaf wordt § 372 geciteerd. Het is geen letterlijk citaat, maar het staat er 'ongeveer'.
'Open series' beginnen bij een term, en die term wordt niet weer opnieuw in een eindig aantal stappen bereikt.
'Closed series': er is een n (het aantal termen), waarvoor geldt dat we, beginnend bij a, na n stappen weer reug zijn bij a.

[86]In § 364 definieert Russell het projectieve vlak met behulp van het axioma: als A en B twee verschillende punten zijn, dan is er minstens één punt C, dat niet op de lijn AB ligt. (De lijn is al gedefinieerd in §§ 362 en 363.)
Dan het vlak: dat is de klasse punten, gelegen op de lijnen bepaald door C en een punt x op AB. Deze definitie geldt niet voor het Euclidische vlak en het hyperbolische vlak, want daar worden geen punten x gedefinieerd als x het oneigenlijke punt op AB is, dus als $Cx \parallel AB$. Dit komt door het axioma uit regel 17:
Als A, B en C drie niet–collineaire punten zijn en A' ligt op BC en B' op AC ($A' \neq B$, $A' \neq C$, $B' \neq A$ and $B' \neq C$), dan is er een punt, gemeenschappelijk op AA' en BB'.
Met behulp van dit axioma is te bewijzen, dat het vlak CAB gelijk is aan het vlak ABC of BAC.
Brouwer vraagt zich dan af of er aan de restrictie te ontkomen is met behulp van de betrekking 'rechte lijn' in allgemeinen Raum. Zie figuur met toelichting.

[87]'Punten definiëren als polaire splitsingen', dat wil zeggen definieer een punt A als het ware als de snijpunten van een lijn a door het centrum O met een bol. Dan is er op die lijn dus een negatieve A en een positieve A. Er zijn van drie lijnen dan acht driehoeken te vormen.
Dan is duidelijk, wanneer een snijpunt van BX en AY (B en A negatief of positief) binnen de betreffende driehoek valt, en de lijnen elkaar dus snijden. Maar is het vlak dan gedefinieerd? Want dat is alleen te definiëren als de punten op AB ook buiten A en B mogen vallen. Probleem kan zijn, dat 'tussen' in dit stadium nog niet gedefinieerd is. Dat lijkt echter wel, want daartoe is een punt buiten AB nodig, en dat is gesteld in het eerste axioma van § 364. Bovendien hoeft 'tussen' hier nog niet; op AB is voldoende.

[88]Anordnungsaxiome van Hilbert: zie Hilberts Festschrift *Grundlagen der Geometrie* (1889) hoofdstuk I (*Die fünf Axiomengruppen*), § 3.

[89]'Uitgaan van ding en relatie' is het uitgaan van discreetheid. Maar als we

nu eens uit moesten gaan van continuïteit ? Brouwer stelt hier de vraag, maar haalt deze ook weer door.

[90]§ 365 Zie de constructie van d, gegeven a, b en c, zodat a, b, c, d een harmonisch viertal vormen. Dit gaat met behulp van hulppunten u en v. Om te bewijzen dat d onafhankalijk is van de keuze van u en v is het axioma van 'er is een punt buiten het vlak *abu*' nodig. Brouwer vraagt zich af of dit axioma niet equivalent is met 'drie punten op een lijn zijn nodig om een ordening te definiëren'.

[91]Een weliswaar doorgehaald fragment. Er staan twee axioma's in § 364. Het eerste stelt: zijn a en b twee punten, dan is er nog een punt buiten de (reeds gedefinieerde lijn) *ab*. Met behulp van dit axioma wordt het vlak geconstrueerd, waarvoor dan nog een axioma nodig blijkt, anders is het vlak niet volledig. Brouwer geeft in een doorgehaald fragment commentaar op deze § van Russell.

[92]Hier wordt het continuüm nog opgebouwd: als twee punten gegeven zijn, construeer dan het continuüm. Deze kritiek slaat op § 363: 'twee punten bepalen een klasse van punten' wil zeggen: er is een bepaalde relatie K tussen twee punten met slechts één corresponderende klasse punten.
Bij Brouwer zijn het 'existentie theorema's': de lijn bestaat per axioma bij twee gegeven punten, idem voor het vlak bij drie gegeven punten. Hij verzet zich tegen een formalisme *hoe* een lijn of vlak opgebouwd moet worden.

[93]Dat een geodetische lijn tussen twee punten in een geodetisch vlak geheel in dat vlak valt, is een te algemene stelling en voor een willekeurige ruimte niet altijd geldig. Zie Klein, *Nicht-euklidische Geometrie*, 1893, pag. 211. Maar dat zegt § 364 in feite.

[94]Von Staudts constructie: zie § 365. Deze moet het platte vlak postuleren in R_3. Omdat de constructie van d bij gegeven a, b, c onafhankelijk is van de keuze van u en v, definieert dit een R_2 in R_3. Is die onafhankelijkheid niet te bewijzen binnen R_2?

[95]Invoering door Klein van het platte vlak, daarna invoering van het getal: zie *Nicht-euklidische Geometrie*, pagina's 315–347, en met name pagina's 337–344.

[96]Deze doorgehaalde paragraaf zegt na het bovenstaande niets nieuws.

[97]Hier zien we al de conclusie van Brouwers dissertatie: wiskunde als vrije schepping van de menselijke geest met behulp van de intuïtie, die de weg wijst. Wel streng uiteraard, maar geen dor formalisme.

[98]Zie de voetnoot op pagina II–34.

[99]Zie Lie, *Über die Grundlagen der Geometrie.*

[100]Russell, *Essai sur les Fondements de la Géométrie*, de door Brouwer gebezigde Franse vertaling van Russels *Essay on the Foudations of Geometry.* Brouwer

verwijst naar het einde van de zesde paragraaf.

Chapter 3

Schrift III

⟦H.Poincaré La valeur de la Science,⟨1⟩ **III-1**

Encycl. der Math. W.⟨2⟩ Teil I, Bd I, Hfst 2.[1]

Encycl. der Math. W.: Minkowski, Lie transform.[2]

Hamel Diss. Gött. Nachr. 1901 Ueber die Geometrieen in denen die Geraden die kürzesten sind.[3]⟧

. . . .

Waren er alleen lange menschen, dan was er geen wiskunde.[4]

Nu de sporen er zijn, kunnen de voetreizigers niet meer mee concurreeren. Maar voor zichzelf – niet op de marktwaarde – heeft de voetreiziger gelijk; met het reizen per spoor is het *leven* er af. ⟨Dit komt door de⟩ wiskundige ⟨bekijking der wereld.⟩⟨3⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦[1. Verkennen het terrein v. allerlei nieuwere combinaties (Klein)

2. Beter: uit de verwarring te ontkomen door verdieping van inzicht (Mannoury!); maar dat blijft een eenzijdige verreining*(?)*, die niet kan, dan ten koste van een ⟨algemeen⟩ gezondheidsverlies, zoo

---

⟨1⟩ *Deze doorgehaalde eerste alinea bestaat uit later toegevoegde en daarna weer verwijderde opmerkingen bovenaan deze eerste bladzijde.*

⟨2⟩ *Encyklopädie der Mathematische Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen*

⟨3⟩ ⟦Zoo ook met⟧ wiskundige ⟦studie.⟧

goed als elk diep en zuiver inzicht.[5][⟨4⟩]

3. De eenige methode is: kom uit de verwarring, door je af te wenden van de ellende.]

. . . .

De	theoloog	leeft van der menschen	domheid
..	medicus	− − − − − − − − − − −	zwakheid
..	jurist	− − − − − − − − − − −	slechtheid

En is nu de mathematicus een even slechte parasiet?⟧

. . . .

De woorden uit de logische hoofdstukken zullen het *hart* van den leek niet hebben geraakt; nu (bij de phil. hoofdstukken) voelen ze zich toegesproken.

. . . .

III-2 Aan het gemeenschappelijk werken ⟨met idealen⟩ der wiskundigen ⟨dus niet als koopwaar⟩ ligt ten grondslag het kennen van en berusten in elkaars ⟨en eigen⟩ slechtheid.[⟨5⟩]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het heele transfinite gedoe is niets als samenhouden van – voor 2 menschen – gemeenschappelijke ideeënassociatie; als je het maar zóó beschouwen wil, dan blijven jullie het wel eens. Maar zoo iets kan tot uitbreiding (die dan weer op een beperkt gebied licht terugwerpt) van de functietheorie wel dienstig zijn.[6]

. . . .

De inzichten dezer dissertatie zijn 'voorloopig', maar dat zijn alle inzich- ten van sterfelijke menschen toch; is dus geen reden om ze achter te houden.

Maar in weerwil van die voorloopigheid zijn ze misschien toch belangrijk genoeg om mede te deelen.⟧

. . . .

De rol der ⟨grondslagen-zoeking⟩ moet zijn:[⟨6⟩] *gegeven* de verlokkingen des duivels, die de wereld en haar cathegorieën zijn: die wereld te schatten op haar ware waarde, en ⟨steeds weer⟩ te betrekken op God.

. . . .

[⟨4⟩] *(een en ander is vrij moeilijk leesbaar)*

[⟨5⟩] ligt ten grondslag het kennen van en berusten in elkaars ⟦ellende⟧ slechtheid ⟦een ziekelijke oppassingsbehoefte.⟧

[⟨6⟩] De rol der ⟦wiskunde⟧ moet zijn:

Is het uitgesloten, dat na Hilbert en Minkowski nóg weer nieuwe 'Begründungen' uitkomen? Waarom niet? **III-3**

. . . .

De fout der oude meetkunde was: Dat, *waarover* men redeneerde, was niet 'zelfopgebouwd'.[7]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Algebraisch mag je alleen uitkomsten contrôleeren, geen nieuwe inzichten verwerven.

. . . .

Meen je nu de 'Mengenlehre' tot zijn eenvoudigste te hebben teruggebracht Cantor? Maar toch kan je altijd weer elk element door inductie splitsen, waaruit het gegevene als bijzonder geval te voorschijn komt, en de eenvoudige inductieuitbreiding kan dan vaak maken, dat wat te voren een ingewikkelde kwestie leek, plotseling als heel eenvoudig voor den dag komt (als een deelprojectie uit het uitgebreide systeem.)[8] ⟧

. . . .

Dat logisch redeneeren *over* iets onbekends, dat men over de planimetrie deed, kan men niet doen over de transf. getallen; omdat over dat onbekende hier geen algemeen erkende verstandhouding heerscht.

. . . .

Als Korteweg een golfformule in een kanaal berekend heeft, dan beteekent **III-4**
dat, dat hij nu in zijn hoofd wat heeft, maar voor het lichaam heeft het slechts den negatieven zin, dat hij gevrijwaard is voor ⟨reeds nu als zoodanig te ziene⟩ domme streeken.[9]

. . . .

(Klein Mathem. Ann. ⟨50⟩ pag. 585) het gecursiveerde: Onwaar; primair zijn niet benaderde 'waarnemingen'; want aan het *meten* is primair de vooruitzetting van het *precies waar* zijn der axioma's.[10]

. . . .

De wiskunde van mij geeft geen *teeken* (zoo min als Jezus), waarop overigens bijna alle wiskundig vertoon is gebaseerd.
(onleesbaar doorgehaalde tussenvoeging)
Daarom eischt de mijne een innig begrip ter contrôle.[11]

. . . .

Men kan niet denken over zijn gedachten, dat is sofisme.[12]

. . . .

Twee manieren van schrijven: a) van *verzet*: handhaven van het eene in zich tegen de storende suggesties van buiten. b) van *buigen*: meehuilen met de honden in 't bosch; leven *in* de storende suggesties van buiten, in plaats van er *tegenin*; schrijven uit nood of eerzucht.

. . . .

III-5 Men bedrijve geen wiskunde, kijkend in zichzelf, maar naar de anderen, en zie *die* wiskunde bedrijven.

(En verder bedrijve men wiskunde, om, voorzoover men mee moet doen in het systeem, dat systeem te verbeteren.)

Men ziet dan de menschen *meten*. En jij, die dat aanziet, moet wel tijdelijk meedoen.⟨7⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Een hypothese is niets als een economische samenvatting van nieuwe aangestaarde ideen in reeds familiaire (d.w.z. oorspronkelijk ook verwonderd aangestaard).[13]⟧

. . . .

[Dat de astronomische wetten zoo eenvoudig zijn, en dat de bewuste dingen materieel zoo ver af zijn, buiten ons om werken naar eenvoudige aperceptie, is een.][14]

. . . .

Het oprechtelijk zien van de waarheid: is niets als het oprechtelijk in je laten doorwerken van de eenmaal van buiten op je gekomen suggesties, (als ruimte en tijd); maar dat oprechtelijk laten doorwerken is stellen van *jezelf* er tegenover, zonder de kracht te hebben je los te rukken,⟨8⟩ waardoor de suggestie nóg dieper ingrijpt, enz.[15]

. . . .

III-6 Een zuiver mensch voelt zich ⟨met vastheid⟩ thuis in alle wisselingen; de dégeneré van nu alleen nog in de pure mathematische logica.[16]

⟨7⟩Men ziet dan de menschen *meten*. ⟦en ook den 'Satz vom ausgeschlossenem Dritten' stellen, uit traagheid, om in afgeslotenheid ⟨in 't hoofd⟩ te kunnen volharden.⟧ En jij, die dat aanziet, moet wel tijdelijk meedoen.

⟨8⟩maar dat oprechtelijk laten doorwerken is stellen van *jezelf* er tegenover, ⟦m.a.w. spelbreken,⟧ zonder de kracht te hebben je los te rukken,

. . . .

De physica en techniek is de veruiterlijking van den mensch in de wereld, die hem *moet* verderven.[17]

. . . .

Zie de om zich grijpende wetenschap zooveel mogelijk blijven omkleven het oude,⟨9⟩ zooals de R_3 wel altijd het centrum zal blijven der physica, [zooals een voortrollende sneeuwbal het oorspr. korreltje blijft inhouden], want men krijgt nu eenmaal verveling van alleen bij het oude meten te volharden, en wil eens verder om zich heen kijken, de storende invloeden in aanmerking nemen.

. . . .

Elk deel ⟨van het boek⟩[18] spreekt uit verschillende bewustzijnspseudocentra.

. . . .

[Geldt van de R_3 de Eucl. meetkunde? Wel neen, wij zeggen, dat we, waar die eigenschappen (van bewegingen) uitkomen, meetkunde zonder meer hebben; *) d.w.z. alles wat daarin niet past, zonderen we vooraf af als correcties; dat er wetten in de natuur zijn, m.a.w. dat zekere verhoudingen (d.i. veruiterlijkingen van onszelf) ‖ een tijdlang kunnen worden volgehouden, beteekent alleen, dat **III-7**
de straf van het geweten soms een tijdlang op zich wachten doet.]

*) *(kantlijn:)*⟨met zulke dingen, waarbij het uitkomt, werken wij⟩

. . . .

Dit boek worde gelezen niet met een gezond hoofd – zooals Poincaré – maar met een nederige ziel.[19]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De ruimte der menschen is de erkenning van een zich afgesloten voelen van 'het andere', en het welgedaan *in* die afsluiting voortleven. Het welgedaan niet den rechten weg volgen, maar een omweg.⟧

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De faculteiten van den 'rechten weg' kunnen nu sluimeren, en die van den 'omweg' tieren welig.⟧

. . . .

⟨9⟩ Zie ⟦de meterij in de R_3 als tegenpolen van een menschelijke eigenschap, – niet in logica *zuiver* te zeggen, want is zelf logica en kan zichzelf niet omgrijpen, en zie⟧ de om zich grijpende wetenschap zooveel mogelijk blijven omkleven het oude, *(doorgehaald:)* ⟦Het ruimtecontinuum[20] komt door het tevreden zijn met het ruimtelijke doel der voorwerpen en *juist* daardoor verschijnt dan ook de ruimtelijke scheiding (,en⟧

De tijd treedt op als dat, wat de scheiding wel weer in orde kan brengen; *) In dat afgesloten wereldje zoekt men nu 'gevoel van veiligheid', d.w.z. 'weten', en daartoe 'meten' (bij zoo'n getal-weten komt dan rust).[21]

(niet-doorgehaalde toevoeging onderaan de pagina aan een grotendeels onleesbaar doorgehaalde zin op deze plaats:) heeft men het getal 'drie' ⟨met een maatstok⟩ in zijn bewustzijn weer te pakken, dan heeft men houvast, d.w.z. zit weer rustig in zijn oude hersenpartieering.

*) *(kantlijn:)*⟨a d.w.z. de zelfhandhaving in vloeiing van de scheiding; wat zondig is, gaat direct *leven.*⟩

. . . .

[Omdat ik andere menschen kan 'navoelen', kan ik ten slotte natuurlijk ook wel weer in mijzelf kijken.]

. . . .

III-8 Ze sluiten zich uitsluitend op in het bestrijden van de nooden, die komen uit de willekeurige scheiding naar ruimte, die de veruiterlijking was van henzelf.

En de directe totale wilsbereiking wordt vervangen door de bereiking van een projectie, n.l. de ruimtelijke, en dan dat *niet* direct, doch met moeizame tusschenschakels, want de rust binnen de hoofdpartieering moet telkens weer *gezocht* worden.[⟨10⟩]

. . . .

De tijd is n.l. de vergankelijkheid ⟨als gevolg⟩ der hersenpartieering, die moet worden bestreden, en daartoe wordt geassimileerd, door lichtzinnig te probeeren, ook *die* te tellen, en waarachtig .... het gaat; zoolang het duurt tenminste.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De Euclidische ruimte is *de* infinitesimale (d.i. grensruimte voor een beperkt gebied) voor alle ⟨continue⟩ ruimtes, [of ook in pl.v.d. Euclidische de projectieve?][22].

Het is de drie-dim. ruimte *zonder meer.* Dit moet nu echter ook genetisch-logisch bij den arithmetischen opbouw zijn toe te lichten.⟧

. . . .

⟨10⟩doch met moeizame tusschenschakels, ⟦zooals⟧ want de rust binnen de hoofdpartieering moet telkens weer *gezocht* worden, ⟦hetgeen is de *tijd*, waarin wordt *berekend*⟧

Dat wiskundige gedoe in tijd en ruimte van de wereld kun je alleen vaag artistiek benaderen (hier gebruik ik de logica scherp – tot zelfontkenning, de eenige juiste manier) met je logica; zoo kunnen logisch verschillende benaderingen van den tijd alle juist zijn; het doel moet zijn om de gevoelskleur *over* tijd en ruimte, – die zelf daarbuiten is – weer te geven, en de eventueele zegen daarop blijve aan God overgelaten. ⟨De taal is eigenlijk voor wiskunde *zeer*, voor philosophie *niet* geschikt.[23]⟩ **III-9**

....

Schopenhauer spreekt altijd *over* zijn filosofie, die zoodoende een plaats gevend in 't gewone leven uit 'eerzucht'. Maar dat is onzin.

....

De ⟨wisk.⟩ tijdsvoorstelling ⟨anders dan de tijd-zonde⟩ is het 'tijdmeten', komt uit de 'waarneming met schrik' van herhaling buiten onzen wil; cf. de voorstelling van den tijd als uurwerk.

(kantlijn, na een onleesbare doorhaling:) ⟨Ruimte, meten zou al kunnen gebeuren vóór die schrik.[24]⟩

....

De eenvoudige platte ruimtevoorst. worden gedragen door de grillig gevormde halfcirkelv. canalen; de natuur is dan ook geen platte ruimte: alleen de veruiterlijking van onszelf daarin verschijnt ons als zoodanig; maar ze *mag* ons niet verschijnen; we mogen dus werken in onze driedim. ruimte, maar we mogen dat niet objectiveeren en zeggen: 'De ruimte heeft drie afmetingen'.[25]

....

De veruiterlijking der menschen heeft den waan der constantheid (de dieren hebben die niet), zoo willen ze tellen en meten, en dat schijnt zoo ook goed te gaan; maar intusschen gaat de tijd zijn gang niet alleen de meetbare, waarvoor nog troost is, ⟨en die is te assimileeren,⟩ maar ook de onmeetbare,⟨11⟩ d.w.z. de zelfveroudering.[26] **III-10**

....

De tijd van 'herinnering' in jezelf rustig [van tijdsorde der herinnering] is heel iets anders dan de tijd van het heden – de onverbiddelijke, de ⟨waargenome⟩ herhaling van feiten buiten eigen wil.[27]

(kantlijn:) ⟨Bij de eerste heersch ik, overziend, wiskundig; bij de tweede onderga ik nog, en als ik mij herstel tot heerschen, is het alweer het eerste

---

⟨11⟩ niet alleen de meetbare, ⟦die⟧ nog troost is, maar ook de onmeetbare, geworden.⟩

. . . .

(Poinc. p. 47) zijn opmerking over de demi-dieu zou gelden voor den psychologischen (herinnerings)tijd; niet voor den wetenschappelijken tijd.[28]

. . . .

Dit is weer een enkel woord voor twee geheel verschillende dingen, zooals zoo vaak in onze arme taal.[29]

. . . .

(kantlijn:) ⟨*Defin.* Een eindige hoeveelheid is een, die ik ten einde kan tellen: een, twee, drie, vier, ... (heb ik geteld 'twee', dan neem ik van de rest een willekeurige, en voeg daaraan 'drie'.⟩

Bewijs van de hoofdstelling der rekenkunde[30]:
Als ik een groep tel, kom ik, onafh. van de volgorde, tot een zelfde getal.

Verbind maar aan elk element van de hoeveelheid een stip; en voeg er de telwoorden een, twee, - - - vijf (b.v.) aan toe (als ik bij tellen in een zekere volgorde tot vijf kom.) Neem dan telkens een stip in een willekeurige volgorde er uit, resp. verbonden met één, twee, - - - vijf; dan heb ik achtereenvolgens er
III-11 uit genomen: stip plus *één*, stip ‖ plus *twee* enz. dus precies hetzelfde als bij de eerste telling. En is dus ten slotte niets meer in de bak over.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦'Leven en wiskunde' [een mathem. geloofsbelijdenis][31]. [Een dergel. diss. hoort in de wiskundige faculteit, omdat *die* alleen de zuiver theoretische bespiegelingen bevat; de anderen zijn alleen practisch. Geen wetenschap heeft zijn gronden in het intellect, alle in den *wil.*⟧

. . . .

Al naarmate der verdere centralizeering en axiomatizeering der wereldruimte (gewetenloos), wordt ze steeds meer vereenzijdigd en van zuivere fantazie ontdaan – *natuurlijk*, want de mogelijkheid dier axiomatizeering is *achteraf* gevonden; het centrum is dus een oogenblik verlaten, en er is entropiewinst, en men leeft in afwachting van instinct, d.i. afwachting van Karma, d.i. Karmaverzwaring.[32]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Zal men nu echter spreken over den wortel van iets, dan moet men komen op een hoog niveau, waar de oude taal niet geldt, *moet* men dus eenigszins mystiek worden. Was men begrijpelijk, dan sprak men niet over den wortel.

III-12 Binnen de begrijpelijke taal kan men alleen negatieve dingen zeggen.⟧

. . . .

Het drijvende bij de wetenschapscentralizeering is geweest de waan, ⟨strijdleus⟩ dat er zooiets als wetenschap was.

. . . .

De ⟨centralizeering der wiskunde⟩ zuivert langzamerhand de wiskunde en ook andere wetenschap.⟨12⟩

– De electrische tram analoog zuivert het personenvervoer; maar *alles* ten koste van veel vervuiling elders.[33]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Toen de menschen meetkunde gingen doen: het afleiden van een stelling uit een andere: het 'bezitten' van een waarheid, niet *direct*, maar op grond van een andere (dán is het tóch scheeve bevrediging, en niet het ware), en dán komt de zucht tot afsluiting van dat tuimelsysteem (analoog als de poging tot vorming van een *staat*), en gaat men een stelsel met definities en axioma's maken. Maar evenals de *staat* is ook *dit* wel af te ronden, maar het geeft zooveel‖ ellende op ....*(rest van de zin onleesbaar.)*[34] **III-13**

Voor de rustig*(?)* afgesloten doorjagenden is dit boek niet geschreven.⟧

[Dan weet ik b.v. van een driehoek de oppervlakte in een getal (en getallen > 3 *leven* niet), maar wat zie ik dan nog verder van zijn eigenlijk wezen? ⟨dat er trouwens niet is, want het is eigen maaksel.⟩ Het blijft toch een zieke boel.] En de boel gaat zich dan toch vervormen, want de staat ⟨door de passie der indiv. los v.h. systeem⟩ en ook de wetenschap ⟨door de vrije opbouw los v.d. axioma's⟩ krijgt steeds nieuwe *eischen.* Vroeger keek je naar driehoeken, nu naar stralenbundels.

De vervorming ⟨van de logistische gronden⟩ is als van den staat: van vervolkomening (ter lekstopping of uitbreiding) of van vernieuwing. *(plus onleesbaar doorgehaald fragment)*

. . . .

Menschen zeggen: 'Een eik is grooter dan esch' (.... 'daar zijn allen het toch wel over eens'), maar Hegel leert, dat het toch maar betrekkelijk is. Natuurlijk, het is alleen zoo, zoolang de verschillende menschen in zeker opzicht hetzelfde *willen.*

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De onderzoekingen van Salmon in een centralizatiegebied **III-14** hebben alleen zin in het opsporen van feiten, oordelen, die misschien wel eens te pas kunnen komen. Waarbij? Wel, de mathem. physica, die toch steeds de voeding der wiskunde blijft.[35]⟧

⟨12⟩ De ⟦mathematische logica⟧ zuivert langzamerhand de wiskunde en ook andere wetenschap.

. . . .

De dingen der natuur werken op de zinnen. Maar ⟨het worden⟩ dingen der physica, ⟨als betrokken⟩ op onze hersen⟨veruiterlijking.⟩ Het centrum *kent* ze niet.

Bij Faraday nog direct hersen‘aanschouwing’. Bij Maxwell afgesloten hersen‘-opbouw’, los van natuur.[⟨13⟩][36]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦(Diss.) ‘Ik vraag om bij het lezen hiervan niet te *denken* dan secundair, allereerst te luisteren naar binnen’. *(het doorgehaalde gaat door onderaan de bladzijde en bovenaan de volgende:)* Het make geen ‘indruk’, want dán zou het zijn neergezakt in lager sferen waaruit het moet wegblijven.[37]⟧

. . . .

Ieder die zoo duidelijk is, en uitlegt, dat heeft niet veel waarde, want het *echte* is niet duidelijk en afgesloten voor de logica.[38]

. . . .

III-15 *(doorgehaald:)* ⟦Het ‘in vergelijking brengen’ van een vraagstuk is meestal een pervers gedoe, niet direct gezond.⟧

. . . .

‘Harmonie-aandoening’ is ongestoorde prikkeling, van ⟨het mathematisch bouw-orgaan⟩ in de hersenen.[⟨14⟩]

. . . .

[Alleen als mathem. physica kan de wiskunde directe aanschouwing accompagneren. Maar is dan als wiskunde waardeloos, dat is prostitutie voor de menschen die in formuletjes (aanschouwingsloos) leven, en voor rekenaars.

Dus was Faraday iets, Maxwell niets.]

. . . .

De gewone kromme lijnen van vroeger: och, voor sommige dingen kom je er mee uit, maar meer wordt ook niet gepretendeerd.

. . . .

Zegt iemand werkelijk iets *nieuws*, dan kan hij er op aan, dat het onbelangrijk
III-16 is. Het be-‖ langrijke is altijd daar.

[⟨13⟩] Bij Maxwell ⟦doffe hersenmatherie,⟧ los van natuur.

[⟨14⟩] ‘Harmonie-aandoening’ is ongestoorde prikkeling, van ⟦de doel-middel tuimeling⟧ in de

. . . .

De scheiding tusschen arithmetik en geometrie is thans bezig opgeheven te worden, zooals vroeger die tusschen anorg. en org. chemie.[39]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Welke plaats bekleedt het 'empirisch feit' in de *zonde*? Immers het empirisch feit der collineariteit zien we met de oogen.⟧

. . . .

Men kan niet spreken over een machtigheid, die er al is; en dan zekere eigenschappen heeft; men kan haar opbouwen, en dan achteraf b.v. zeggen dat zij gelijkmachtig is met een zekere andere.[40]

. . . .

De ⟨vierzijde⟩stelling volgt uit het principe van de dubbelverbinding van twee punten,[⟨15⟩] die volkomen gelijkwaardig zijn (d.w.z. uit het beschouwen van punten als polaire splitsingen). *Immers* geef 4 lijnen, verdeeld in 2 paren, dan zijn de diagonalen gelijkwaardig. Treft dus de eene diagonaal de verbindingslijn
‖ van de snijp. der overst. zijden in één punt van een paar (bij de proj. opbouw **III-17**
verschijnen de punten ten opz. van 2 punten als 'gepaard'), dan de andere in het andere punt.[41]

. . . .

(doorgehaald, moeilijk leesbaar:) ⟦Ik *kan* overigens niet zeggen: 2 punten bepalen een r. lijn, of ik moet van elk punt van die rechte lijn duiden als iets van het ene punt gecombineerd met iets van het andere punt.⟧

Er is geen meetkunde van dimensies zonder *coördinaten*, alleen de eenvoudigste aanname over de coördinaten geeft de projectieve.

. . . .

Wees met de definities van 'Menge' voorzichtig; ze zijn misschien zoo min bestaanbaar als de contradictore 'class of classes not belonging to their elements' van Russell.[42]

. . . .

In de zon of in Blaricum kon ik met den besten wil uit het centrum niet afdalen tot de wiskunde, om *die* te centralizeeren.

---

hersenen.

[⟨15⟩] De ⟦grond⟧stelling ⟦der projectieve meetkunde⟧ volgt uit het principe van de dubbelverbinding van twee punten, Dat lukt alleen in een vuile verstikkende stad.

. . . .

III-18 Wiskunde, bedreven ⟨in de 2^e orde, à la scheikunde,⟩ kan een heeleboel wetten geven,⟨16⟩ zooals scheikunde, bedreven voor zichzelf, als je maar reacties probeert, allerlei nieuwe wetten geeft.

. . . .

Wat is alle rekenarij eigenlijk anders, dan terugbrengen van het ∞-dimensionale continuum op het eendimensionale.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦*Hfdst. 1.* Het empirische feit.
Hfdst. 2. De logica (waarom die onzin en flauwe kul)⟧

. . . .

Als ik een punt *niet* als polaire splitsing zag, dan zou de progressie van A naar B tusschen A en B besloten blijven, geen verderen voortgang hebben en A en B zouden een andere stelling hebben, als de tusschengelegen punten.[43]

. . . .

Als Piet zegt: Een Cretenser zei: 'Ik lieg altijd', dan ⟨heeft⟩ Piet ⟨van die Cretenser geen indruk van waarheid of leugen kunnen krijgen.⟨17⟩ Bedenk dat bij Dedekind, als die de gezamenlijkheid van al mijn voorstellingen wil omvatten. Dat kan niet, want dan was die verzameling er er eerst al blij *(moet zijn: bij).*

(hier uit voortvloeiende contradicties als van Russell, krokodilschluss, 'is niet herhaalbaar' enz.)[44]

. . . .

III-19 De samenknijping ⟨die de vereenzijdiging⟩ is,⟨18⟩ doet in andere dimensie de uitbreiding in den tijd volgen.[45]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦In den tijd is slechts verleden en toekomst. De laatste is de angst, die voert tot actie, en komt uit de vervaging en vereenzijdiging van het leven,die *verleden* is.[46]

Want herinnering is eo ipso eenzijdig, anders was het *heden.*⟧

⟨16⟩Wiskunde, bedreven ⟦voor zichzelf,⟧ kan een heeleboel wetten geven,

⟨17⟩Als Piet zegt: Een Cretenser zei: 'Ik lieg altijd', dan ⟦liegt⟧ Piet.

⟨18⟩De samenknijping ⟦der partieering⟧ is,

. . . .

Een 10-ritten boek geeft den menschen de rust in ’t hoofd, *) dat hij nog 9 maal mag.

Maar wat is dat anders dan een waan?

En zelfs de constantheid van *rust* bij dien waan wordt gestoord door dingen, die zgn. ‘tusschenbeide komen’.[47]

*) *(kantlijn:)* ⟨de *waan*rust v.h. getal, d.i. de verhouding van $\lesseqgtr$ t.o.v. alle ándere mogelijke getallen,⟩

. . . .

Je kunt van den ‘tijd’ allerlei verschillende ⟨negatieve⟩ dingen zeggen al naar het standpunt; want je moet uit den niet-tijd treden in een of ander ⟨populair-wiskundig⟩ standpunt met den tijd, en zulke standpunten zijn er vele.

. . . .

Kunst, maar ook wiskunde, zijn geboren uit het ⟨actieve⟩ leven,[⟨19⟩] en kunnen ook alleen door iemand uit het actieve leven in tusschenpauzen in zuivere ⟨lichtzinnigheid⟩ en zonder afdwalingen worden beoefend; ⟨al is het dan ook niet met zoo’n virtuositeit, die afgegrensd is.⟩ **III-20**

. . . .

Causaliteit wordt alleen gezien bij een in grillige willekeurigheid beschränkt gezichtspunt.[48] [Daarbij is dan verwaarloosd 1^0 dat er door de wanden van het vat verborgen kanalen van toe- en afvoer leiden 2^0, dat de vooronderstelde constantheid der wetten binnen het vat van allerlei niet-standvastige, maar als standvastig gerekende milieutoestanden, afhankelijk is; en vooral de waarde der elementen van den inhoud precair is en plotseling kan zijn verdwenen.] Het hangt steeds samen met een passie van vrees en begeerte: die ziet beperkingen en tevens onware constantheid van dat beperkte.

. . . .

Theorie van Van der Waals en alle math. phys.:

1^e *fout*: het zien van een gekweekt stuk natuur (gekweekt door de mathem. geest), als een mathematisch systeem.

2^e *fout*: het dát weer partieeren tot een rekenprobleem (bij een fout verval je op iets, dat zónder belang is.

(in de kantlijn en onderaan de blz.:) ⟨afbeelding van alle eendim. continu op elkaar, om voor elk het $\gtreqless$ te kunnen voorspellen, d.w.z. zeker zijn van.[49]⟩

[⟨19⟩] Kunst, maar ook wiskunde, zijn geboren uit het ⟦dagelijksch⟧ leven,

. . . .

III-21 [Alles beweegt, ook voor het gezicht. Als je loopt, loopen de torens. Maar er is *wil* naar vastheid.]

. . . .

Wetenschap is òf moreel de wereld als slecht ziend, òf middel tot het bereiken van je eigen doel, òf handelsartikel.⟨20⟩

. . . .

Iets te onderzoeken, is wel aardig; maar van den aard als bij het verstoppertjespelen; als je den sleutel weet, is er niets aan; het is de aardigheid, om een verlegenheid, door excentriciteit gekomen, zonder centralizeering op te heffen en te sussen.

. . . .

Wiskundige waarheid is ⟨voor velen⟩ iets goeds om van narigheid af te komen, en ze ⟨quasi⟩ op te heffen, door ze ⟨quasi⟩ in te zien.⟨21⟩

. . . .

Onwikkeling der wiskunde ⟨in de wereld:⟩ De methode reinigt zich en breidt zich uit; de elementen der methode worden allmählich dood; dan heeft de veruiterlijking der menschheid de natuur doordrongen, en moet zelf doodgaan.

. . . .

III-22 De 'punten' van het ⟨physische⟩ driedim. continuum, dat we 'ruimte' noemen, zijn de translatiestanden van ⟨een vast⟩ lichaam.[50] De deelbaarheid der scheiding van die standen stellen we voor de wiskunde onbegrensd: zoodoende krijgt de rekenkunde vat op de physica door middel van het rekenkundig geschapen mathematisch driedim. continuum.[51]

. . . .

De R_3 der samenleving is een conventie van grofheid van onderscheiding, waarin de wereld van verstandhouding kan bestaan. *(volgt een onleesbare doorgehaalde toevoeging)* Theosofen verfijnen het; maar de wereld moet niet worden uitgebreid, doch opgeheven.

. . . .

⟨20⟩Wetenschap ⟦die gezegd wordt⟧ is òf moreel de wereld als slecht ziend, òf middel tot het bereiken van je eigen doel, òf handelsartikel.

⟨21⟩Wiskundige waarheid is ⟦alleen⟧ iets goeds om van narigheid af te komen, en ze op te heffen, door ze in te zien.

(doorgehaald:) ⟦Dat de punten van R_1, R_2 en R_3 gelijkmachtig zijn, is geen wonder , als we letten op *(eerdere doorhaling binnen het doorgehaalde:)* ⟦Poincaré Valeur de la Science⟧ de genesis uit de physische ruimte, ⟨de eenheden waarvan⟩ we al naar de coupures kunnen schikken in een verschillend aantal afmetingen.[52]⟧

. . . .

Poincaré 'V.d.l. S.' p. 100 2^e al.[53]

. . . .

Al het gepraat van Poincaré doet niets af aan Kant's aprioriteit. De kwestie daarvan is logisch steeds van twee kanten aan te pakken, alleen moreel is ze op te lossen.

. . . .

Kant wil met zijn aprioriteit van de ruimte eigenlijk niets zeggen, dan dat je bij zelfbekijking van het bewustzijn van iets moet uitgaan, en dan wel niet kunt buiten het tellen en de ruinte.[54] **III-23**

. . . .

Poincaré 'V.d.l.S.' I; IV; § 4.

pag. 119. Van S en S' als inversen kan ik niet spreken, want de eindstand van S is niet dezelfde als de beginstand van S'.

Maar van 119 tot 122 laatste alinea is overbodig. Het daarop nog volgende is voldoende, om de correspondentie èn identiteit der beide ruimten te grondvesten.[55]

. . . .

Bij grondslagen-zoeking: 1^e de theoretische fase (Cantor, Lobatch.)⟨22⟩
2^e de empirische fase (Helmh.)⟨23⟩) (Poincaré)
3e de philosophische fase (Hegel, Bolland)[56]
4e de religieuze fase.

Zoo zeg je het 'wiskundig' dus fout.

. . . .

Het moet te bewijzen zijn, *) dat in de algemeene ruimte van ω afm.; van ω coördinaten, die elk een getallenreeks voorstellen ⟨(natuurlijk mag ik die coörd. vervangen door ω onafh. functies ervan)⟩ geodetische lijnen op allerlei wijzen zijn te trekken; doch dat de projectieve betrekkingen, ⟨die⟩ alleen dáár komen, waar de geodetische lijnen gepaard gaan met geodetische vlakken, ⟨uit hoofde

⟨22⟩ Lobatchevski

⟨23⟩ Helmholtz

daarvan⟩ alleen kunnen zijn als de geodetische lijnen lineaire betrekkingen zijn tusschen de coördinaatstellen der eindpunten (d.w.z. de coördinaatstellen, zooals ze volgen uit een willekeurige transform. door ω onafh. functies)

(kantlijn;) ⟨m.a.w. als in de algemeene vgl. der geodetische lijnen de parameters lineair voorkomen.⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨En het is ook bewezen door de Kleinsche getallengeverij;[57] want getallen, die zoo komen, *moeten* functies zijn van de oorspronkelijke coördinaten,⟩

....

III-24 Ga eens na, of het het onbepaald te verfijnen physisch continuum ⟨van één dimensie⟩ (van Poincaré volgens $A = B$; $B = C$; $A \neq C$; dat dus van zelf überall dicht is) volgens Cantor niet gelijkwaardig is met de 'Geordnete Menge' η. Ja natuurlijk.[58]

....

(Zie onderaan vorige pag.) Gaat door alle twee punten *één* rechte lijn, dan wil dat zeggen, dat langs die weg een of andere integraal minimaal is. De rechte lijn moet dus uitteraard *(sic!)* de rol spelen van geodetische lijn.

Zullen nu die geodetische lijnen zich laten vereenigen tot geodetische vlakken (d.w.z. vlakken zóó, dat een geod. lijn tusschen twee van zijn punten er geheel in valt), dan ⟨komen de geometrieën van Hamel.[⟨24⟩ 59]⟩

....

Maar heb ik nu maar twee coördinaten? Dan ⟨zullen,⟩ als we niet het Eucl. of niet-Eucl. afstandselement hebben, en bij toevoeging van een nieuwe coörd. z *altijd* – ⟨op welke wijze⟩ nu ook het integraalelement door toevoeging van de
III-25 z wordt uitgebreid[⟨25⟩] –‖ geodetische lijnen het twee-dim. oppervlak moeten verlaten; m.a.w. het twee-dim. oppervlak, dat *in zich* variabele kromming heeft, verliest zijn geodetische lijnen, als het in een hoogere ruimte wordt geplaatst.[60]

....

[Killing § 72.][61]

....

[⟨24⟩] Zullen nu die geodetische lijnen zich laten vereenigen tot geodetische vlakken (d.w.z. vlakken zóó, dat een geod. lijn tusschen twee van zijn punten er geheel in valt), dan ⟦moet de functie onder het integraalteeken zijn van den vorm van ⟨het element⟩ der afstandsformule van Eucl. of niet-Eucl. meetkunde [na of zonder *[?]* coörd. transformatie natuurlijk].⟧ *(met in de kantlijn, ook doorgehaald:)* ⟨m.a.w. de functie φ moet zijn een kwadr. functie van de coördinaten.⟧ *(volgt nog een totaal onleesbare doorhaling in de kantlijn.)*

[⟨25⟩] ⟦hoe⟧ nu ook het integraalelement door toevoeging van de z wordt uitgebreid *(doorgehaald, moeilijk leesbaar:)* ⟦Willekeurige afgrenzing uit tijdloos leven tot 'leven voorzoover het oogenblik zelf betreft'.

Straf het ontdekken der tijdsverslaving, het waarnemen van *werking* buiten den ⟨eigen⟩ wil om ⟨de vreesachtige erkenning waar van trouwens al in de ..*[?]* een afgrenzing lag.⟩ Weer sussende afgrenzing in het zien van die werking als een *herhaling* in den tijd (causaliteit).

Straf in 1^e de wonderen, 2^e het getob om zuiver te reageeren op die waargenomen causaliteit. *(einde doorhaling, met in de kantlijn nog een onleesbare doorgehaalde toevoeging.)*

....

⟨Is de⟩ tweepunt-functie van Lie ⟨niet⟩ altijd te beschouwen als integraal van ⟨de⟩ infinitesimale tweepuntfunctie, geintegreerd langs de minimaalkromme? Volgt dat niet uit de groepeigenschap?

....

⟨Ja, want de⟩ voorwaarde, dat de infinitesimaalfunctie invariant blijft, ⟨sleept mee, dat⟩ *zeker* ook de integraal langs de minimaalkromme invariant blijft. ⟨Maar daar 2 punten maar één invar. kunnen hebben, is dat ook *de* invariant.⟩

(kantlijn:) ⟨Intusschen heeft een infin. functie niet altijd een eindige functie; immers de minimaalkr. hoeft er niet te zijn. c.f. Lie III pg 488. En omgekeerd bepaalt de eindige 2 puntsfunctie niet altijd een boogelement (alleen als de infin. invariant homogeen van 1^{ste}, niet van 0^{de} orde) c.f. Lie p. 506.[62]⟩

....

(doorgehaald:) ⟦Misschien is dan de stelling midden op twee pagina's vroeger te bewijzen met behulp der ontwikkelingen van Lie.⟧ **III-26**

....

Uit de Boltzmann'sche probabiliteitsleer volgt, dat elk oogenblik emanaties moeten komen.[63] Een van die emanaties zijn de menschen zelf; maar in plaats van weer zuiver tot het stof weder te keeren, gaan ze zich 'veruiterlijken' (b.v. door locomotieven), d.i. de emanatie willen handhaven, d.i. ten opzichte van het geheel 'overdrijven', en ..... hoogmoed komt voor den val.

De sterving zal nú gaan in catastrophe, met ⟨schok⟩ en pijn,[⟨26⟩] in plaats van geleidelijk blijmoedig.

....

De journalistiek (werken op een opgenomen vleugje) in de wiskunde te laken. In de grondslagen–litteratuur is ze tegenwoordig anders zeker.

[⟨26⟩] De sterving zal nú gaan in catastrophe, met ⟦stof⟧ en pijn,

. . . .

(doorgehaald, veelal moeilijk leesbaar:) ⟦Want vooreerst is licht in te zien, dat vrije bewegelijkheid van het pl. vlak (zóó, dat elk punt in elk punt kan ⟨komen,⟩ uniforme distributie van het boogelement, dus constante kromming eischt.[64]

En zoo zal ook wel mogelijk zijn ⟨direct te bewijzen,⟩ dat als de opl. van *(onleesbaar doorgehaald fragment.)* $\int \varphi(x, y, z) dxdydz$ van zoodanigen ∥ vorm is,
III-27 dat $z = \alpha$ een tweevoudige schaar van geodetische oplossingen geeft, dat dan de kromming constant is.⟧

. . . .

Klein bewijst, dat *als* de projectieve meetkunde (met haar pl. vlak axioom) arithmetisch mogelijk is, dat ze dan eenvoudig op de mengmeetkunde ⟨zonder meer⟩ moet neerkomen. Maar dat de mengmeetkunde mogelijk is, zien we arithmetisch direct in.[65]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Deze stelling: dat als de geodetische lijnen zich laten samenvatten tot geodetische vlakken, dat dan de kromming constant is, is na de getalleninvoering volgens Klein terug te brengen tot de volgende [wanneer ik n.l. de getallen van Klein als nieuwe coördinaten neem][66]

Stelling: Welke ds kan ik in de gewone anal.-projectieve meetkunde aannemen, opdat $\int ds$ minimaal worde langs de rechte lijn?

Wel, alleen den Eucl. of niet-Eucl. ds ⟨d.w.z. de dubbelverh. t.o.v. een kegelsnede,⟩ m.a.w. is $\int ds$ minimaal langs de rechte lijn, dan is de kromming constant.

Dit moet dan toch wel af te leiden zijn uit de algemeene diff. vgl. der rechte lijnen.⟧

(rest van de pagina is ook doorgehaald, en vrijwel onleesbaar. Waarschijnlijk staat er:)

⟦We moeten dus vinden, dat de eenige ds, die minimaal is langs de rechte lijn, is van de vorm:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 \pm \frac{(ydx+xdy)^2}{4k^2}}{(1 \pm \frac{x^2+y^2}{4k^2})^2} ⟧^{67}$$

. . . .

III-28 [De op te lossen diff. vgl. (partieel met 3 verand.) wordt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y'} = y' \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial y'} \quad (1) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y'} + y' \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial y'} \quad (1)^{68}$$

of ook:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}=z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\quad(2)\qquad\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}+z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\quad(2)$$

Voldoet b.v. ⟨aan⟩ deze diff. vgl.:⟨27⟩

$$\varphi(xyy^{'})\equiv\frac{\sqrt{1+y^{'2}\pm\frac{(y-xy^{'})^2}{4k^2}}}{1\pm\frac{x^2+y^2}{4k^2}}$$

Schrijf daartoe:⟨28⟩

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\left\{1+y^{'2}+\frac{(y-xy^{'})^2}{4k^2}\right\}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})^2\sqrt{}}\left(-\frac{2y}{4k^2}\right)+\frac{\frac{y-xy^{'}}{4k^2}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})\sqrt{}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y^{'}}=\frac{y^{'}-x.\frac{y-xy^{'}}{4k^2}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})\sqrt{}}$$

$$y^{'}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y^{'}}=\frac{\{y^{'}-x.\frac{y-xy^{'}}{4k^2}\}.\frac{-2yy^{'}}{4k^2}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})^2\sqrt{}}+\frac{\{y^{'}-x.\frac{y-xy^{'}}{4k^2}\}\{-\frac{y-xy^{'}}{4k^2}\}.y^{'}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})(\sqrt{})^3}+\frac{-\frac{xy^{'}}{4k^2}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})\sqrt{}}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y^{'}}=\frac{\{y^{'}-x\frac{y-xy^{'}}{4k2}\}.(-\frac{2x}{4k^2})}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})^2\sqrt{}}+\frac{\frac{y-xy^{'}}{4k^2}.y^{'}\{y^{'}.x\frac{y-xy^{'}}{4k^2}\}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})(\sqrt{})^3}+\frac{-\frac{y-xy^{'}}{4k^2}+x\frac{y^{'}}{4k^2}}{(1+\frac{x^2+y^2}{4k^2})\sqrt{}}$$

Het blijkt werkelijk uit te komen.⟨29⟩

’t Is nu alleen nog maar de vraag, of er geen andere oplossingen zijn, dan juist die van de Eucl. en niet-Eucl. meetkunde.] **III-29**

....

(doorgehaald:) ⟦Van de functie φ weten we alleen, dat het verdwijnen van

$$\varphi_0\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y^{'}}-y^{'}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y^{'}}$$

een gevolg moet zijn van de substitutie
$y^{'}=a$
$y=ax+b$
Dus $\quad\varphi_0\equiv\sum(y^{'}-a)^m(y-ax+b)^nf(x,y,y^{'})$, maar

⟨27⟩ Voldoet b.v. ⟦na substitutie⟧ deze diff. vgl.:

⟨28⟩ ⟦alle rechte lijnen? *(verder onleesbaar)*.⟧ Schrijf daartoe:

⟨29⟩ ⟦En bij substitutie⟧ blijkt ⟦dat⟧ werkelijk uit te komen.

$\frac{\partial\varphi_0}{\partial a} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial b} \equiv 0$. In φ_0 mogen a en b niet optreden.

In elk geval is φ_0 een der diff. vgl. der eerste orde (die ook constanten mogen bevatten), waaraan alle rechten lijnen voldoen.⟧

. . . .

Het blijft noodig, om op te lossen de diff. vgl.:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} + z\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}$$

$$(1 - z\frac{\partial\varphi}{\partial z})\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}$$

(doorgehaald:) ⟦(Identiek met het vraagstuk is: hoe kan ik een vectordistributie kiezen, opdat de lijnintegraal minimaal wordt langs de rechte lijn?) ⟧

⟨Maar nu meen ik te herinneren, dat ál de dubbelverhoudingen van Hilbert[69] minimaal zijn langs de rechte lijn (dus alle oplossingen zijn van de diff. vgl.; het zijn dus niet alleen de Eucl. en niet-Eucl.). Wat blijft er zoo dan over van Pieri en Mannoury?⟩

. . . .

III-30 Het 'samenleven' in de 'ruimte' ⟨een 'innehalten' van het 'ruimteidee'⟩ behoedt voor afdwalingen van zekeren aard, zooals een 'recept van vaste tax' (uit de apotheek) ook behoedt voor afdwalingen van zekeren aard.

. . . .

[Hoe komt men aan het axioma der differentieerbaarheid van physische functies?[70] Wel, doordat men de maatafstanden ⟨op de⟩ verschillende continua vrijwillig 'zusammengehörig' kiest (het tijdsaxioma van eenparige beweging bij de limiet) ⟨Zoo meet men den tijd, dat dat axioma uitkomt.[71]⟩

. . . .

(kantlijntoevoeging:) ⟨Omdat we waarnemen dat bij zusammengehörige *aantallen* de traagheidswet heerscht, d.w.z. waar ik niet zooiets opmerk, heb ik geen physisch verschijnsel, dat ik bestudeeren ga; en schrijf ik het aan het toeval toe.⟩

. . . .

(doorgehaald, moeilijk leesbaar:) ⟦*Slotsom* Het systeem zit in elkaar, maar *gronden* heeft het niet. Dat het in elkaar zit, is verlokking van den duivel. Het beste ware je er uit weg te keeren.⟧

. . . .

Trouwens, het is er mee als met andere wetten: wij doen maar blindweg tegen de wereld, alsof ze er zijn; ze zijn onze *dwaze* veruiterlijking.

(kantlijntoevoeging:) ⟨Die traagheid en interpoleerbaarheid is n.l. onze voorwaarde (want onze organen hebben inertie), om de verschijnselen meester te worden. Wél kunnen we verfijning der instrumenten verwachten, en dan in 't kleine misschien heel ander gedrag der functies, maar tòch dan daar weer differentieerbaar.⟩

. . . .

En het brengen van steeds meer uit het toeval in de wettenwereld: het is het *eten*, dat het menschelijk systeem doet, maar machteloos: van achteren loopt het er weer uit, en de vorraad blijft zonder eind.

. . . .

(Het grootste deel van deze pagina is doorgehaald en moeilijk leesbaar:) ⟦Men wil **III-31**
de verschillende waargenomen grootheden der werkelijkheid meten, d.i. tellen met zekeren maat. Men wil nu die maten zoo kiezen, dat steeds gelijke getallen zusammengehörig zijn.

Men moet dus de allereerst zich opdoemende maatsoort gaan transformeeren, en dat kan men alleen doen, door bekende operaties op het getallencontinuum toe te passen en die hebben alle de eigenschap van continuiteit en differentieerbaarheid (en eindigheid bij de limiet). Zoo komt men aan het axioma.

Zal ik twee maten op een bepaalde nieuwe grootheid als zusammengehörig kunnen beschouwen, dan moeten ...*(?)* en moeten ze zóó gemeten worden dat het het getallencontinuum van de nieuwe zich door een eenvoudige continue operatie op dat van de oude laat afbeelden.⟧

kantlijn:) ⟨Met geen ander axioma, dan dat der traagheid er bij, kan men door waarneming alle functies, zoo nauwkeurig als men wil, meester worden. Zonder dat axioma zou alle waarneming niets geven. Daar komt bij (maar dit is niet essentieel), dat de eenvoudigste gebouwen van afbeeldingsfuncties, die men kan hypotheseeren, ook differentieerbaar zijn.[72]⟩

(terug in de tekst, wederom doorgehaald:) ⟦De algemeene blik op de wereld, waarin zich laat meten en tellen, het is een intuitieve, maar een sterk afgegrensde. Hij is Darwinistisch gegrond; de Euclidische meetkunde ook. We zitten er in vast, en ook in het wetenschappelijk centrum van continuiteit.⟧

(kantlijn:) ⟨De herleiding van alles op kleine vaste lichamen is naturgemäss; want vaste lichamen zijn de weerspiegeling van onze veruiterlijking, de dingen, waarop wij met onze veruiterlijking vat hebben.[73]⟩

. . . .

De menschen prijzen een werk, als het 'grundlegend' of 'bahnbrechend' is. Maar het geweten vebiedt gronden te leggen of banen te breken. ⟨En van Plato en de bijbel wordt het niet gevoed, wel van Kant.⟩

. . . .

Alle wetten zijn benaderingswetten: het afgeslotene kan zich laten gelden, en dan gaan bij de limiet de wetten niet meer door. Ook niet b.v. de gravitatie.

. . . .

(kantlijn:) ⟨Wat zijn de essentieele grootheden v. een phys. systeem? En tegelijk de *meetbare* (d.i. nooit ∞) en continue? Die te betrekken zijn op een graad van eigen spierbeweging. (Dus wel b.v. een hoek, maar niet zijn *tg*.)⟩

. . . .

III-32 Dat wij de ⟨physische⟩ continuiteit waarnemen als ononderscheidbaarheid van het verschillende tot zekeren grens; dat is ⟨de grond van onze traagheids-postuleering voor al het spier-meetbare in de natuur.[⟨30⟩]⟩

. . . .

[Volgt uit de Helmholtz-Lie-sche voorwaarden niet, de samenligging der minimaalkrommen (geodetische krommen) tot minimaalvlakken?][74]

. . . .

[Nagaan de minimumoppervlakken der niet-Eucl. meetkunde.]

. . . .

Zijn empirisch de evenwijdige lijnen met minder benadering waar, dan de bewegingen van vaste lichamen? ⟨Als we de laatste onafh. v. differentieerbaarh. (Hilbert) nemen wél, maar, differentieerbaar à la Lie, toch waarsch. niet.[75]⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Mengenlehre uit de Encyklopedie der Math. Wiss.⟧

. . . .

De reiniging der wiskunde zou zin hebben, als ze zuiver van zelf werd geboren; maar men spant er zich voor in (vervuilt dus in andere opzichten des te meer). *(volgt nog een onleesbare doorhaling)*

. . . .

[⟨30⟩] *het doorgehaalde origineel van deze gecorrigeerde zin is grotendeels onleesbaar.*

De projectieve axioma's blijken empirisch te gelden voor den loop der lichtstralen. *) Verder kan ik die minimumlijnen natuurlijk op ∞^{15} manieren *in* zich verplaatsen.⟨31⟩ Een groep van ∞^6 van die soort nemen wij thatsächlich waar, met ‖ de volgende eigenschappen [natuurlijk alleen bij benadering te constateeren] *(tussen onleesbare doorhalingen:)* De 'freie Beweglichkeit' van Lie. D.w.z. 2 punten hebben een invariant, meer dan 2 punten niet. Zijn 2 punten vast, dan één kromme, die ze verbindt (n.l. hun verbindingslijn). **III-33**

Uit deze gegevens is dan af te leiden, dat we met de groep der niet-Eucl. meetkunde te maken hebben (vgl. Lie III p.542).

(*Voeren* we óók nog empirisch in, dat we een punt z'n coördinaatgetallen kunnen bepalen met behulp van het maatstokje, dan blijft alleen de Euclidische meetkunde over.

(kantlijn:) ⟨Bij Hilbert Grundl. Math. Ann.[76] wordt wel bewezen, dat er geen andere geometrieën zijn, die aan de axioma's voldoen; maar niet dat de axioma's zelf kunnen bestaan in de Zahlenebenen.⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨Een der integraalelementen die minimaal zijn langs de r. lijn blijkt te zijn het aantal malen, dat een elementairstokje kan worden uitgezet langs het kromme-element.⟩

....

Het leven van de menschheid als geheel is eigenlijk een algeheele terugtrekking in een schuilhoekje, om zóó het leven te kunnen houden.

....

(doorgehaald, moeilijk leesbaar:) ⟦Men kan wel iets nieuws vinden, maar dan over iets, dat men tevoren zelf heeft gemaakt⟧

....

Het wiskundig substraat heeft alleen zin, als toegepast op het levende, d.i. werkend met het levende; en des te vollediger *die werking* wordt, des te minder werkt de actie van den levenden inhoud in, die toch de eenige zuiver ontwikkelende prikkel is. Wij, d.i. onze veruiterlijking, leven *door* den prikkel van buiten, en heeft de veruiterlijking dien prikkel verwonnen, vermeesterd, dan heeft ze van achteren tegelijk haar eigen verbindingen verloren.

....

(doorgehaald:) ⟦Uitbreiding van een theorie (mathem. of phys.) komt altijd **III-34**
hierop neer, dat een nieuwe theorie wordt opgebouwd, die de oude als bijzonder

---

⟨31⟩ Verder kan ik ⟦het 'Gütten' van de stralen⟧ die minimumlijnen natuurlijk op ∞^{15} manieren *in* zich verplaatsen.

geval omvat (hierbij intusschen werken we met die oude theorie, althans een deel er van; het is dan de veruiterlijking toegepast op de veruiterlijking d.i. veruiterlijking in de tweede macht; uit den booze.)[77]⟧

....

Die uitbreidingen–veralgemeeneringen kunnen alleen worden *toegepast* op combinaties, gevormd volgens de oorspr., niet veralgemeende theorieën (Euclidische meetkunde en gewone getallen), ze zijn dus niet 'primair aan' maar 'volgend op' den gewone combinaties. [Zoo zijn quaternionen niet veralgemeeneringen van gewone getallen, maar er uit opgebouwd.]

....

En zoo is de gewone Eucl. meetkunde primair [uit 2 *onafh.* coörd. en ⟨dan de 'afstand' uit⟩ de wet van behoud van het arbeidsvermogen.]

[Zóó kunnen we – trots alle theoretici – komen tot de grondslagen *zonder* de vrije bewegelijkheid van een vast lichaam.]

(De kantlijn bevat nog een onleesbare doorhaling)

....

III-35 *(doorgehaald:)* ⟦Een hypothese is een sleur (die ten gevolge heeft, dat de dingen volgens *regels* en *wetten* worden waargenomen), bekeken met het hoofd.⟧

....

[Het gedoe van Veronese met zijn telkens weer invoeren van *hypothesen*, is niets, dan het vormen van logische assemblages; *als* voor zekere dingen (ik weet niet, of ze er zijn) die en die relaties gelden, *dan* ook die en die relaties.][78]

....

(doorgehaald, na een onleesbare doorhaling:) ⟦Logica is leer van de contradictie: gevoel van weerzin in 't hoofd; maar leert niets levends.

....

Zoo is een classificatie van kwadr. oppervl. goed, om in gegeven gevallen te *dwingen* tot een bepaalde voorstelling, om voor afdwalingsvoorstellingen te behoeden.

....

Is het pot. veld met *rot.* en *diverg.* niet sitaal te definieeren? En dan alle sitaal analoge pot. velden uit elkaar over te schrijven?⟧

....

(volgt onderaan de pagina nog een onleesbare doorhaling)

....

⟨*Uit vrije bewegelijkheid* zonder dat de afstandsinvariant uitdrukkelijk genoemd wordt, komt Hilbert toch klaar, hij noemt afstanden van puntenparen gelijk, als ze in elkaar kunnen worden overgevoerd, en leidt dan een afbeelding der verschillende afstanden op de punten van het getalcontinuum af.[79]⟩ **III-36**

....

De walgelijke menschen leven in verwondering en hoop ten opzichte van gebeurlijkheden in hun wiskundige onderzoekingen, alsof dat werkelijke levensfeiten waren. Griezelig om te zien.

....

[Extract uit Lie Sächs. Ber. 86[80]

....

Aanmerking op Helmholtz 1^e De termen der 1^{ste} orde kunnen toch wel wegvallen en die van hoogere orde toch nog getransformeerd.

2^e De groepen van beweging waar vrije bewegelijkheid alleen 'in 't algemeen' plaats vindt. Bij elk hiervan de ruimte verdeeld in ∞^2 curven, die in elkaar overgaan; houdt men één punt vast, dan ook alle punten der daardoor gaande curven.

De monodromie van Helmh. is een gevolg van de 3 andere axioma's, wanneer men aanneemt, dat de ruimte zich *niet* zóó in ∞^2 curven laat verdeelen, dat elke curve eventueel slechts in haar geheel kan vastblijven.[81]

De Eucl. en niet-Eucl. zijn aldus te karakteriseeren:

a) contin. transform. groep. *(analytisch)*

b) Houdt men punt en een lijnelement daardoor (binnen een zeker gebied) vast, dan is nog continue beweging mogelijk; niet echter, als óók nog een vlakte-element wordt vastgehouden.

In analoge wijze is te karakterizeeren voor n afm.]

....

He ja – ik kan tellen en herhalen, merkt men, en men kan er op leven, merkt men ⟨en past mathematische inductie toe⟩ – zooals men merkt in huizen te kunnen leven, ⟨en zet het lichtzinnig voort,⟩ maar: de kruik gaat zoolang te water, tot ze breekt.

....

Het is ⟨mijn⟩ afkeer van het *strijdend leven*, die zich ⟨hier⟩ projecteert als *inzicht*, dat het intellect natuurlijk alleen zin heeft als *middel* in den strijd om het bestaan.⟨32⟩

. . . .

(doorgehaald in de kantlijn, zeer moeilijk leesbaar:) ⟦De lineaire eigenschappen alleen (...) leiden tot ... (zonder bewijs). De spherische eigenschappen alleen zijn voldoende voor de ..., volgens Lie. Ze sluiten dus de lineaire eigenschappen in; bij Hilbert in 'Grundl. Math. Ann.' wordt de rechte lijn er zelfs uitdrukkelijk ge... De spherische eigenschappen kunnen worden afgeleid uit – en dus ook geheel worden vervangen door – de constantheid der kromming ... En zoo is ook het bewijs van Lie te vervangen door dat van Riemann, ... met de constantheid der kromming.⟧ [82]

. . . .

(doorhaling onderaan de pagina) ⟦Hilbert Grundl. in Mathem. Annalen. De begrenzing van het 'in sich transformierte' deel der 'Zahlenebene' speelt toch altijd een bijzondere rol. Wordt dat wel genoeg 'zuvorgeheben'? En hoe staat het hiermee bij Lie?⟧ [83]

. . . .

. . . .

⟨32⟩Het is ⟦den⟧ afkeer van het *strijdend leven*, die zich ⟨hier⟩ projecteert ⟦in 't intellect⟧ als *inzicht*, dat het intellect natuurlijk alleen zin heeft als *middel* in den strijd om het bestaan.

Notes

[1]Deel I, Band I, sectie A behandelt 'Arithmetik und Algebra'. Het tweede hoofdstuk hiervan gaat over 'Kombinatorik' (permutaties en determinanten). Sectie B behandelt rationale functies. Het tweede hoofdstuk in deze sectie gaat over rationale functies met meerdere variabelen. Het is niet duidelijk waar Brouwer precies naar verwees.

[2]Het vierde hoofdstuk van deel 1, Band 1 sectie A (Arithmetiek) behandelt o.m. transformatiegroepen.

[3]Dit gaat over Hamels dissertatie die in 1901 in de Göttinger Nachrichten verscheen. Deze dissertatie verscheen ook (in bewerkte vorm) in de Mathematische Annalen nr. 57 in 1903

[4]Wellicht bedoelt Brouwer dat wiskunde slechts bestaat bij de gratie van ongelijkheden in de ons omringende wereld.

[5]'Klein' slaat waarschijnlijk op zijn *Erlanger Programm* of op de *Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie.*
'Mannoury' op diens *Methodologisches und philosophisches zur: Elementar-Mathematik.*

[6]Over transfinite getallen: als het scherp geformuleerd en gedefinieerd is, blijven de mensen elkaar begrijpen. En wat het nut betreft: voor de functietheorie mogelijkerwijs. Vergelijk de opvatting van Hilbert uit *Über das Unendliche.*

[7]Het niet eerst zelf opbouwen kan tot grote abstracties en zelfs tot contradicties leiden. Vergelijk de Russell-paradox, gevolg van het niet eerst de elementen van een verzameling opbouwen alvorens de verzameling te definiëren.

[8]Deze vraag aan Cantor is waarschijnlijk naar aanleiding van zijn artikelenserie in de *Mathematische Annalen* 46 en 49, *Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*

[9]Weer tegen de fysica als waarheid onthullende wetenschap; het geeft slechts een model.

[10]Het betreft hier het artikel *Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Verteilung des Lobatschewski–Preises* uit 1897. Klein begint zijn rede 'algemeen', om zo vanzelf bij het werk van Lie uit te komen. Hij stelt als eerste vraag: waar komen de axioma's vandaan? Het zijn geen noodzakelijkheden van innerlijke aanschouwing. 'Noodzakelijkheid' is hier slechts 'gewenning'. Komen axioma's dan uit ervaring? (Helmholtz) Ervaring speelt zeker een rol bij het ontstaan daarvan.
Klein stelt dan: resultaten van een waarneming gelden slechts binnen zekere grenzen van nauwkeurigheid en onder bepaalde voorwaarden. Bij het opstellen van axioma's nemen wij een absolute precisie en algemeenheid aan, in plaats

van de benadering in nauwkeurigheid en voorwaarden.
Hier ageert Brouwer tegen.

[11]Innig (=innerlijk) begrip ter controle van de juistheid van wiskunde is voor Brouwer regel, in plaats van een 'uitwendig' (= van buiten komend) teken. Dus intuïtie in plaats van ervaring.

[12]D.w.z. het denken zelf is geen gedachte; vgl. de Russell paradox.

[13]Dit klinkt als een negatief oordeel over het begrip hypothese, maar het lijkt niet een onjuiste uitspraak. Immers een hypothese wordt altijd uitgedrukt in eerder geformuleerde, dus reeds bekende begrippen.

[14]Zie ook de Korteweg correspondentie: volgens Brouwer is het zo dat astronomische wetten slechts de wetten van onze meetinstrumenten zijn.

[15]Het zien van de waarheid is het, ondanks jezelf er tegenover, inzien van de onontkoombaarheid van suggesties van buitenaf, die dan wel diep moeten ingrijpen in jezelf. Dit verwijst naar de enige fundering van de wiskunde: de oer-intuïtie.

[16]D.w.z. voor de dégeneré is de intuïtie niet meer de basis van zekerheid.

[17]De natuurkunde en de techniek als zonde, als veruiterlijking, in tegenstelling tot de intuïtieve waarheid van de wiskunde.

[18]Welk boek? Gezien hetgeen hierop volgt, lijkt dit te slaan op Poincaré's *La Valeur de la Science.*

[19]Welk boek? Zie vorige voetnoot.

[20]Een stuk over het tijdsidee in de wiskunde. Waarschijnlijk slaat dit al op Poincaré's *La Valeur de la Science,* het tweede hoofdstuk: *la mesure du temps,* alsmede het derde hoofdstuk: *la notion de l'espace.* De volgende paragrafen in dit derde schrift slaan op deze hoofdstukken.

[21]Het tijdselement bij getallen. 'Tijd, wat de scheiding weer in orde maakt', zie het tweede hoofdstuk, punt II, de (psychologische) tijd als continuüm: een gevoel van veiligheid; meten kan altijd en daardoor is het weten ook veiliggesteld.

[22]Zie ook hoofdstuk III van *La Valeur de la Science:* het begrip Ruimte.

[23]Wiskunde en logica als hulpmiddel (en niet meer) om de gevoelskleur van tijd en ruimte weer te geven. Meerdere methodes zijn dan mogelijk en het zijn alle slechts benaderingen.

[24]Het tijdselement, hoofdstuk III. Het idee 'tijd' en de mogelijkheid tot het meten daarvan uit het verschijnsel van herhaling, bijvoorbeeld een uurwerkslinger. Maar dat brengt altijd een groot aantal (onuitgesproken) postulaten en

hypotheses met zich mee.

[25]Hoofdstuk III van *La Valeur ...*. De platte ruimte-voorstelling, gedragen door halfcirkelvormige kanalen (zie ook Klein): het bol- of elliptisch model van het platte vlak, waarbij twee diametraal tegenover elkaar gelegen punten geïdentificeerd worden. Dus een tweedimensionale ruimte in een driedimensionale, welke driedimensionale ruimte uniek is voor alle meetkundes. De ruimte heeft dus niet objectief drie dimensies, maar we mogen er wel in werken. De opmerking van Brouwer is commentaar op de driedimensionaliteit. Zie hoofdstuk III, pagina 71–73 en hoofdstuk IV, pagina 96–98.

[26]Het tijdselement; de meetbare tijd versus de onmeetbare. Poincaré heeft bij de assimilatie van die twee duidelijk problemen: zijn die twee in één begrip te vangen?
Psychologische tijdsintervallen in begrippen als vroeger, later, gelijktijdig.
Fysische tijdsintervallen als meetbare en vergelijkbare grootheden.
Zie hoofdstuk II, punt 2.

[27]Hier wederom het verschil tussen psychologische en fysische tijd.

[28]*La Valeur de la Science,* Hoofdstuk II, punt 7. Een supernova was er, voor Amerika ontdekt werd. Hoe kunnen wij dit zonder getuigen vergelijken? Alleen weer indirect, via rekenen, met allerlei aannames. Een demi–dieu zou dit kunnen, die enerzijds oneindig is, maar anderzijds niet, want de herinnering mag niet volmaakt zijn, anders waren die allemaal 'nu'.
Poincaré betrekt dit dus op fysische gebeurtenissen. Voor Brouwer geldt dit alles slechts voor de psychologische herinneringstijd, met wel begrippen als eerder en later.

[29]Eén woord 'tijd' voor de psychologische en de fysische tijd.
Hier eindigt voorlopig het lezen en de bespreking van Poincaré 's La Valeur de la Science. Op pagina 19 van dit schrift komt Brouwer er op terug.

[30]De hoofdstelling der rekenkunde: het aantal elementen van een verzameling is onafhankelijk van de volgorde waarin deze geteld worden. Zie ook verderop in de schriften: IV–10,25, V–2,13 VI–30. Het bewijs volgt steeds ongeveer dezelfde redenering.

[31]Wat is *Leven en Wiskunde?* Vermoedelijk een concept-titel voor (een hoofdstuk van) de dissertatie, gezien het vervolg van deze paragraaf. Zie ook de titel van hoofdstuk 2 van Brouwers dissertatie: *Wiskunde en ervaring.* In de synopsis komen wel titels voor als *Wiskunde en Samenleving* en *Wiskunde en Geestvrijmaking*

[32]Brouwer verzet zich meer tegen axiomatisering dan tegen het formalisme. Entropie is de 'maat voor wanorde' in de kinetische gastheorie.

[33]Logica zuivert, maar ten koste van entropietoename (= vergroting van

wanorde) elders, d.w.z. afname van de zekerheid in de wiskunde.

[34]Meetkunde als axiomatisch opgebouwd systeem wordt vergeleken met de organisatie van mensengroepen in een staatsvorm. Beide voert weg uit een oertoestand van intuïtief zijn naar een verworden wereld. Vergelijk *Leven, Kunst en Mystiek.*

[35]George Salmon (1819–1904) Iers wiskundige en theoloog, schrijver van in het Duits vertaalde leerboeken. Was actief op het gebied van de (algebraïsche) meetkunde.

[36]Dat wil zeggen, we kennen de natuur via onze zintuigen. De fysische wetenschap abstraheert ze: de hersenveruiterlijking. Faraday blijft nog beschrijvend, direct aanschouwelijk; Maxwell abstraheert in wiskundige modellen, los van de natuur.

[37]Een raadselachtig citaat van onbekende herkomst. Slechts secundair denken bij het lezen, dat wil zeggen slechts intuïtief ervaren, luisteren naar binnen. Als het indruk maakt, treedt de analyse in, zakt het naar lager sferen.

[38]Wederom: het intuïtief ervaren van de natuur staat boven een in een mathematisch model gegoten analyse van die natuur.

[39]De aritmetisering van de meetkunde is in feite natuurlijk al begonnen bij Descartes, maar hier is bedoeld het werk van Klein, Hilbert en Cayley.

[40]Brouwers constructivisme: een machtigheid, zoals die van het continuüm is niet te ontdekken. Een machtigheid is slechts op te bouwen, zoals bijvoorbeeld bij $\mathbf{Q}$ en dan kan men achteraf zeggen dat deze met $\mathbf{N}$ gelijkmachtig is.

[41]Eerst stond er doorgehaald 'de grondstelling', die zegt dat een projectiviteit tussen twee reeksen op verschillende dragers uniek bepaald is door drie paren corresponderende punten. Brouwer stelde voor de doorhaling in de plaats de 'vierzijde stelling', dat is de stelling van de volledige vierzijde, die de duale stelling is van de stelling van de volledige vierhoek. De laatste stelt dat twee zijden en twee diagonalen, die alle samenkomen in één punt, een harmonische vierstraal vormen.
Er is ook nog de volledige vierhoekstelling, die zegt als van twee volledige vierhoeken vijf van de zes overeenkomstige verbindingslijnen van twee hoeken elkaar op één lijn snijden, dan ook het zesde overeenkomstige paar.

[42]De contradictie van de 'set of all sets'. Dit houdt een waarschuwing in om bij de vorming van een verzameling voorzichtig te zijn. Zie ook de volgende pagina van dit schrift.

[43]Een polaire splitsing: twee polaire punten op een bolmodel zijn gelijkwaardig, definiëren hetzelfde punt.

[44]Problemen die ontstaan, als men teglijk met de definitie van een verzameling

ook zijn elementen definieert, in plaats van eerst de elementen te definiëren en daarna uit die voorraad een verzameling te vormen, welke verzameling dan dus nooit een element van zichzelf kan zijn. Zie Dedekind in *Was sind ...., waar hij het bestaan van 'unendliche Systeme' bewijst met behulp van de gedachtes van een mens.*

[45]Hier komt het tijdsbegrip weer ter sprake, waarschijnlijk gezien de inhoud toch weer refererend aan Poincaré's *La Valeur de la Science.*

[46]Deze doorgehaalde tekst refereert naar de psychologische tijd, zie hoofdstuk II, §1 van Poincaré. In de herinnering bestaat vroeger en later, mits de gebeurtenissen voorbij zijn. En de toekomst is de angst.

[47]Het getalidee in de tijd. Bij Poincaré dank zij de slinger van een pendule heeft de tijd een duur. De eenheid is éénmaal een volledige slinger; en het aantal is te tellen.
Bij Brouwer (zie verder) kunnen wij tellen dank zij het feit dat er een tijdsduur is, die het noemen van getal scheidt van het volgende noemen.

[48]Causaliteit bij fysica wordt alleen gezien bij een 'beperkt gezichtspunt', waarbij allerlei min of meer verborgen invloeden over het hoofd worden gezien. Dit om een (mathematisch) model van de natuur te kunnen vormen, ter beheersing van die natuur. Zie de volgende paragraaf.

[49]Fysica als onnatuurlijk; het is het reduceren van een probleem uit de natuur tot een mathematisch probleem, om die natuur hanteerbaar te maken. Maar dan is de natuur dood.

[50]Hier leest Brouwer de hoofdstukken III en IV van *La Valeur de la Science* van Poincaré.

[51]Hoofdstuk IV, §1: de groep van verplaatsingen (déplacements) is de translatiegroep. De deelbaarheid der scheiding is fysisch altijd begrensd. Altijd zijn er een A, B en C, zodat $A = B, B = C, A < C$. Daarom (zie ook *La Science et l'Hypothèse)* stellen we het mathematisch continuüm, dan is de deelbaarheid onbegrensd en aldus krijgt de rekenkunde vat op de fysica.

[52]Een weliswaar doorgehaald fragment. De dimensionaliteit wordt bepaald uit het aantal 'ingeneste' coupures, gaande van een punt A naar een punt B via een reeks $A, E_1, E_2, ...E_n, B$, waarbij in fysisch zin twee buren steeds ononderscheidbaar zijn. Zie *La Valeur ..,* hoofdstuk III, § 3, met name pagina 72 en 73.

[53]Zij α en β twee externe veranderingen en α' en β' twee interne. Als α gecorrigeerd kan worden hetzij door α', hetzij door β' en als α' zowel α als β kan corrigeren, dan leert de ervaring ons dat β' ook β kan corrigeren. We zeggen: α en β komen met dezelfde verplaatsing overeen; α' en β' ook.

[54]Kant stelt dat ruimte en tijd a priori in ons zitten als categorieën.
Poincaré zegt in hoofdstuk IV, § 6, *l'esprit et l'espace*, van *La Valeur ...*, dat de ervaring de belangrijke rol speelt van het aanleiding geven tot de gewaarwording van drie dimensies. Die rol zou overbodig zijn, als er in ons a priori het idee van drie dimensies zou zijn (Kant). Poincaré ontkent die aprioriteit. Als de ervaring van accomodatie niet altijd in overeenstemming zou zijn met die van convergentie, dan zouden wij vier dimensies als een natuurlijk gegeven ervaren. Voor Kant is dit fundamenteel, met name dat er iets is, waar je a priori van moet uitgaan.

[55]Hoofdstuk IV, § 4. De identiteit van de verschillende ruimtes (tastzin links, tastzin rechts, visueel). σ is een reeks gewaarwordingen, waarbij de naar de betreffende plaats wijzende (deze plaats aanrakende) vinger niet beweegt. Poincaré heeft het dan over het totaal aan gewaarwordingen $S+\sigma+S'$, waar S' de inverse van S is, zodat na $S+\sigma+S'$ dezelfde plaats (punt) blijft aangewezen.
Voor Brouwer is dit hele verhaal overbodig. Het verhaal dat ze identiek zijn (pagina 123) is voldoende. De uitleg van de een–een correspondentie hoeft dan niet apart vermeld te worden.

[56]Empirie is niet bepalend, wel sturend.
Hegel in dit verband: Het absolute in ons denken is de logica.
Bolland was Hegeliaan.

[57]Voor de 'getallengeverij' van Klein, zie de voetnoot bij IV–3.

[58]*La Valeur ...*, hoofdstuk III; ook *Science et Méthode*, pagina 35. Dit is precies de manier, waarop Brouwer op een begrensd continuüm de duale rationale schaal construeert. Dus natuurlijk zijn die twee continua gelijk.

[59]Zie *Mathematische Annalen* 57: Georg Hamel, *Ùber die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind'.*

[60]In een gekromd tweedimensionaal oppervlak vallen de geodetische lijnen er binnen. Bij toevoeging van een derde coördinaat 'snijden ze de kromming af' en treden naar buiten.

[61]Gezien de teksten hier direct boven en hier onder moet dit verwijzen naar W. Killing *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (1885).

[62]Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, in drie delen.

[63]Boltzmanns 'probabiliteitsleer'; zijn statistische theorie, om de thermodynamische waarschijnlijkheid van een macroscopische toestand (van bv. een gas of een vloeistof) te bepalen uit het microscopisch gedrag (de beweging) van de individuele moleculen.

[64]Vrije bewegelijkheid. Zie Lie, *Über die Grundlagen der Geometrie*, pagina 1. Het totaal van alle bewegingen, beschrijfbaar door middel van analytische

vergelijkingen, vormen een transformatiegroep. Er geldt hier, onder voorwaarden, een dekpuntsstelling (zie pagina 5).
Er is sprake van vrije bewegelijkheid als elk punt in elk ander punt kan worden overgevoerd door een continue transformatie van de groep.

[65]Aritmetische projectieve meetkunde als 'mengmeetkunde'. Zie Klein, *Vorlesungen über die nicht-euklidische Geometrie*, boek II, hoofdstuk I.

[66]Tot en met pagina 29 van dit schrift: metrische projectieve meetkunde.

[67]In de formule voor ds^2geldt het + teken voor de elliptische meetkunde, en het − teken voor de hyperbolische meetkunde. Zie Klein, *Vorlesungen ...*,(1893) boek I, hoofdstuk II, pagina 107, 109.

[68]Zie Hamel, M.A. 57, § 2, pag. 242; de differentiaalvergelijking voor een minimaalmakende kromme, een geodeet.

[69]De dubbelverhouding van Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*, Anhang I; de lengte van een lijnsegment, gedefinieerd met behulp van dubbelverhoudingen. Vergelijk de methode van Cayley.

[70]Vanaf hier tot pagina 32 bovenaan volgen beschouwingen over fysische functies: laat de natuur zich in wiskundige functies en wetten beschrijven? Zie hiervoor ook de Brouwer-Korteweg correspondentie. Wetten zijn onze maaksels.

[71]Fysische functies zijn aldus altijd differentieerbaar (vergelijk Klein en Poincaré) dankzij *onze* keuzes van 'Zusammengehörigkeit' van bijvoorbeeld tijd en afstandscontinua. Er zijn alleen maar fysische verschijnselen waar we ze zien, en dan zien we continuïteit en *dus* differentieerbaarheid.

[72]Slechts één axioma: de traagheid (door onze organen). Die maakt dat wij continuïteit en differentieerbaarheid zien en als vanzelfsprekend aannemen. Daarom kunnen wij de natuur in dergelijke functies beschrijven, omdat wij dat willen.

[73]Met andere woorden: de rigide groep kunnen wij bevatten.

[74]Dit betreft de Helmholz-Lie'sche voorwaarden voor transformatiegroepen, die het karakter van een meetkunde bepalen.

[75]Zie Hilbert, *Grundlagen M.A.*, waar Hilbert bewegingsgroepen bespreekt ter grondvesting van meetkunde, in het bijzonder draaiingen.

[76]Zie M.A. 56.

[77]Deze opmerking is een geldige, ondanks de doorhaling. Een nieuwe theorie (bijv. de speciale relativiteitstheorie) heeft de oude (de Newtonse mechanica) als bijzonder geval.

[78]Het voorbeeld van Veronese met zijn hypothesen. Zie *Grundzüge der Geometrie*. Model voor een niet-Archimedische meetkunde (zie Hilbert Grundlagen, pag. 31).

[79]Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, M.A.56: de draaiing on M, die puntenparen in elkaar overvoert; zie § 23.

[80]Dit is de *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig; Mathematische Physische Klasse*, '86' slaat op het jaar 1886. Het betreffende artikel waarnaar verwezen wordt is Lie's *Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Thatsachen, der die Geometrie zu Grunde liegen* uit Band 40 van de Sitzung van 13 Februari 1888.
Voor Brouwers commentaar hierop zie het vervolg van zijn tekst op deze pag. III–36.

[81]Russell, in *Fondements de la Géométrie*, noemt de drie axioma's van Riemann in hoofdstuk I, § 23 en de vier axioma's van Helmholz in § 25 van hetzelfde hoofdstuk, bespreekt Helmholtz' opvatting over de meetkunde in hoofdstuk II, en het axioma der vrije bewegelijkheid en het monodromie axioma in hoofdstuk III, sectie B.

[82]Te moeilijk leesbaar om van commentaar te kunnen voorzien.

[83]Zie Hilbert, *Grundlagen M.A.*, waar dit uitvoerig besproken wordt.

Chapter 4

Schrift IV

['Mehrfache Ordnungtypen' in Math. Ann.[1] **IV-1**

Zoo blijkt de ruimte gevormd door het *stellen* (willekeurig) van 3 in plaats van 1 opvolgingsverbanden in de aftelbare hoeveelheid. ⟨Maar die opv. verbanden zijn de genereering der hoeveelh., dus de hoeveelh. zelf.]⟩

. . . .

Na te gaan: *waarom* is elke door 2 ⟨van zijn⟩ punten bepaalde kromme van een het vlak opvullende schaar steeds te beschouwen als minimaalmakend een integraal minimaalmakend (er zijn waarschijnlijk reeds *steeds* verscheidene integraalelementen, waarin alleen de eerste afgeleide optreedt; maar bovendien natuurlijk nóg veel andere, waarin ook de hoogere afgeleiden optreden.[2]

(kantlijn:) ⟨Wel, dit volgt natuurlijk steeds uit de part. diff. vgl., die het omkeerprobleem der var. rekening is.⟩

. . . .

Het axioma der beweging van Hilbert is: bij elkaar gelegen punten blijven bij elke beweging bij elkaar.[3]

. . . .

Zijn er geodetische vlakken in R_3, dan zeker (want uit elk punt in ∞^2 directies) met 3 parameters.

Nu moet te bewijzen zijn, dat als die ∞^3 vlakken bundelsgewijs liggen (zoodat er maar ∞^4 in pl. van ∞^6 snijlijnen zijn), dat we dan de projectieve ruimte hebben.

. . . .

Wie in de zon kijkt, wat schaamt hij zich voor zijn wiskunde! **IV-2**

. . . .

(De gevolgen van de stelling van Desargues of de projectieve stellingen is nog niet, dat het stelsel geodetische vlakken in de 3 parameters lineair is, maar alleen dat de wijze van Verknüpfung *binnen het beschouwde gebied* *) van de *'Zahlenraum'* dezelfde is, als van het lineaire systeem binnen een zeker gebied, maar buiten dat gebied kan de functie natuurlijk zeer goed een ander verloop hebben.)

*) *(kantlijn:)* ⟨Later kunnen dan volgens Schur M.A. 36 ideale elementen worden toegevoegd.[4] *(volgt een onleesbaar gedeelte, dan:)* Voor die invoering kan de begrenzing een willek. convexe vorm hebben.⟩

Op de wijze van getalleninvoering van Klein[5] ⟨(men merke op, dat al diens constructies werkelijk binnen het begrensde gebied vallen. cf fig. pag. 342.)⟩ worden de punten der geometrie en tegelijk de representeerende getallen *opgebouwd*, en dan blijken de representeerende functies binnen het gebied lineair in de parameters, ⟨immers als parameters te hebben de coëfficienten van een lineaire vgl. in de coördinaten.⟩

. . . .

Van al de stelsels ⌞punten en ⟨rechte⟩ lijnen binnen een convexe kromme⌟[6] blijken alleen dié, welke een 2de graadskromme tot begrenzing hebben, in zichzelf over te voeren door een groep.

Want het is onmogelijk, dat een projectieve ⟨infinit.⟩ transformatie een gesloten kromme in zichzelf overvoert, of het moet een tweedegraads kromme zijn. [vgl. Lie en Klein Math. Ann. 4; Lie III Theorema pag. 87 en 88.][7]

. . . .

IV-3 Wat is het functiebegrip anders, dan het geven van een afbeelding van een oneindig aantal punten in eindigen vorm, uit te voeren met behulp van een eindig aantal waarden onder toepassing van een eindig aantal *bepaalde* mathematische inducties.

. . . .

[Het gereken van Hilbert is toch niets, dan gewoon toepassen van de methodes der gewone wiskunde; het zoekt geen *grondslagen* van de wiskunde: die liggen in het leven.][8]

. . . .

[Is in de ell. ruimte niet waar, dat de rel. energie van 2 pos. ladingen het tegengestelde is van die van een pos. en een neg.? ⟨Zoodat dan uit de Scheringsche toch de ware potentiaal zou zijn af te leiden?]⟩

. . . .

Russell Fondem. p.46. Moet tusschen A *en* B juist een bepaald maatgetal bestaan, om te onderscheiden van het paar A *en* C? *) Neen: het is een willekeurig postulaat, dat er een rechte lijnen stel tusschen de punten te vormen is,⟨1⟩ en dan ⟨nog eens,⟩ dat ⟨zoo'n lijn⟩ heeft het ordetype der reeële getallen (intusschen blijkt deze aanname realiseerbaar; daartoe hoeven we als punt maar een stel ⟨getallen⟩ -coördinaten te definieeren.)[9]

(volgt nog een onleesbare doorhaling)

*) *(kantlijn:)* ⟨op dezelfde rechte lijn?⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Want wat wil zeggen *meten* van AB als A en B punten v.h. getallencontinuum? Wel, uitdrukken van AB door een getal, dat is door een punt C van hetzelfde getallencontinuum. **IV-4**

Willen we nu echter, dat voor A constant, AB alle waarden van het ⟨getallen⟩-continuum éénmaal krijgt, dan kunnen we ook zeggen:

C moet een één-eenduidige afbeelding van B zijn.[10] *)

Maar dan is $CB =$ const., wat betreft de dubbelverhouding ten opzichte van een zeker vastgesteld puntenpaar.

Dus maat AB bepalen, wil zeggen de $\frac{BP}{BQ}$ bepalen,⟨2⟩ derhalve moeten, om te kunnen meten, nog twee punten P en Q worden opgegeven.

*) *(kantlijn:)* ⟨Dit is meer een opmerking dan een Begründung van een afstandsdefinitie, want voor $dlog\vartheta$ blijft eenduidigheid niet. De ware Begründung dezer definitie zit in de vóórredeneering van Hamel.⟧ *(einde doorhaling.)*

. . . .

[De potentiaal in het veld der aarde heeft zeker rotatie, en daarom ben je na iedere rondreis een ander mensch; het meest echter, als de rondreisch de beide polen der aarde scheidt.]

. . . .

Russell beschouwt de hyperb. ruimte als heel iets anders, als de afbeelding daarvan op de Eucl., zóó, dat de afstand in de eerste wordt het maatverschil in de tweede; beschouwt hiermee echter als alleen bewezen, dat in de hyperb. ruimte geen tegenstrijdigheid zit; maar hij vindt de hyperb. ruimte in elk geval nog heel iets anders op zichzelf staands.[11]

. . . .

⟨1⟩ ⟦Wel, ik zou zeggen:⟧ het ⟦eerst⟧ een willekeurige ⟦aanname,⟧ dat er een rechte lijnen stel tusschen de punten te vormen is,

⟨2⟩ Dus maat AB bepalen, wil zeggen de *(eerdere doorhaling binnen deze doorhaling:)* ⟦dubbelverh. van⟧ $\frac{BP}{BQ}$ bepalen,

IV-5 Zulke redeneeringen zijn die van een naieve jongen, die de klok heeft hooren luiden, en met alle geweld ook nu wil praten, en zoo het naieve ⟨gevangen⟩ standpunt zonder verdere ontwikkeling d.i. reiniging, gaat verdedigen.[12]

. . . .

Je hoeft iets eerst te reinigen, als je het eerst vuil maakt. Dus is beter, heelemaal geen wiskunde te doen, dan achteraf moeitevol je wiskunde te reinigen.

. . . .

Bedenk, dat er niet de minste aanleiding is, om de onwaarneembaar kleine deeltjes onzer Euclidische ruimte – de atomen b.v. – ook als Euclidisch aan te nemen ⟨d.w.z. ook aan de 'groep' te laten voldoen.[13]⟩

Zou je met behulp van de tegengestelde hypothesen een theorie uitvinden, *) dan had die toch slechts geniepige joodsche waarde, zooals ook b.v. het 'geniale' – maar knoeierige – asymmetrisch C-atoom van Van 't Hoff.

*) *(kantlijn:)* ⟨een molecuul zou toch een niet-Euclidische of een andere ⟨in zich⟩ Euclidische bewegingsgroep kunnen hebben,⟩

. . . .

Daar een begeerte steeds een vaste afgrenzing is, kun je alleen in vaste afgrenzing inwerken op der menschen begeerte,⟨3⟩ dus carrière maken. ⟨Elk handelsartikel is afgegrensd, de wiskunde is er ook een voorbeeld van.⟩

. . . .

'Paedagogische' wetenschap is zulke, die geen reiniging, maar alleen rust voor het gevangen denken geeft.

. . . .

IV-6 *(doorgehaald:)* ⟦Alle wetenschappen, zoo ook de wiskunde, hebben zich langzamerhand losgemaakt van de philosophie, maar zijn daardoor ook te waardeloos geworden.

. . . .

Correctiepotentiaal voor magnetische ⟨pool⟩ -lijn van den oorsprong met sinusgolvende sterkte in het elliptisch vlak:[14]

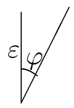
$$\frac{2}{\pi}.\frac{\sqrt{4k^2+r^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{4k^2+r^2}}.bgtg\frac{r\cos\varphi}{2k} \qquad (?)^{\langle 4\rangle}$$

⟨3⟩ Daar een begeerte steeds een vaste afgrenzing is, kun je alleen in vaste afgrenzing ⟦in werking⟧ inwerken op der menschen begeerte,

⟨4⟩ *vraagteken origineel*

Deze formule blijft ⟨als zij goed is⟩ gelden voor de elliptische R_3.

(Kantlijn, eveneens doorgehaald:)



ε: Euclidische afstand.
φ: Euclidische; *sin* elliptische poolhoek.⟧

. . . .

[De grondformule der potentiaal in de Euclidische R_3 is: $\int \frac{(\nabla^2 u)\,\mathrm{d}\tau}{r} = 4\pi u$
⟨Dit geldt vooreerst voor u een scalar, maar, daar ∇^2 een scalaroperatie, ook voor u een quaternion.⟩

En hieruit, als we $\nabla u = v$ stellen:

$$\int \frac{(\nabla v)\,\mathrm{d}\tau}{r} = 4\pi u \qquad I$$

$$\nabla \int \frac{(\nabla v)\,\mathrm{d}\tau}{r} = 4\pi v \qquad II$$

Hierin is u een willekeurige quaternion, maar ook v een willekeurige quaternion; want bij elke quaternion is een potentiaalquaternion aan te wijzen. (De potentiaal van een scalar is de kracht, uitgeoefend door den scalar als ⟨$(4\pi\times)$⟩ agens beschouwd)]

. . . .

[Het is nu de vraag, waarin de formules I en II overgaan in de elliptische ruimte.]

. . . .

[*Resultaat van de Maxwellsche pot. theorie* **IV-7**

De willekeurige vectordistr. is te splitsen in V_1 met alleen diverg. en V_2 met alleen rotatie.

Beide componenten zijn af te leiden uit hun ∇

$$V_1 = \nabla \int \frac{(\nabla V_1)\,\mathrm{d}\tau}{r}$$

$$V_2 = \nabla \int \frac{(\nabla V_2)\,\mathrm{d}\tau}{r}$$

$\mathbf{V_1}$ is dus te beschouwen als voortgebracht door scalar-agens ⟨∇V_1, waardoor het bepaald is en⟩ waar van de distributie geheel willekeurig in de ruimte mag worden aangenomen, tenzij ⟨dat⟩ men ⟨bij⟩ nauwer toezien bemerkt, dat er evenveel pos. als neg. scalar-agens moet zijn; het agens blijkt dus aanwezig te zijn in den vorm van *magneten.* De elementair vectordistributie voor V_1 (de willekeurige V_1 is dan een willekeurige ruimte-integraal er van) is dus de potentiaal van een elementair-magneet. (in de Eucl. R_3 mag die echter gesplitst worden voor de berekening in de potentialen der beide polen.)

$\mathbf{V_2}$ is dus te beschouwen als voortgebracht door vector–agens $\langle \nabla V_2, \rangle$ waardoor het bepaald is en waarvan de distributie alleen aan de flux-eigenschap heeft te voldoen. Als elementair agens, (waarvan de willekeurige V_2 een ⟨geheel⟩ willekeurige ruimteintegraal moet zijn), moet hier dus worden genomen een zeer klein gesloten vectorbuisje. En het willekeurige agens blijkt aanwezig te zijn in den vorm van willekeurig verdeelde *electrische stroomen.*

IV-8 Voor de elliptische ruimte blijft de willekeurige vectordistributie beschouwbaar als een ruimteintegraal van de potentiaal van een elementairmagneet en van een elementairstroompje.]

. . . .

[De operator $\nabla = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$ kan natuurlijk voor elk punt weer 3 andere onderl. loodrechte assen onderstellen.

Voor een niet-Eucl. ruimte kan de distributie dezer asrichtingen dus nog willekeurig worden aangenomen.

We kunnen daar dus zeer goed nemen in elk punt de 3 lijnen, rechts evenwijdig met de 3 coörd. assen in den oorsprong.]

. . . .

(Deze § sluit aan op de voorvorige) [In de Euclidische ruimte kan het veld van het elementairstroompje voor het rekenen worden opgebouwd uit dat van rechtl. stroomelementen; maar zoo'n veld van een stroomelement is een fictie (overigens heeft het in de heele ruimte rotatie; een gegeven vectordistributie als rotatievector is dus wel gemakkelijk te splitsen in velden van ⟨gesloten⟩ elem. stroompjes – daartoe maken we maar op de rotatie ván den rotatievector – maar niet van ⟨rechte⟩ stroomelementen), die voor de Eucl. ruimte toevallig heel licht gaat; van den zelfden aard en waarde, als de splitsing van het veld van een magneet in die van zijn polen.]

. . . .

IV-9 *(Deze § staat vanaf het midden van pag. 9 tot bijna onderaan, maar sluit aan op bovenstaande)* [En de splitsing van een distributie in velden van rechtl. stroomelementen kun je pas opschrijven, als je die in velden van stroomkringen al ⟨eerst⟩ hebt opgeschreven.

[Want dat veld van een stroomelement heeft overal rotatie; ik kan dus uit den rotatievector van het resulterend veld in een punt niets besluiten omtrent het stroomelement in dat punt (immers de rotatievector daar moet gesplitst worden in verschillende rotatievectoren hoorend bij de verschillende componeerende velden. Het zgn. veld van een stroomelement is feitelijk goed beschouwd een veld van een zekere samengestelde ⟨flux⟩ distributie van eindige stroomen.]

....

[*Stelling* Ook in de elliptische ruimte is de rotatievector V_2 ⟨bij een vectordistrib. V⟩ een flux.

Bewijs Het volgende bewijs is geldig voor elke R_3 onafh. van de krommingseigenschappen:

Neem een willekeurig gesloten oppervlak en bepaal $\int V_r do$ dat oppervlak naar buiten.

Nu is $V_r do$ = de integr. van V langs den omtrek van dO. Maar de omtrekken dezer elementjes en evenzoo ⟨dus⟩ de integralen van V daarlangs vernietigen elkaar over het geheele oppervlak. Derhalve $\int V_r dO = 0$]

....

[Het veld van het elem. stroompje zal ook in de ell. ruimte waarsch. hetzelfde zijn als van een dubbelpunt.]

....

Van mijn bewijs van de hoofdst. der rekenkunde kan Mannoury terecht zeggen, dat het te veel nog intuitief is, en in de 'mathematische logica' geen plaats heeft.[15]

....

Mijn bewijs gaat er overigens van uit, dat de uittelbaarheid werkelijk – zonder inductie – uitvoerbaar is.[16] Dit nu heeft geen zin in het systeem van Mannoury, maar wel in het mijne, dat alleen hoeveelheden, die *opgebouwd* worden, kent; hetzij door aftellen, hetzij door inductie. **IV-10**

(kantlijn:) ⟨Nog beter geef je het bewijs zoo:
P. ....
Q...................
Zij P de ω schaal en Q een hoeveelheid; door een verwisseling van 2 in Q blijft het gedeelte van P, door Q bedekt, hetzelfde; en elke volgordeverandering is door een eindig aantal 2-verwisselingen te verkrijgen.⟩

....

Grondslagen der wiskunde zoeken is de nieuwe niet-Eucl. theorie niet; slechts *uitbreiding* van de centralizeerings- en samenvattingswaan van het rekenwerk.

....

[Voeren we als element voor de potentiaal der ell. ruimte het dubbelpunt in, dan sluit dat niet direct in de kennis vooruit, dat het veld van een lijn van dubbelpunten alleen afhankelijk is van de uiteinden van die lijn, niet van den gevolgden weg.

Wel wordt dat ingesloten als we als elementen nemen de verschillende agens (divergentie) punten, tezamen met het contraire agens in een willekeurig vast punt (b.v. den *oorsprong*; al die ingevoerde agentia in O heffen dan elkaar
IV-11 op). Het potentiaalelement wordt dan ∥ een magneet met een der polen in den oorsprong en dat veld is een functie van de sterkte en de plaats der ándere pool (buiten O), dat is van de divergentiedistributie der gegeven vectordistributie.][17]

. . . .

[Dat de hemellichamen altijd maar in *elliptische* banen om elkaar heen bewegen, 'niet duurzaam van elkaar weg kunnen' schijnt te verklaren te zijn uit de elliptische ruimte.

Lorentz' gravitatietheorie komt uit de elliptische ruimteopvatting direct te voorschijn.]

. . . .

Het centralizeeren van een fantazie ⟨door de menschen'⟩ *) is haar bemachtigen, door haar betrekkelijkheid, gelijkberechtigdheid met haar verschillend geaarde polaire tegenstellingen, en daardoor ook weer haar vanzelfsprekendheid te zien.

Maar het is altijd maar een gedeelte der fantazie, dat ⟨in de beschaving⟩ gecentralizeerd wordt. Het centralizeeren is altijd ten opzichte van een eenzijdigheid, en geschiedt met opoffering van veel aspecten der fantazie.

*) *(kantl.:)* ⟨ánders natuurlijk de Hereenigings-centralizeering,⟩

. . . .

Maat en *maatverhouding* is a priori gegeven, ⟨uit de optelgroep (zie later).⟩[⟨5⟩] Daarom bestaat tegen de 'opbouw' der proj. meetk. als menggeometrie geen bezwaar.

. . . .

De stelling van Desargues (van harm. punten) spreekt ⟨in de mengmeetkunde⟩ vanzelf; immers ⟨daar⟩[⟨6⟩] zijn de 2 diagonalen gleichberechtigt, worden op precies gelijke wijze afgeleid, als ik de 2 segmenten van de basislijn verwissel.[18]

. . . .

IV-12 ⟨Als we niet aprioristisch aan de continuiteit willen appelleren, wat het zui-

---

⟨5⟩ *Deze verbetering staat in de plaats van een onleesbaar gemaakte doorhaling.*

⟨6⟩ *in plaats van een onleesbare doorhaling.*

verst is.⟩[⟨7⟩]

De eenige manier, om de perfecte Menge 'op te bouwen' (wat toch vereischt wordt), zal wel zijn volgens Cantor M.Ann. 46 pag 488.[19]

....

[Zijn nu geen classificeeeringen van de getallen (in 't algemeen transcendent) aan te geven op grond van die Cantorsche formule? De gewone transcendente en reëele getallen, als $sin 3$, e^2, $\sqrt{7}$ enz. zijn natuurlijk in dit systeem slechts zeer bijzondere en niet van de eenvoudigste volgens deze nomenclatuur.][20]

....

En ook zou b.v. best nog weer getallen tusschen deze Cantorsche getallen kunnen aannemen; maar alleen is dat voorloopig niet noodig voor het rekenen.[21]

....

Bij de projectieve meetkunde zal men wel uitkomen met de rationale getallen. Bij de metrische ⟨d.i. de bewegingsmeetkunde,⟩ komt de irrationaliteit slechts tot den tweeden graad.[22]

Dit uit te werken.

....

(doorgehaald:) ⟦De continuiteit ⟨ook in meer dimensies⟩ is vereischt voor de meting, maar is er onafhankelijk van.[23]

Meten onderstelt eerst de meting in het eendimensionaal continuum, en dan de betrekking van het meerdimensionale op het eendimensionale, wat altijd iets gewrongens is. [ook het meerdim. moest intuitief blijven.] ⟧

....

Ik kan niet spreken van *jede* Fundamentalreihe te defin. v.d. Abgeschlossenheit.[24] Ik kan alleen nemen de limiet van de getallenlichamen van verschill. graad. ⟨Maar die onderstellen altijd een voorkeur voor bepaalde punten van uitgang.⟩ De *defin.* van Vahlen der Stetigkeit kunnen we nemen als experimentele eigenschap v.h. continuum.[25] **IV-13**

....

(in aansluiting op de laatste niet-doorgehaalde § van de vorige pag. 3:)

Of kan ik de bewegingen ook in de rationale vlakte uitvoeren, zonder dat de raaklijnen aan de fund. kegelsneden (die als dubbelelementen optreden, dus irrationaal worden; en de dubbelverhouding waarvan ⟨voor gelijke hoeken⟩ constant moet blijven) anders dan als ideale elementen optreden?

[⟨7⟩] *Later toegevoegd, aan het handschrift te oordelen.*

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het planaire continuum, dat dat 'stetig' zou zijn;[26] ik voel precies, wat het beteekent, maar ik kan het toch niet opbouwen, zonder het eendim. continuum te hulp te nemen. [Daarom gaat men allerlei functies opzoeken, al zijn dat ook maar een klein deel van alle mogelijke functies, om allerlei ⟨stetige⟩ oppervlakken te kunnen beschouwen, ook al komt men zoo nooit tot de meest algemeene functies.]

Want het intuitieve continuum kan ik zonder behulp van functies niet verder meester worden, dan met behulp van den term 'ongelet op de fijnere hakkelingen en golven', (zooals men de kustlijn van een land continu teekent, ofschoon hij altijd hakkelig blijft, welke hakkeligheid indifferent moet blijven.)⟧

. . . .

IV-14 De afstand⟨swaarde⟩ worde ingevoerd als $\int(xdx + ydy)$ in de 2 onafh. coörd. x en y. Dit is de eenvoudigste wijze van opbouw voor de Euclidische meetkunde.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Oorspr. vergelijkt men op het continuum een stuk a, $2a$, $3a$ enz. en onafh. op hetzelfde continuum b, $2b$, $3b$, enz... , het continuum zelf is primair; het spreekt van zelf, dat het al die onafhankelijke reeksen kan leveren. Met de onderlinge ⟨al of niet⟩ meetbaarheid der versch. reeksen houdt men zich niet op.

. . . .

Van de ruimte is primair de 3-dimensionaliteit. De verdere metrieken zijn eigenschappen der beweging van vaste lichamen.⟧

. . . .

[Daar spreken alleen is het samenhouden van elkanders wil, ⟨en dus⟩ gericht op de buitenwereld, kan ook de wiskunde alleen handelen over de uitwendige wereld, en de grondslagen der wiskunde zijn meer-centralizeeren van de wiskundige actie op de buitenwereld (ten slotte geheel in de binnenkamer geconcentreerd in een 'gesteld systeem' van entities, geabstraheerd uit de buitenwereld.]

. . . .

IV-15 De math. logici zeggen nu: het gebeurende in de physica dekt zich logisch met het door mij opgestelde systeem; maar dat is onzin: primair is het physische en het logische ding heeft alleen zin als verstaning *uit* de physica, niet onafhankelijk er van.

. . . .

Van al de eigenschappen der 'Geordnete Gruppen' van Vahlen volgt het

Existenzbeweis eerst bij de gewone getallen.[27]

....

Het oppervlak van Clifford ('of zero curvature and finite extent') is een gewone Euclidische rechthoek, waarvan de overstaande zijden tegen elkaar zijn gebogen tot een ring.[28]

....

Het 'door ondervinding wijs gewordene': *'zoo is de wereld'* (ook het wiskundige) wordt zelfgenoegzaam berustend gezegd, alsof de wereld niet zóó was door eigen slechtheid.

....

(doorgehaald:) ⟦De eene grondslagentheorie begint wat dieper dan de andere, maar het doet er weinig toe, ook al begint men helemaal niet diep. Het zgn. diep beginnen, heeft toch alleen ten doel, om zeker te zijn, dat men in verstandhouding de lezers meeneemt. Maar hoe meer men die zekerheid krijgt, des te meer heeft men zich in de eindbloem tot een schijngeraamte van de werkelijkheid beperkt.⟧

....

(doorgehaald:) ⟦Uit Vahlen Teil I zou volgen(?)⟨8⟩ dat op de manier waarop Klein het getal in de meetkunde invoert, dat op die manier de getallen *zelf* kunnen worden opgebouwd.[29]⟧ **IV-16**

....

Men moet weigeren, wiskunde te doen. Maar nu het eenmaal zoover is, moet men toch weigeren, den tweeden stap te doen, n.l. de mathem. logica.

....

Uit 52 en 126 (Vahlen I) is uit de reeks der geheele getallen (1 gedefin.; uit 1.1=1; 2 door 1+1; 3 door 2+1 enz.) en toeordeningswetten, die de volgorde der prod. en quotienten bepalen, de volgorde der rationale getallen te bepalen (en dat is alles, onderlinge afstanden hebben geen zin.)[30]

....

Het onderzoek naar event. onafhankelijkheid van de axioma's der rekenkunde is onzin (zooals Vahlen doet),[31] want rekenen is een aprioristisch operatiesysteem, – als zoodanig het element zelf, uit den wil komend – dat wij het veel secundairder uit ons intellect 'eigenschappen' toekennen en dan andere systemen zien, die slechts een gedeelte van die eigenschappen hebben (en dan daarom

⟨8⟩ *origineel vraagteken*

schijnen algemeener, dus primairder te zijn, terwijl ze feitelijk uit de eigenlijke
IV-17 rekenkunde zijn opgebouwd), doet niets ‖ ter zake–; de meetkunde echter is een empirische wetenschap, en diens axioma's kunnen worden ganalyseerd; ⟨immers ook: ik *bouw* haar *in* de meerdim. arithmetik.⟩ (iets anders dan de meetkunde is de quasi-geometrische samenvatting van meerdimensionale arithmetik: die is natuurlijk weer aprioristisch).

....

(doorgeh.:) ⟦Dus vorm in hom. coörd. willekeurige functies van $\frac{dx}{x}$; $\frac{dy}{y}$; $\frac{dz}{z}$.⟧

....

[De bol met ∞ str. in hyp. meetkunde heeft een Eucl. meetkunde; dit na te gaan.
⟨Natuurlijk, want een bol heeft per se bolmetriek, in elke soort van meetkunde.]⟩

....

[Hebben op een gegeven projectief tweedegraadsopp. de punten *bepaalde* projectieve verhoudingen? Neen.⟨9⟩

....

Ik kan niet samenvattend spreken over *alle* punten van een r. lijn, en daarover dingen, eigenschappen zeggen; ik kan alleen voortdurend punten vormen op een continuum, maar dan genereer ik ze.[32]

....

(kantlijn:) ⟨Eerst werd de inhoud van Euclides juist gevonden; de logica werd slechts als binding beschouwd; daarna werd het als logisch-wisk. systeem*) onvolledig gevonden; daarna weer als logisch *woord*systeem wel juist.⟩
*) *(ook in kantlijn:)* ⟨(uniciteitsbewijs)⟩

Een redeneermethode in de grondslagen is *juist*; bij ⟨anders bekijken⟩⟨10⟩ weer *onjuist*; bij weer ⟨anders⟩ ingaan weer *juist*; dit nader toelichten en verklaren en een voorbeeld geven. ⟨Wel, het hangt maar van de vooronderst. af; zoo weer juist; toen niet; toen weer wel.⟩

....

(onderaan de pagina en deels in de kantlijn:) ⟨In de eigenschappen 'grondslagen' zijn quaternionen[33] primair aan gewone getallen; maar feitelijk zijn ze uit de

---

⟨9⟩ [Hebben op een gegeven projectief tweedegraadsopp. de punten *bepaalde* projectieve verhoudingen? ⟦- - - *(onleesbaar)* - - band tusschen die, en de eventueele bolmetriek op dat oppervlak?⟧

⟨10⟩ *deze en de volgende verbetering in de plaats van onleesbare doorhalingen.*

laatste opgebouwd; aan je gezondheid merk je, dat de laatste opvatting de juiste is.⟩

. . . .

Een ‘Menge’, ⟨die ik kan aftellen,⟩ *kan* niet aan een deel van zichzelf ‘ähnlich’ zijn. Hieruit volgt de grondeigenschap der rekenkunde.[34] **IV-18**

. . . .

(Zermelo Ann. 59.2) Hoe lapt hij hem dat, zoo’n Belegung γ uitspreken of aanduiden?[35]

. . . .

Als pendanten van elkaar de Mannourystische grondslagen[36] en de interne veroordeelende. Alles ziende als komend uit de waan van constantheid, waardoor het telbare ontstaat; Bolland ziet dat analoog, maar als iets physisch geschiedends, niet iets metaphysisch.

. . . .

(Dedekind, ‘Was sind’ § 4) Dat praat daar weer over ‘Abbildung in sich selbst’ in ’t algemeen, zonder over de wijze daarvan ⟨en of die in eindige vorm is op te geven; *) iets toe te lichten. Het geheele gedoe krijgt pas zin, als er voorbeelden komen, maar dan dien ik die voorbeelden primair aan te brengen, en mag ze niet definieeren met behulp der voorafgegane ‘graue Theorie’.[37]

*) ja, over de mogelijkheid er van. Er is toch een Existenzbeweis voor noodig⟩

. . . .

Gaat het niet, om de A_0 van Dedekind te definieeren als $M(A, A^{'}, A^{'}, ...)$ tot een aftelbare oneindigheid van afbeeldingen toe? Dan spreekt van zelf dat A_0 in zichzelf is afgebeeld; immers zij s binnen A_0, b.v. in $A^{(p)}$, dan is s’ binnen $A^{(p+1)}$, dus ook binnen A_0.[⟨11⟩][38]

. . . .

[Is het niet mogelijk, een classificatie van de in eindigen vorm op te geven ‘afbeeldingen van een systeem in zichzelf’ te maken?][39] **IV-19**

. . . .

Al die menschen van de grondslagen der ‘théorie des nombres’ redeneeren in abstracto, maar hebben altijd het oog op *bepaalde* veralgemeeningen der eindige getallen.

[⟨11⟩] Dan spreekt van zelf dat A_0 in zichzelf is afgebeeld; ⟦immers zij s buiten ⟨binnen⟩ A_0, dan ⟦blijft⟧ ligt het in $A^{(p)}$, maar dan ...⟧

. . . .

Gegeven dan nu, dat de strijd om het bestaan de heerschende energie in het hersenbedrijf brengt (welke individuen dan daaraan deel hebben, doet er weinig toe), dan zien wij dat spontaan als een afsterven van de aarde (dit is logisch weliswaar zonder zin).

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Nagaan wetten van de priemgetallen,[40] is overbrengen van verschijnselen uit dat gebied van het gebied der ⟨verrassingen naar dat der⟩ zekerheid. Wat voor zin of nut heeft dat? Dat ik op een speciaal verstand (met den dood der aarde samenhangend) gebied vastigheid krijg en de laatst... *(?)* trap van leven in de wiskunde , b.v. het vlug rekenen en het vergelijken van grootheden verdwijnt. De getallen zijn dan niet meer hoeveelheden in een of ander talstelsel (werkend op de passie) met blijdschap vergaard, maar zijn geprojecteerd op heel andere vastigheid.⟧

. . . .

De weerlegging van Poincaré dient gevolgd door: Alles is overigens te weerleggen, voor Poincaré moet men bijzonder fijn doordringen.[41]

. . . .

IV-20 De dieren zijn de ten ondergaande 'middenstand' tusschen menschen en planten.

De meer abstract–wiskundige heeft den reëel wiskundige noodig, deze den technicus; deze den werkman. Zoo heeft elke verder ontwikkelde fase noodig het paraziteeren op hen, die nog de lagere fase verrichten, en hij dwingt hen daartoe, omdat hij hen kan worden ⟨(hoewel van lager ras).[⟨12⟩]⟩

. . . .

Het als gesteld vastzetten van eenige dingen (waaruit dan weer andere, eveneens vaststaand kunnen worden gevormd) doe ik intuitief (dus stel ik ook de eindige hoeveelheden intuitief). Midden in het geredeneer, om de eindige hoeveelheden af te leiden, spreek ik van een eerste telling eener G.G.H. en van een tweede; vergelijk dan die twee; houd ze dus *gesteld* als een eindige hoeveelheid van twee tellingen.[42]

(kantlijn:) ⟨dergelijke *hier* practisch voorkomende ordin. en cardinaalget. 2 zijn juist het Existenzbeweis voor meetk.-logische element 2 (tenzij men dat systeem volgens Hilbert onafh. wil opbouwen.)[43]⟩

. . . .

⟨12⟩omdat hij hen kan worden ⟦(hij is een knoeier.⟧

Het Exstenzbeweis voor de arithmetik is de werkelijkheid in de partieering van den ruilhandel.

Het Existenzbeweis voor de mathem. logica is de arithmetik.

Zoo kan die mathem. logica alleen als een centralizeering gelden van de arithmetik, ontleent haar leven aan de arithmetik.

....

De weinige dingen in de natuur, die als wetten zijn te zien (waarop de menschelijke zondige veruiterlijking ⟨in hun waan van zelfverdediging⟩ vat heeft), daarvan maken ze niet alleen in hun leven gebruik, maar zeggen zelfs, dat 'alles in de natuur *eenvoudig* (sic) is', omdat hun veroveringsgebied zich langzamerhand wat uitbreidt. **IV-21**

....

Er is niets geen reden om voor de ruimte, die⟨13⟩ hulpfictie voor de beweging van vaste lichamen, niet alleen rationale punten aan te nemen, [daarmee immers is toch ⟨b.v.⟩ een rechte hoek zoo dicht te benaderen als men wil.]

....

(doorgehaald:) ⟦Om dezelfde reden als men de ruimte continu postuleert, postuleert men voor de zijden van een willekeurige gebroken lijn een continu verloop (ten opzichte van eerst willekeurig aangenomen 'maten' op de continue coördinaatassen namelijk; want eigenlijk is de meting op de y totaal onafh. van die op de x.)

Het dwaze gevolg van die getalmaatcontinuiteit is nu dat de beschouwde krommen altijd naar twee kanten volgens dezelfde richting naar 't oneindige moeten, wat toch eigenlijk al te gek is.⟧

....

Bij de physische problemen der var. rekening baseren we op physische continuiteit voor de physische wetten, maar voor de dan gezochte krommen hebben we feitelijk verkapte Differenzenrechnung. (Zoo b.v. voor de brachistochroon[44] wordt voor de ⟨varieerende⟩ kromme een stel punten gerekend, die telkens langs rechte lijntjes worden bereikt), waar geen continuiteit hoeft ondersteld te worden voor de punten. **IV-22**

(tussen de regels en in de kantlijn:) ⟨En dit rechtvaardigt dan om voor de 'rekening' alleen continue krommen in te voeren en zelfs differentieerbare, omdat we bij de brach. wel zien, dat andere er geen sec. langer over doen.[45]

Behalve nog dat men physisch een bewegings*richting*, die niet plotseling kan veranderen, uit het inertiebeginsel moet aannemen.⟩

⟨13⟩ Er is niets geen reden om voor de ruimte, ⟦dat⟧

. . . .

We weten alleen, dat voor dát fictieve stel van ruimte en tijd, dat als ondergrond dient voor de beweging van vaste lichamen (een ander stel, dan het filosofisch–moreele) betrekkelijk eenvoudige physische wetten gelden; maar dat is geen wonder.

Misschien overigens zouden, door het stel ruimte-tijd te wijzigen (b.v. discontinu te stellen), *) vele physische wetten eenvoudiger worden.[46]

*) ⟨of door niet op dat stel, maar op iets anders te betrekken,⟩

. . . .

[Er zullen wel Euclidische gesloten ruimtes zijn ook.] ⟨dit zegt overigens niets, dan invoeren van andere coördinaten, continue of discontinue.⟩

. . . .

IV-23 Maar ten slotte is het betrekken op ⟨physische⟩ 'maat' *) een der ergste 'Verstarringen', waarop men zou kunnen betrekken. [47]

Want dat 2 aardappelen in andere omstandigheden nog dezelfde waarde zouden hebben, is onzin. Omdat het de makkelijkste (toestaande, dat men in 't hoofd zich houdt opgesloten) verstarring is, is het daarom niet de betrouwbaarste. Beter nog richt men zich naar een gevoel van warmte of van gemak. Het best naar een gevoel van sympathie, als norm voor 'weer hetzelfde'.

*) *(over 'maat' in de kantlijn:)* ⟨het is goed als strijdmiddel; als waardeering van wat voor jezelf en anderen goed is, voert het tot voedselvervalsching en dergelijke. Maar het is een essentieel ding, om de wereld wiskundig meester te worden. ⟩

. . . .

Het eendimensionaal continuum is ⟨opgebouwd als⟩ *) een 'groep' van transformaties van eenige punten. Voor die 'groep' noemt men de punten lineair geordend; ⟨de lineaire groep is als groep natuurlijk polydimensionaal.⟩ Voor andere 'groepen' heten ze planair geordend.

In de quaternionen heeft men een voorbeeld, hoe de meerdimensionale groep door één teeken wordt voorgesteld (dat dat in 4 teekens van het lineair continuum desverkiezende kán worden gesplitst, doet niets ter zake.) (Die teekens van de eendimensionale groep zijn het meest 'geläufig', – maar ze zijn niet de elementaire of zooiets – en daarom herleidt men er graag op.)

(kantlijn:) ⟨Dedekind bouwt de reeks ω ook op als groep.[48]⟩

Eigenlijk moet men niet de dingen, maar alleen de operatiegroep beschouwen [alleen aan die groep ontleenen de dingen hun zoogenaamde 'ordening'].

*) *(kantlijn, over 'bouwen' van het continuüm:)* ⟨we hebben het wel intuitief; maar dat we juist dat intuitieve nemen, komt, omdat we alleen zóó weten, dat we voor allerlei groepen, die we eventueel zullen bouwen, nooit punten te kort zullen komen.⟩

....

Het is waar (Mannoury), dat men bij het noemen van een getal b.v. 4 steeds denkt aan een bepaalde lineaire groeporde, waarin die groep van vier is erzeugt, zooals men de steeds groeiende lengte van een rechte lijn ook in een bepaalde volgorde erzeugt. Van een cardinaalgetal is voorshands geen sprake.[49] **IV-24**

....

Het zien van de wiskunde als een spel van associatie van symbolen is mogelijk, maar het is een bedriegelijke, doode, eenzijdige projectie, analoog aan het zien van het *denken*, als een stel van ⟨physieke⟩ associatiebanen, op een anatomische plaat. Het heeft niets met de levende werkelijkheid te maken.

....

Oorspr. was de levende passie van het meten, d.i. tellen, ⟨toegepast⟩ op het continuum,[⟨14⟩] dat bestond uit de aarde, die straf onzer zonde, en van het gewone tellen. Beide werken met ⟨ordinaalgetallen, voor de begeerte van groote en kleine gezien als⟩ *cardinaalgetallen*; het was een toevallige tuimeling,[50] te merken, dat dit ging,*) het werken met cardinaalgetallen, en vastheid gaf;‖ want **IV-25** het bleken standvastige dingen voor eenmaal als standvastig bekeken groepen.

*) *(onderaan pag. 24:)* ⟨een reageeren op een abnormale indruk zonder gewetensreactie, zooals een hond, ⟨de kachel ontdekkend en er op⟩ reageerend, er bij gaat liggen,⟩

(kantlijntoevoeging, in het schrift eveneens op pag. 24:) ⟨Analoog in andere gedeelten der wiskunde: men merkt, dat voor bepaalde samenvattingen een zekere 'graphische voorstelling' voor zekere eigenschappen 'gaat', maar daarom *is* zij het niet.⟩

(kantlijn, pag. 25:) ⟨een bewijs uit bouwpoging⟩

Beide waren dus ⟨tuimelwaarheden,[⟨15⟩]⟩ Weliswaar merkt men achteraf, dat ⟨het cardinaalgetal kan tegen volgordeverandering, omdat⟩ de onstandvastigheid van het cardinaalgetal widersinnig zou ⟨zijn⟩ (hang b.v. aan 7 boomen ⟨a, b, c, d, e, f, g⟩ de bordjes 1 - 2 - - - 7, hang dan 7 op c, waar ik 7 houden wil, maar tegelijk nu 3 op g; hang zoo achtereenvolgens elk cijfer op zijn plaats:

⟨14⟩ Oorspr. was de levende passie van het meten, d.i. tellen, ⟦toepassen⟧ op het continuum,

⟨15⟩ Beide waren dus ⟦empirische waarheden⟧

steeds blijven alle boomen bezet,⟨16⟩ maar dat doet niet af, dat het feit van de tuimeling met het gevoel van de 'Widersinn' – die niets is als een vastneeming van het intellect binnen de tuimeling⟨17⟩ – empirisch was ⟨in haar 'merken dat het gaat'.[51]⟩

Want waarom loopt er intusschen geen boom weg, onder de cijferverhanging? *) Je zou zeggen: dan zou ik hem missen, maar hoe weet ik dan, dat de voorstellingsgroep in mijn hoofd niet wisselt?

*) *(kantl.:)* ⟨Hiervan wordt trouwens ook gebruik gemaakt bij de logistici.⟩

Neen ik weet alleen, ik vind rust bij de voorstelling van cardinaalgetal.

Nog duidelijker – hoewel in den zelfden zin – is de ⟨tuimeling in de⟩ mogelijkheid der meetkunde.

Maar nu worden de trigonom. formules physisch empirisch in nieuwen zin.

IV-26 Ten slotte komt de centralizeerende wetenschap ⟨der Mengenlehre,⟩ die ⟨stel selmatig⟩ van het tellen uitgaat,⟨18⟩ en die de ⟨empirische⟩ meetkunde leert onderbrengen in de Mengenlehre als hypothese ter samenvatting van die physische verschijnselen.

De oorspronkelijke tuimeling van het tellen, vergefelijk als spelen met vuur van kinderen, en imitatie door groote kinderen,⟨19⟩ wordt zoo omgezet in bewuste, welbegrepen, zondigheid.

Deze zou zijn te vergeven, als na Hereeniging van de naieve zonde, in het niet wordt teruggekeerd; maar integendeel, men gaat nu zijn tegendeelen ⟨(continuiteit in ω), als uitbreiding⟩ met satanisch genoegen er nog bij uitoefenen.

. . . .

Het verstand leidt de hartstochten, door een beperkt gebied te concentreeren, waarop ze zich mogen ontketenen. ⟨Immers, na zijn veruiterlijking te hebben gewonnen, dwingt het nu niet alleen de natuur daarin, maar ook de eigen hartstochten; en daarmee komt de straf voor de overwinning.⟩

. . . .

Dat de verstandsbeperking kon ontstaan op de aarde, was een teeken van haren ouderdom.

(kantl.:) ⟨Vroeger was alles gelukkig in de momenteele wisselwerking.⟩

⟨16⟩hang zoo achtereenvolgens elk cijfer op zijn plaats: steeds blijven alle boomen bezet, ⟦maar bij dat vasthouden aan alle boomen ⟨van de groep⟩ in het bewijs lijk ik ze feitelijk ...⟧

⟨17⟩die niets is als een vastneeming ⟦in⟧ het intellect binnen de tuimeling

⟨18⟩die ⟦aantoont, waarom het tellen ging*(?)*

⟨19⟩en imitatie ⟦door⟧ groote kinderen,

De verstandswezens konden de anderen, die niet meededen, dooden. Het gevoel is dood of in slavernij.

Alles wordt op het deelgebied betrokken, en *zelfstandige* ‘andere’ emanaties door de duivelsche macht van het verstand buitengehouden.

⟨*Vrees*, dat is het betere niet op *zijn* terrein willen ontmoeten.

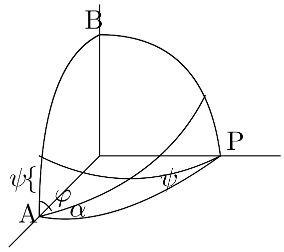
Begeerte, dat is het betere willen lokken op eigen terrein, om het te vernietigen of beheerschen.⟩

. . . .

[Stel voor een veld opgesloten in een vat.[52] Is dan, als het veld bekend is, niet af te leiden, hoe het zich zal wijzigen bij een kleine bepaalde wijking van den wand?] **IV-27**

(kantlijn:) ⟨Een veld, dat eigenlijk, zoowel voor 2 als 3 dimensies, wel direct was in te zien, uit een juiste wijziging van het op pag. 6 van dit cahier doorgeschrapte veld met krachtlijnen in halve cirkels van verschillende grootte.

En ook voor n dimensies (denk hypersfeer; het vlak v.h. magneetje bepaalt 2 assen, één vlak; het punt P is dan het eindpunt van een willekeurige loodlijn op dat vlak, en alle krachtbuizen zijn homothetisch met AB, en verkleinen zich van AB naar een der punten P.⟩



[Aan de diff. vgl. v. Laplace voor ellipt. ruimte voldoet b.v.

$$\psi = \text{bgtg} \frac{r \cos \varphi}{2k} \qquad (I)$$

(kantlijn:) ⟨d.i. de projectie van de voerstraal op de poolas, elliptisch op de hypersfeer gemeten; we zouden als coörd. kunnen voeren deze: $\beta_{ell.}$ en de voerstraal $\alpha_{ell.}$⟩

. . . .

[De pot. v.h. dubbelpunt in de ell. ruimte is misschien nog te vinden door een inversie (omdat we er toch vlakke krachtbuizen hebben, n.l. in de meridiaanvlakken)]

. . . .

(in aansluiting op de voorlaatste paragraaf:) [Bepaal eens de differentiaal van

deze functie⟨20⟩ voor een oneindig kleine draaiing om oorsprong over $d\varphi$. Die differentiaal voldoet natuurlijk ook.]

. . . .

[Dan komt voor de som het veld van een harmonisch ⟨golvend⟩ magnetisch belegde lijn. (die voor het Euclidische beeld in 't oneindige ligt, maar dat doet aan de algemeenheid van het veld voor de ell. ruimte niet af.) Nu moet een enkel magn. dubbelpunt zijn te sommeeren uit harmonisch golvende magneten langs de lijn van de as van het dubbelpunt.

Maar ook uit het ⟨homogene⟩ magnetische agensvlak (met grenslijn daarin) van het veld (I) (zie boven) moet het enkele dubbelpunt zijn te integreeren. Beide ⟨velden⟩ zijn ⟨overigens⟩ even algemeen.

IV-28 Het veld (I) wordt bepaald door een vlak met een lijn er in; het veld v.h. dubblpunt door een punt met een lijn er door.]

. . . .

Is uit de bolfunctie: $\left[\begin{array}{l} bovenhelft : f = +1 \\ onderhelft : f = -1 \end{array}\right. \quad (1)$

niet door integratie te komen, hetzij tot: $\left[\begin{array}{l} f(\varphi)_{\varphi+0} = +1 \\ f(\varphi)_{\varphi=\pi} = -1 \\ f(\varphi)_{0\neq\varphi\neq\pi} = 0 \end{array}\right. \quad (2)$

hetzij tot: $f(\varphi) = \cos\varphi$ (3)

Dan zou het vraagstuk van de potentiaal der ell. ruimte zijn opgelost.

. . . .

[Formule van Lorentz voor een potentiaal F

$$F_p = -\frac{1}{8\pi^2}\int \frac{d^2U}{du^2}d\omega$$

$$U = \int F d\sigma \text{ over het platte vlak, door } P \perp d\omega$$

$d\omega$ = kegelopening in den oorsprong.]

(kantlijn:) ⟨Lorentz neemt ter verklaring der gravitatie aan, dat ongelijks. electr. zich iets sterker aantrekken, dan gelijks. zich afstoten⟩

. . . .

Sommeer de bolfunctie (1) over een halve bol, dus de pos. pool A kan komen op allen punten van de bovenhelft. Voor welke punten B op de bovenhelft wordt

⟨20⟩ *bedoeld is de functie (I)*

dan de + waarde gevonden? Voor die, waarvoor $AB < \frac{1}{2}\pi$. De integraal krijgt dus ‖ voor een punt P de waarde ξ, als ξ is het deel, dat van de bovenhelft om P ligt op de eenmaal aangenomen bovenhelft. Dat deel is: $\frac{\pi - 2\varphi_P}{\pi}$. **IV-29**

Sommeer de bolfunctie (1) volgens $\cos\varphi_P$ als φ_P is de afstand tot een willekeurige pool P, dan komt een functie van P, en die is gelijk aan de sommatie van alle functies $\cos\varphi_P$ volgens (1), hetgeen licht blijkt weer een zonale bolfunctie der 1^{ste} orde te zijn. [Immers sommeer maar de velden der dubbelpunten met pos. pool naar boven gericht, en trek daarvan af de som der velden der dubbelpunten met pos. pool naar beneden gericht, dan komt weer een dubbelpuntsveld.]

Dus werkelijk is uit (1) een veld (3) af te leiden door integratie.]

. . . .

[Het laatste is niet volkomen zuiver uitgedrukt. Beter aldus: (1) en (3) zijn zonale bolfuncties. En nu is van 2 zonale bolfuncties P en Q de $F = \int PQd\omega$ ook ⟨als⟩ een zonale bolfunctie te beschouwen, n.l. als functie van de sferische afstand der beide polen. Die zonale bolfunctie is dan te beschouwen

1^e als integraal van de bol van de ∞^2 functies Q met coëff. volgens een bepaalde functie P.

2^e als integraal van de bol van de ∞^2 functies P met coëff. volgens een bepaalde functie Q.

Sommeren we dus in ons vraagstuk de ∞^2 ruimtefuncties bgtg$\frac{r\cos\varphi}{2k}$ met coëff. volgens een vaste functie $\cos\varphi$, dan komt in 't oneindige de superpositie van de ∞^2 functies (1) volgens een vaste functie (3), dat wordt hetzelfde als de superp. van ∞^2 functies (3) volgens een vaste functie (1), en dat wordt weer een functie (3)]

. . . .

Uit de voorgaande redeneering volgt op analoge wijze, dat uit *elke* zonale bolfunctie de functie $\cos\varphi$ kan worden geïntegreerd. **IV-30**

. . . .

[Tusschen twee algebraïsche irrationalen behoeft niet altijd een relatie met rationale coëfficienten te bestaan (Jahresber. 15.1. pag.34 Schoenflies)][53]

. . . .

[Het continuum is intuitief, correctie op de bepaaldheid, het mathematisch 'continuum' is heel iets anders: *dat* moeten we heelemaal kunnen construeeren uit eindige getallen en inductief (d.i. vrijheid laten van sprongverandering zonder eigenschap–verandering, dus eendimensionale sprongverandering)][54]

. . . .

Het boogelement $\sqrt{\sum_2 dx_p dx_q}$ volgt uit de voorwaarde, dat het oppervlak zich in 't oneind. kleine gedrage als een Euclidisch plat vlak.

....

(Vahlen) 'Der Grundsatz der relativen Dichte fordert noch weniger als die Meszbarkeit und ist zugleich der am wenigsten fordernde Grundsatz der zur Begründung der projektiven Geometrie hinreicht'.[55]

....

[Veronese schijnt buiten de Cantorsche Wohlgeordnete Menge der zweiten Zahlenklasse nog $\frac{\omega}{2}$ enz. toe te laten. Volgens Cantor is $\frac{\omega}{2} = \omega$; wat is hiervan de oplossing?]

(kantlijn:) ⟨Zie Schoenflies Jahresber. 15.1. p. 26[56]⟩

....

IV-31 De Zerlegung der wetenschap in eenvoudige – primaire – dingen en bewerkingen, is dáárom zoo onzinnig, omdat toch ook die primaire dingen slechts zin hebben, toegepast op het volle leven, dus op de spontaniteit. De spontaniteit, die we wilden ontvluchten, blijft dus in haar vollen omvang een vereischte.

....

[Gaan we bgtg$r\frac{\cos\varphi}{2k}$ volgens $\cos\psi$ over den bol integreeren,[57] dan komt de integraal als functie van ω, den sferischen afstand van de polen der beide zonale bolfuncties en van r. We krijgen

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[\text{bgtg}\frac{r\cos\vartheta}{2k}](\cos\vartheta\cos\omega+\sin\vartheta\sin\omega\cos\varphi)\sin\vartheta.d\varphi.d\vartheta.$$

$$of:\cos\omega\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{pi}d\vartheta.\sin\vartheta\cos\vartheta\text{bgtg}\frac{r\cos\vartheta}{2k}+$$

$$\sin\omega\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta.\sin^2\vartheta\text{bgtg}\frac{r\cos\vartheta}{2k}$$

$$of:\cos\omega f_1(r)+\sin\omega f_2(r)\equiv\tau$$

In plaats van de integralen $f_1(r)$ en $f_2(r)$ uit te rekenen, substitueeren we liever τ in de oorspr. diff. vgl. voor de potentiaal.

We zien dan direct, dat $f_2(r)$ weg moet vallen *) en houden voor $f_1(r)$ naar r een ⟨lineaire⟩ diff. vgl. der 2^{de} orde, n.l.

$$2xy^{'}+x^2y^{'}-\frac{8k^2}{x^2+4k^2}y=0 \qquad (1)$$

*) *(kantlijn:)* ⟨wat overigens ook direct in de integraal staat,⟩

[*N.B.* Het grensgeval voor de Eucl. ruimte geeft $2xy' + x^2y' - 2y = 0$, en hiervoor komt werkelijk als algemeene oplossing $y = c_1x + c_2x^{-2}$]

Intusschen kunnen we ook, nu we zien, dat de term met $\sin\omega$ moet wegvallen, voor den term met $\cos\omega$ de integratie uitvoeren.

Dit geeft: $(2\pi\text{maal}) - \frac{2k}{r} + \frac{r^2+4k^2}{r^2}\text{bgtg}\frac{r}{2k}$

Werkelijk blijkt bij substitutie deze uitkomst aan de diff. vgl. (1) te voldoen.] **IV-32**

....

De wiskunde wordt *toegepast op* het continuum; het continuum verschaft de plaats voor al de nieuwe getallen, maar is zelf heel iets anders, als alle Punktmengen.

Zoo werkt het verstand en de wetenschap op de werkelijkheid, maar is zelf geheel iets anders.

....

De eenzijdige blik, die de wereld der werkingen is; vgl. b.v. de blik van een kruidenier op de wereld om hem in zijn buurtje; alles wordt naar koopkracht en drukke tijd en goede klanten afgemeten.

....

[De potentiaal van het 'dubbelpunt zonder meer' in de ell. ruimte wordt nu:

$$\cos\varphi \ \text{ maal } \ ((1+\frac{4k^2}{r^2})(1-\frac{\text{bgtg}\frac{r}{2k}}{\frac{1}{2}\pi})+\frac{4k}{\pi r})$$

$$= \cos\varphi \ \text{ maal } \ (1+\frac{4k^2}{r^2}+\frac{4k}{\pi r}-\frac{2}{\pi}.\frac{r^2+4k^2}{r^2}\text{bgtg}\frac{r}{2k})$$

of als r elliptisch als α wordt gemeten:

$$1+\cot^2\alpha+\frac{2}{\pi}\cot\alpha-\frac{2}{\pi}(1+\cot^2\alpha)\alpha$$

$$of: \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha}(1-\frac{2\alpha}{\pi})+\frac{2}{\pi}\cot\alpha$$

of als β het complement van α:

$$\frac{1}{\cos^2\beta}\frac{2\beta}{\pi}+\frac{2}{\pi}\text{tg}\beta.$$

Of als we den factor π nog schrappen:

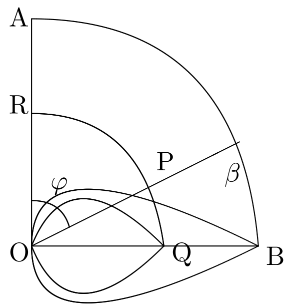
$$\frac{\beta}{\cos^2\beta}+\text{tg}\beta$$

.

Deze potentiaal is onafh. van de constante **k**; ook de diff. vgl. ware onafh. van k geweest, als we die in β en φ hadden geschreven. **IV-33**

Het is nu niet onmogelijk, dat, als we weer in r en φ gaan rekenen en k zeer groot denken, we een attractie tusschen 2 magneten vinden, uit 2 termen bestaande, waarvan de eene voert tot de graviteit voor eindige afstanden.

....



Om de grenskrachtlijn te vinden, schrijven we op als voorwaarde, dat de totale stroom door den bolschijf, die door wenteling van PR ontstaat, *(onleesbare doorh.)* gelijk moet zijn aan den totalen stroom door ⟨den bol, die ⟨uit⟩ AB⟩ door wenteling (ook om OR) ontstaat, dat is de grensbol.

Nu wordt die integraal:

$$\int_0^{\varphi} \overbrace{\frac{2\cos\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos^2\beta}}^{\text{kracht in } \beta \text{ -richting}} \times \overbrace{\sin\varphi\cos\beta}^{\text{draaicirkel om OR}} \times \overbrace{\cos\beta d\varphi}^{\text{boogelem. op PR}}$$

$$= \sin^2\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta).$$

Voor den grensbol wordt dit: 1.

Dus moet voor de grenskromme: $\sin^2\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta) = 1$.

Voor de krachtlijn door O en Q moet in 't tweede lid komen $k > 1$ (= krachtstroom door gebroken lijn ABQ).

Voor een krachtlijn aan den anderen kant van de grenskromme wordt $k < 1$.

IV-34 Wat is dus het gedeelte van de totale (halve) uitstroom uit de pos. pool van het dubbelpunt, dat door boog AB gaat, en ⟨(op de hypersfeer)⟩ niet in de eigen negatieve pool, maar in de antipodaire negatieve pool terecht komt?

[m.a.w. in de Riemannsche ruimte: welk gedeelte van de krachtlijnen verdeelt het meridiaanvlak in tweeën?]

Wel dat is:

$$\frac{[\sin^2\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta)]_{\varphi=\frac{1}{2}\pi;\beta=0}}{[\sin^2\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta)]_{\varphi=\frac{1}{2}\pi;\beta=\frac{1}{2}\pi}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Wat natuurlijk is, want elk der beide polen zendt een oneindig groote krachtstroom uit.

....

Rekenen we analoog de potentiaal voor een elliptisch plat vlak uit, dan wordt de diff. vgl.

(kantlijn:) ⟨De twee eerste termen uit: $\frac{d}{dr}\{\frac{dV}{dr}.\frac{r\sqrt{r^2+4k^2}}{2k}$⟩

$$\frac{d^2V}{dr^2}.\frac{r(r^2+4k^2)}{2k}+\frac{dV}{dr}.\frac{r^2+2k^2}{k}+\frac{d^2V}{d\varphi^2}.\frac{2k}{r}=0$$

Stel V functie van r alleen:

$$\frac{d}{dr}(\frac{dV}{dr}.\frac{r\sqrt{r^2+4k^2}}{2k})=0$$

$$\frac{dV}{dr}=c\frac{2k}{r\sqrt{r^2+4k^2}}$$

$$\frac{dV}{d\frac{r}{2k}}=\frac{c}{\frac{r}{2k}\sqrt{\frac{r^2}{4k^2}+1}}$$

$$V=cl\frac{-1+\sqrt{1+\frac{r^2}{4k^2}}}{\frac{r}{2k}}=cl\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha_{ell.}$$

Hetgeen direct ware te vinden geweest uit de kracht, die voor 2 dim. $=\frac{c}{\sin\alpha_{ell.}}$ en voor 3 dim. $=\frac{c}{\sin^2\alpha_{ell.}}$,

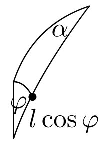
dus pot. = (voor 2 dim.)

$$\int\frac{cd\alpha}{\sin\alpha_{ell.}}=cl\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha_{ell.}$$

(voor 3 dim.)

$$\int\frac{cd\alpha}{\sin^2\alpha_{ell.}}=-c\cot\alpha_{ell.}$$

Hieruit volgt dan uit een boldriehoekje



IV-35 voor pot. van dubbelpunt (met compl. agens in poollijn)

(voor 2 dim.): $\int_0^\alpha \frac{cd\alpha}{\sin\alpha} - \int_0^{\alpha - l\cos\varphi} \frac{cd\alpha}{\sin\alpha} = \frac{cl\cos\varphi}{\sin\alpha} = C\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}$

(voor 3 dim.): $\int_0^\alpha \frac{cd\alpha}{\sin^2\alpha} - \int_0^{\alpha - l\cos\varphi} \frac{cd\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{cl\cos\varphi}{\sin^2\alpha} = C'\frac{\cos\varphi}{\sin^2\alpha}$

....

Stel V functie van φ alleen; dan $V = c\varphi$. [Dit is, voor de oorsprong ⟨der hoeken verplaatst naar⟩ snijpunt van X-as en poollijn de bekende formule (zoowel voor 2, als voor 3 dimensies):

$$c.\mathrm{bgtg}\frac{\mathrm{r}\cos\varphi}{2\mathrm{k}}. \qquad (\text{functie van x} = \mathrm{r}\cos\varphi)]$$

De analoge formule voor 3 dimensies wordt hier:

$$V = cl\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi$$

(doorgehaald:) ⟦Hetgeen voor de analoge oorsprongverschuiving wordt:

$$C\left\{\sqrt{\frac{4k^2}{r^2\cos^2\varphi}+1} - \frac{2k}{r\cos\varphi}\right\} \qquad (\text{functie van x} = r\cos\varphi).⟧$$

Is het nu misschien waar, dat de functie van '*φ alleen*' voor n dimensies gelijk is aan die van '*$\alpha_{ell.}$ alleen*' voor $n-1$ dimensies? *Ja*, want bij beide nemen de overeenkomstige oppervlakken van ⟨$n-1$, resp. $n-2$⟩ afmetingen,⟨21⟩ wat hun hyperoppervlak binnen eenz. krachtbuis betreft, toe evenredig met $\sin^{n-2}\varphi$ resp. $\sin^{n-2}\alpha_{ell.}$.⟨22⟩ (Voor de φ hebben we een niet–Eucl. kegel – beschr. lijnen zijn lang $\frac{1}{2}\pi$; maar elk lineair element van den ⟨hyper⟩ -omtrek van het grondvlak neemt toe evenr. met $\sin\varphi$; die omtrek is van $n-2$ afm.; voor de $\alpha_{ell.}$ daarentegen hebben we een bolopp. van $n-2$ afm., waarvan elk lineair element groeit evenr. met $\sin^{n-2}\alpha_{ell.}$)

....

IV-36 *(deze pagina 36 is geheel doorgehaald)* ⟦*Te integreren*

⟨21⟩ *Ja*, want bij beide nemen de overeenkomstige oppervlakken van ⟦$n-2$⟧ afmetingen,

⟨22⟩toe evenredig met $\sin^{n-2}\varphi$ resp. $\sin^{n-2}\alpha_{ell.}$. ⟦(elk lineair element neemt toe evenr. met $\sin\varphi$ resp. $\sin\alpha_{ell}$, voor⟧

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} 2\sin\vartheta\cos\vartheta \,\mathrm{bgtg}\left\{\frac{r\cos\omega}{2k}.\cos\vartheta + \frac{r\sin\omega\cos\varphi}{2k}.\sin\vartheta\right\} d\vartheta.$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi(\frac{1}{2}\pi?)} d\varphi \int_0^{\pi} 2\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta \,\mathrm{bgtg}\left\{\cos\vartheta.\frac{r\cos\omega}{2k} + \sin\vartheta.\frac{r\sin\omega\cos\varphi}{2k}\right\}$$

Integreren dus

$$\int_0^{\pi} \mathrm{bgtg}\left\{a\cos\vartheta + b\sin\vartheta\right\} d\sin^2\vartheta$$

$$= \left[\sin^2\vartheta.\mathrm{bgtg}\left\{a\cos\vartheta + b\sin\vartheta\right\}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin^2\vartheta.\frac{-a\sin\vartheta + b\cos\vartheta}{1+(a\cos\vartheta+b\sin\vartheta)^2} d\vartheta$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sin^2(\psi-\alpha)\frac{\cos\psi d\psi}{1+(a^2+b^2)\sin^2\psi}$$

$$2\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\sin\psi\cos^2\psi d\psi}{1+(a^2+b^2)\sin^2\psi} \qquad (1)$$

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{1+a^2+b^2} \qquad \int_{\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\sin\psi\cos^2\psi d\psi}{1-\frac{a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\cos^2\psi}$$

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{1+a^2+b^2}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\sin\psi\cos^2\psi d\psi}{1-\frac{a^2+b^2}{1+a^2+b^2}\cos^2\psi}$$

$$\frac{2\sqrt{1+a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{a^2+b^2}\int_{\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}}^{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{x^2dx}{1-x^2}$$

$$4\frac{\sqrt{1+a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{a^2+b^2}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}}\frac{x^2dx}{1-x^2}$$

$$\boxed{-4\tfrac{b\sin\alpha\cos\alpha}{a^2+b^2} + \tfrac{2\sqrt{1+a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{a^2+b^2}.l\left\{\sqrt{1+a^2+b^2}+b\right\} - \tfrac{2\sqrt{1+a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{a^2+b^2}.l\left\{\sqrt{1+a^2+b^2}-b\right\}}$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\cos^2\alpha\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\sin^2\psi\cos\psi d\psi}{1+(a^2+b^2)\sin^2\psi} \qquad (2)$$

$$-\sqrt{a^2+b^2}\sin^2\alpha\int_{\alpha}^{\pi+\alpha}\frac{\cos^3\psi d\psi}{1+(a^2+b^2)\sin^2\psi} \qquad (3)$$

De integratie van (2) en (3) en evenzoo de latere uit die ⟨gevonden⟩ integraal naar φ levert geen moeilijkheden. Wel de latere van φ van (1), die wordt:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{r^2}{2k^2}-a^2}} db\frac{\sqrt{1+a^2+b^2}\sin\alpha\cos\alpha}{(a^2+b^2)\sqrt{\frac{r^2}{2k^2}-a^2-b^2}}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}}\frac{dx}{1-x^2}$$

]] *(einde doorhaling)*

In 't algemeen voor n *afm.*: pot. dubbelpunt (mét magnetische poolruimte er bij:) $\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1}\alpha}$ **IV-37**

Correctie potentiaal komt weer uit integratie van bgtg$\frac{r\cos\varphi}{2k}$ volgens $\cos\varphi$ over de hypersfeer.

Dit geeft:

$$\cos\omega\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^{n-2}\vartheta\sin^{n-3}\varphi\cos\vartheta\,\mathrm{bgtg}\frac{r\cos\vartheta}{2k}d\vartheta d\varphi$$

Hierin blijft $\int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi d\varphi$ als constante figureeren, en komt

$c\cos\omega\int_0^\pi \sin^{n-2}\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{bgtg}\frac{r\cos\vartheta}{2k}d\vartheta$.

[Hetgeen direct was in te zien geweest, daar natuurlijk moet komen $\cos\omega$ maal de waarde der integraal voor samenvallende polen der beide bolfuncties.]

Nu is de integraal

$$c\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\cos\varphi\,\mathrm{bgtg}\frac{r\cos\varphi}{2k}d\varphi = 2kr\int_0^\pi \sin^n\varphi\frac{d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi}$$

En de laatste integraal is te herleiden volgens:

$$r^2\int_0^\pi\frac{\sin^n\varphi d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi} = (4k^2+r^2)\int_0^\pi\frac{\sin^{n-2}\varphi d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi} - \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi d\varphi$$

Denk nu eerst n oneven $= 2n+1$, en noem F_1 de finctie van r, waarmee $\cos\omega$ moet worden vermenigvuldigd. Dan is:

$$r^{2n}F_1 = r^{2n+1}\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi\frac{d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi}$$

$$r^{2n}F_1 = r^{2n-1}(4k^2+r^2)\int_0^\pi \sin^{2(n-1)+1}\varphi\frac{d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi} - r^{2n-1}\int_0^\pi \sin^{2(n-1)+1}\varphi d\varphi.$$

$$= r^{2n-3}(4k^2+r^2)^2\int_0^\pi \sin^{2n-3}\varphi\frac{d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi}$$

$$-r^{2n-3}(4k^2+r^2)\int_0^\pi \sin^{2n-3}\varphi d\varphi - r^{2n-1}\int_0^\pi \sin^{2n-1}\varphi d\varphi.$$

[$\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi d\varphi = 2\frac{2n.(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3.1}$ [$\int_0^\pi \sin^{2n+1}\varphi d\varphi = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

$\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3.1}{2n(2n-2)\ldots 2}\pi$] en $\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\pi$]

$$= r^{2n-5}(4k^2+r^2)^3\int_0^\pi\frac{\sin^{2n-5}\varphi d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi} - r^{2n-5}(4k^2+r^2)^2\int_0^\pi \sin^{2n-5}\varphi d\varphi$$

$$-r^{2n-3}(4k^2+r^2)\int_0^\pi \sin^{2n-3}\varphi d\varphi - r^{2n-1}\int_0^\pi \sin^{2n-1}\varphi d\varphi$$

.

8 *(doorgehaald:)*

⟦

$$\frac{r}{2k} = \rho \qquad \frac{\rho \sin\omega \sin\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}} = x \qquad \frac{\rho \sin\omega \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}} = dx$$

Dus uit te rekenen:

$$-\frac{(1+\rho^2)\cos\omega}{\rho^3} \int dx.\sqrt{1-x^2}.\frac{1}{(1-\frac{1+\rho^2}{\rho^2}x^2)^2}.l.$$

$$\left[\left\{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2\omega}{1+\rho^2} - x^2}\right\}\sqrt{1+\rho^2}\right]$$

Dus uit te rekenen:

$$\int_0^{\frac{\rho\sin\omega}{\sqrt{1+\rho^2}}} dx.\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-\frac{1+\rho^2}{\rho^2}x^2)^2}\Bigg|^{\text{partieel integreeren}} l\left\{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{\rho^2\sin^2\omega}{1+\rho^2} - x^2}\right\}$$

⟧

Stel $F_1 = 2F$, dan:

$$\begin{aligned}
r^{2n}F = \tfrac{(4k^2+r^2)^n}{2k}\mathrm{bgtg}\tfrac{r}{2k} \quad & -r(4k^2+r^2)^{n-1}\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\varphi d\varphi \\
& -r^3(4k^2+r^2)^{n-2}\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^3\varphi d\varphi \\
& \qquad\vdots \\
& -r^{2n-5}(4k^2+r^2)^2\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n-5}\varphi d\varphi \\
& -r^{2n-3}(4k^2+r^2)\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n-3}\varphi d\varphi \\
& -r^{2n-1}\textstyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n-1}\varphi d\varphi
\end{aligned}$$

$$\frac{(4k^2+r^2)^n}{2k}\text{bgtg}\frac{r}{2k} \quad -r(4k^2+r^2)^{n-1}$$

$$-r^3(4k^2+r^2)^{n-2}.\tfrac{2}{3}$$

$$-r^5(4k^2+r^2)^{n-3}.\tfrac{2.4}{3.5}$$

$$\cdots$$

$$-r^{2n-3}(4k^2+r^2).\tfrac{2.4.\cdots(2n-4)}{3.5.\cdots(2n-3)}$$

$$-r^{2n-1}.\tfrac{2.4.\cdots(2n-4)(2n-2)}{3.5.\cdots(2n-3)(2n-1)}$$

IV-39

$$2kF = \alpha.\tfrac{1}{\sin^{2n}\alpha} \quad -\cot\alpha.\tfrac{1}{\sin^{2n-2}\alpha}$$

$$-\tfrac{2}{3}\cot\alpha.\tfrac{1}{\sin^{2n-4}\alpha}$$

$$-\tfrac{2.4}{3.5}\cot\alpha.\tfrac{1}{\sin^{2n-6}\alpha}$$

$$\vdots$$

$$-\tfrac{2.4.\cdots(2n-4)}{3.5.\cdots(2n-3)}\cot\alpha\tfrac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$-\tfrac{2.4.\cdots(2n-4)(2n-2)}{3.5.\cdots(2n-3)(2n-1)}\cot\alpha$$

De eindpotentiaal, de zuivere dubbelpuntspotentiaal wordt voor $2n+1$ afm.:

$$\frac{\beta}{\cos^{2n}\beta}+\text{tg}\beta\left\{\sec^{2n-2}\beta+\frac{2}{3}\sec^{2n-4}\beta+\frac{2.4}{3.5}\sec^{2n-6}\beta+\cdots+\frac{2.4.\cdots(2n-2)}{3.5.\cdots(2n-1)}\right\}$$

of:

$$\frac{1}{\cos^{2n}\beta}\left\{\beta+\sin\beta\left[\cos\beta+\frac{2}{3}\cos^3\beta+\frac{2.4}{3.5}\cos^5\beta+\cdots\frac{2.4.\cdots(2n-2)}{3.5.\cdots(2n-1)}\cos^{2n-1}\beta\right]\right\}$$

(doorgehaald:) ⟦De limiet van deze functie voor een oneindig aantal metingen is nu ook eenvoudig op te schrijven.⟧

. . . .

Voor ellipt. plat vlak komt voor de correctiefunctie:

$$\frac{\cos\omega}{r}\left\{r^2\int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi}\right\} = \frac{\cos\omega}{r}\left\{(4k^2+r^2)\int_0^\pi \frac{d\varphi}{4k^2+r^2\cos^2\varphi} - \int_0^\pi d\varphi\right\}$$

Voor de eerste integraal wordt $\mathrm{tg}\varphi = x$ gesteld, dan komt ten slotte:

$$\cos\omega\left\{\sqrt{1+\frac{4k^2}{r^2}} - \frac{2k}{r}\right\} = \cos\omega\left\{\frac{1}{\sin\alpha} - \cot\alpha\right\}$$

De eindpotentiaal wordt: $\cos\omega\cot\alpha$ ⟨of $\frac{2k}{r}\cos\omega$.⟩ De potentiaalniveau's zijn dus dezelfde, als voor Euclidische meting; niet echter de krachtlijnen.

. . . .

Een hypersfeer ⟨H_7⟩ van 7 afm. aldus voor te stellen: plaats in R_8 met 8 assen OX_1, $-OX_1$, OX_2.... OX_8, $-OX_8$. Van X_1 ga ik naar een H_6 in $X_2 \ldots X_8$ volgens een halve H_7 over sfer. afst. van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ (vandaar weer dóór naar $-OX_1$). In H_6 ga ik volgens afst. 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ van X_2 naar een H_5 in $X_3 \ldots X_8$ (vandaar weer dóór naar $-X_2$). In H_5 enz. ....

Het dubbelpunt sta in X_1 en wijze naar X_2. Ik krijg nu álle punten van de hypersfeer, eenduidig door álle punten van de H_5 door een ⟨halve bol⟩ te vereenigen met den cirkel door $\pm X_1, \pm X_2$; van de ell. R_7 (eveneens eenduidig, behalve voor de H_5 zelf, waar punten tweemaal geteld worden), door alle punten van de H_5 te vereenigen met de ell. rechte lijn door X_1 en X_2 volgens een half elliptisch plat vlak. In die halve ‖ bollen, resp. halve ell. pl. vlakken loopen de **IV-40** krachtlijnen van het dubbelpunt.

Het veld $\mathrm{bgtg}\frac{r\cos\varphi}{2k}$, dat geldt voor H_3 moet ook gelden voor H_n, want teeken de krachtlijnen volgens dat veld in elk der bedoelde halve bollen, waarvan sprake is, dan is binnen dat vlak de *div.* 0, maar beschouw nu voor een H_n twee willekeurige ⟨dicht bij elkaar⟩ van die H_3's en twee overeenkomstige krachtlijnen er in, dan is de verbindingslijn van twee overeenk. punten op de beide krachtlijnen 1^e loodrecht op die krachtlijnen en 2^e constant over de heele lengte der krachtlijnen. De ruimte R_5 door de overeenk. punten van alle overeenk. krachtlijnen dicht bij elkaar, heeft dus 1^e constante inhoud binnen de krachtbuis en is 2^e loodrecht op de krachtbuis. Zoodat de flux-eigenschap voor dat veld, ook voor een willek. aantal afmetingen, behouden blijft.

. . . .

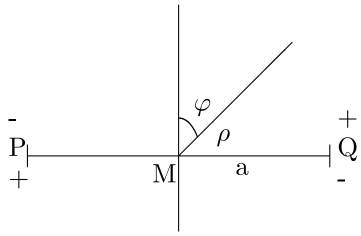
De zooeven gevonden dubbelpuntspotentialen zijn algemeen voor elliptische ruimtes, maar nog niet voor hypersfeeren. Maar voor hypersferen hebben we gevonden: dubbelpunt + gelijk dubbelpunt in tegenpunt.

Maar ook volgens Schering: dubbelpunt + tegengest. dubbelpunt in tegenpunt.

Door sommeering van beide komt het ⟨algemeene⟩ dubbelpunt op de hypersfeer.

....

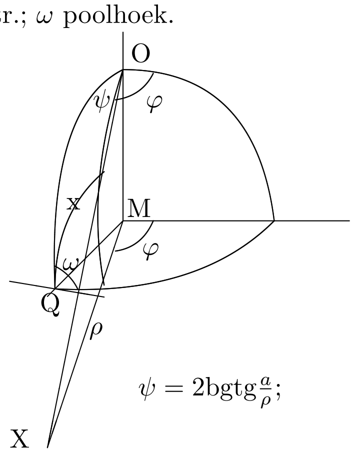
Dubbelpunt in ell. R_2 of twee gelijke dubbelpunten in tegenpunten op gewone bol is ook te vinden door conforme afbeelding uit het platte vlak. Zet daar in 't pl. vlak maar 2 parallel en tegengest. gerichte dubbelpunten, en projecteer ze dan zoo op den bol, dat ze in tegenpunten uitkomen.



Potentiaal $$\frac{4a^2\rho^2\sin\varphi\cos\varphi}{(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\sin^2\varphi}$$

De cirkel om M door P en Q is ⟨van⟩ de projectiebol middelvlak. We projecteeren uit den bovenpool O.

We nemen op den bol als coörd. eerst: ψ voerstr.; φ poolhoek. Dan: x voerstr.; ω poolhoek.



$\psi = 2\text{bgtg}\frac{a}{\rho}$; $\cos\psi = \sin x\sin\omega$

$\cot\varphi = \text{tg}x\cos\omega$

$$\varphi^2 = a^2\frac{1+\cos\psi}{1-\cos\psi} = a^2\frac{1+\sin x\sin\omega}{1-\sin x\sin\omega}$$

$$\rho^3\sin^2\varphi = a^2\frac{1+\sin x\sin\omega}{1-\sin x\sin\omega}.\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2\omega} =$$

$$= a^2 \frac{1+\sin x sin\omega}{1-\sin x \sin\omega} . \frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x \sin^2\omega} = \frac{a^2\cos^2 x}{(1-\sin x\sin\omega)^2}$$

$$\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{a^2 \sin x \cos x \cos\omega}{(1-\sin x\sin\omega)^2}$$

Potentiaal wordt $\cot x \cos\omega$, de oude uitkomst.

. . . .

Nu het enkele dubbelpunt op den bol: 2 gelijke dubbelpunten: $\cos\omega\cot x$

$_{Som}$ 2 tegengest. dubbelpunten: $\cos\omega\csc x$

Een enkel dubbelpunt = $\cos\omega\cot\frac{1}{2}x$

(kantl.:) ⟨zooals ook direct komt door conforme afbeelding⟩

De correctiepotentiaal was $\cos\omega \mathrm{tg}\frac{1}{2}x$, was dus van een dubbelpunt in het tegenpunt. Dat zal waarschijnlijk wel van alle correctiepotentialen voor n dimensies gelden. Natuurlijk, want die correctiepotentialen zijn het verschil van de potentiaal met gelijke dubbelpunten in tegenpunten, en die met tegengest. dubbelpunten in tegenpunten.

Gang van het betoog voor de hypersfeer H_n. Dubbelpunt P_1 en antipodisch P_2 hebben velden V_1 en V_2. Dan is V_1+V_2 bekend. Ook is bekend $2V_3$, het veld van een harmonische belegging met agens van de pool – H_{n-1} van P_1 en P_2. $V_1+V_2+2V_3$ is 0 in H_{n-1}. Daar V_1 en V_2 in H_{n-1} gelijk zijn, is $V_1+V_3=0$ in H_{n-1}, dus ook over $(H_n)_2$, d.i. de naar P_2 gekeerde helft van H_n. Evenzoo is $(V_2+V_3)_1=0$. Dus is (V_1-V_2) bekend $=(V_1+V_3)_1=(V_1+V_2+2V_3)_1$. Ten slot: $(V_1)_1=(V_1+V_2)_1+(V_1-V_2)_1$; $(V_1)_2=-(V_3)_2$

. . . .

. . . .

Notes

[1]Meervoudige ordeningstypen, dat wil zeggen in één vezameling meerdere opvolgingsverbanden. Zie Cantor, M.A. 46 en 49. In § 7 van M.A. 46 wordt dit genoemd, maar van verdere bespreking wordt daar (voorlopig) afgezien. M.A. 49 komt er niet op terug. Ook Bernstein beperkt zich in M.A. 61 tot 'einfach geordnete Mengen'.

[2]Een door twee punten bepaalde kromme in een schaar is een 'rechte'. Zie het artikel van Hamel (M.A. 57) *Über die Gemetrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind.* Zie ook III–27 en Russell *Fondements.*

[3]'Bewegingsaxioma' van Hilbert. Zie diens *Grundlagen der Geometrie* (Grundlagen M.A. 56, Anhang 4 van het Festschrift), axioma III.

[4]Voor de stelling van Desargues; zie o.m. Hilbert, Festschrift hoofdstuk V. Het genoemde artikel van F. Schur staat in M.A. 39 (in plaats van, zoals Brouwer stelde, in M.A. 36):Schur *Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie.*

[5]De 'getalleninvoering van Klein': het betreft hier Kleins *Vorlesungen über die nicht-Euklidische Geometrie,* 1893, pagina 337 e.v. Zie de voetnoot bij het eind van pagina 3 van dit vierde schrift.

[6]Bij een convexe kromme ligt een verbindingslijn tussen twee punten van de kromme geheel er boven.

[7]De eerste bewering volgt uit de definitite van een convexe kromme en uit de voorwaarde voor een tweedegraads kromme als begrenzing.
Alleen een tweedegraads kromme kan door een projectieve infinitesimale transformatie in zichzelf overgevoerd worden.
Het genoemde Klein-Lie artikel uit M.A. 4 is *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.*

[8]Het 'gereken' van Hilbert slaat waarschijnlijk op Hilberts 'Grundlagen M.A.', waar op geometrische wijze **N** en **Q** worden ingevoerd. **R** volgt dan daaruit volgens de methode Dedekind.
Voor Brouwer geeft dit geen grondslagen, die liggen alleen in het leven, d.w.z. in de constructies op basis van de oer-intuïtie.

[9]Russells *Fondements de la Géométrie* bespreekt in het eerste hoofdstuk drie perioden in de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde:
I. Gauss, Lobatchevski, Bolyai. Er wordt getracht, het parallellenaxioma te bewijzen door het tegendeel aan te nemen en aldus een contradictie te creëren.
II. Riemann. Deze gaat constructiever te werk. Hij werkt met 'manyfolds' en met kromming in n dimensies. Drie axioma's (§ 23). Helmholtz heeft vier

axioma's (§ 24), waaronder het monodromie axioma, die bewijzen dat de Euclidische en de niet-Euclidische de enige meetkundes zijn. Verder Beltrami.
III. Maat en aritmetische afstand horen niet in de geometrie thuis. Cayley's projectieve meetkunde: 'gewone' eigenschappen worden projectieve eigenschappen ten opzichte van een 'absolute kegelsnede'. Klein: is de absolute kegelsnede reëel, dan is er sprake van hyperbolische meetkunde, bij imaginaire van elliptische meetkunde.
Deze nieuwe systemen zijn slechts ontstaan door een nieuwe definitie van afstand. Het is een kwestie van definitie, van conventie, zonder een filosofie daarachter (vergelijk Poincaré: een axioma is een vermomde definitie). Dit gaf een discussie over het feit dat coördinaten geen ruimtelijke grootheden meer zijn, maar conventionele tekens. Er zijn geen 'natuurlijke' afstanden meer.
Cayley definieerde afstand met behulp van coördinaten, maar dat is fout, want coördinaten vooronderstellen het afstandsbegrip.
Klein (§ 36) maakte een constructie, die een beschrijvende definitie van harmonische relatie geeft: met behulp van twee vaste punten geeft een derde punt een vierde in harmonische ligging. Met behulp van drie basispunten $(0, 1, \infty)$ ontstaat Kleins 'getallengeverij'. Let wel: deze coördinaten vooronderstellen *niet* het afstandsbegrip.
Maar afstand is een quantitatieve relatie, vooronderstellende de identiteit van qualiteit. Maar de projectieve meetkunde behandelt slechts qualiteiten. Twee punten en twee stellen punten zijn qualitatief gelijk. Zo ook kunnen drie punten projectief getransformeerd worden in drie willekeurige andere punten, want drie stellen definiëren een projectiviteit. Pas vier punten geven een onderscheidbare projectieve eigenschap, dus die kunnen pas een afstand definiëren (zie Cayley) met twee vaste punten. Maar die twee punten zijn willekeurig, en de afstand is dus een functie van die twee willekeurige punten.
Kan de projectieve meetkunde dan niet adequaat een afstand definiëren?
Dan volgt (§ 37) het voorbeeld van de drie punten. $Rel(AB)$ wil zeggen dat er een of andere relatie is tussen de punten A en B. $Rel(A, B) = rel(A, C) \Rightarrow B = C$ wegens de 'identité qualitative' van alle punten. Maar $rel(A, B)$ moet onafhankelijk zijn van elk ander punt. Dus alvorens A en B als vaste basispunten identificeerbaar kunnen zijn, moet er al een relatie tussen twee punten verondersteld worden, en dat *moet* dan wel de afstand zijn.
Dus grootheden in zuivere projectieve meetkunde kunnen geen ruimtelijke grootheden zijn; het zijn slechts conventionele symbolen voor qualitatieve ruimtelijke relaties.
Dan volgt Brouwers commentaar in IV–3, de derde paragraaf op die pagina. Moet er tussen A en B een maatgetal bestaan ter onderscheiding van A en C? Neen, want het is een postulaat dat een lijn AB het ordetype $\mathbf{R}$ heeft.

[10]Zie M.A. 57, het artikel van G. Hamel *Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind.*

[11]Zie Russell, *Fondements ...* § 38. Dit behandelt hoe de niet-Euclidische meetkundes volgen uit projectieve afstands definitie; 'afstand' in de hyperbolis-

che ruimte wordt 'maatverschil' in de Euclidische (metrische) ruimte. Dus de afstandsformule (Cayley) in de hyperbolische ruimte wordt uitgedrukt in de Euclidische ruimte in een formule voor een zeker maatverschil.

[12]Slaat dit op de redenering van Russell? Bovenstaande voetnoot is Russells interpretatie van de hyperbolische (en elliptische en parabolische) afstandsformule.

[13]Dit lijkt te betekenen: de bewegingsgroep, die de meetkunde bepaalt, heeft als elementen transformaties. Elke transformatie bestaat uit infinitesimale transformaties als atomen. Maar die infinitesimale transformaties zijn toch juist bepalend voor de meetkunde?
Brouwer lijkt te willen zeggen dat de infinitesimale transformaties voor de Euclidische ruimte dus zelf niet Euclidisch hoeven te zijn. Zie ook de hierop volgende alinea in de tekst.

[14]Vanaf hier tot en met pagina 9 onderaan van dit vierde schrift behandelt potentiaaltheorie.

[15]Hoofdstelling der rekenkunde: het aantal elementen van een verzameling is onafhankelijk van de volgorde van tellen. De opmerking van Mannoury is waarschijnlijk mondeling geweest, want er was toen nog geen publicatie over van zijn hand.
Het bewijs is inderdaad intuïtief en niet strict volgens de mathematische logica; althans in de vorm, waarin het bewijs in de schriftjes gegeven wordt.

[16]Brouwers bewijs vooronderstelt uittelbaarheid zonder inductie en dat mag ook in een actueel opgebouwd systeem. Zie Mannoury's kritiek op pagina 54 van zijn in 1909 verschenen *Methodologisches und Philosophisches zur: Elementar–Mathematik.*

[17]Deze en de volgende pagina behandelen potentiaaltheorie.

[18]Bij een involutie is constructie van een overeenkomstig punt bij een gegeven punt mogelijk, als twee dubbelpunten A en B gegeven zijn .
Dit geeft de involutiestelling van Desargues: De drie paren overstaande zijden van een volledige vierhoek snijden een lijn, die niet door één van de hoekpunten gaat, in drie puntenparen van een en dezelfde involutie.
Algemeen geldt voor een involutie met twee dubbelpunten: $(A, B, P.P') = -1$. dus vormen een harmonisch viertal.

[19]'Als we niet aprioristisch aan de continuïteit willen appelleren, wat het zuiverst is'. Dat wil zeggen dat Brouwer voor het continuüm pleit als iets uniek, intuïtief gegeven en niet opbouwbaar. Dit is een later toegevoegde opmerking, gezien het handschrift.
De 'perfekte Menge' is de verzameling, die al zijn limietpunten bevat (Cantor, Gesammelte Abhandlungen, deel III–9 § 14). Het gesloten continuüm $[0, 1]$ als verzameling reële getallen voldoet hieraan.

In M.A. 46 en 49 behandelt Cantor de opbouw van de verzamelingenleer. In § 4 noemt hij dan de opbouw van $[0,1]$ als de verzameling van alle $\Sigma_{n=1}^{\infty} f(n)2^{-n}$ met $f(n) = 1$ of 0. Dit is dus een opbouw van het continuüm, die Brouwer zal verwerpen.

[20]De berekenbare reële irrationale getallen ($\sqrt{2}$, $\sin 3$ etc.) zijn volgens een bepaald algoritme op te bouwen. Maar als één van de $\Sigma_{n=1}^{\infty} f(n)2^{-n}$ zijn ze moeilijk of geheel niet uitdrukbaar.

[21]Tussen deze Cantorse getallen zouden nog andere aan te nemen zijn (zie de non standaard getallen van Robinson en anderen). Brouwer werkt dit niet uit, oppert slechts de mogelijkheid, met als argument 'waarom niet'.

[22]De projectieve meetkunde werkt met verhoudingen (dubbelverhoudingen), dus met rationale getallen. (Algebraische getallen zou nog te verdedigen zijn bij kegelsnedes.) Bij bewegingsmeetkunde (bewegingsgroepen) kan irrationaliteit slechts tot de tweede graad.

[23]'Meten' begint op het eendimensionale continuüm. Voor dit meten is continuïteit vereist. Vergelijk Poincaré met het fysisch continuüm, een andere opvatting dan die van Brouwer; Poincaré voert het mathematisch continuüm juist in om de paradoxen van het fysisch continuüm te omzeilen.
Maar het continuüm is er gewoon bij Brouwer, intuïtief en onafhankelijk van de handeling van het meten.

[24]Vanaf hier tot halverwege pagina 17 van het vierde schrift wordt Vahlens *Abstrakte Geometrie* gelezen.

[25]Fundamentaalrij: een aftelbare rij, gedefinieerd op het continuüm, in het bijzonder een aftelbare rij genestelde intervallen op het continuüm, die naar een punt convergeert. Bij Brouwer is een fundamentaalrij 'af' (of mag als af gedacht worden) als er een eenduidig algoritme voor is. (N.b. bij de vroege Brouwer hoeft een fundamentaaltij dus niet noodzakelijk convergent te zijn.)
Een rij is een Cauchy-rij als er geldt: $\forall\varepsilon\exists n|a_p - a_q| < \varepsilon\forall p, q > n$.
Verder is de inhoud van dit fragment enigszins raadselachtig.
Vahlens definitie van 'stetigkeit': definitie 19, pagina 5 (tweede druk, 1940) geeft de continuïteit van een 'dichte Menge' (vgl. de definitie van Dedekind). Verder de definitie 47, pagina 116 voor Stetigkeit in de geometrie.

[26]Zie definitie 30 op pagina 7 bij Vahlen. Hij definieert de planaire continuïeit ook met behulp van de lineaire.
Het intuïtieve continuüm moet men dan òf met behulp van functies meester worden, òf dient men te beschouwen als het fysisch continuüm van Poincaré.

[27]Vahlens Geordneten Gruppen, zie *Abstrakte Geometrie,* pagina 11. Groepen worden hier, zoals gebruikelijk, abstract gedefinieerd, maar het *bestaan* van geordende groepen blijkt pas uit **N.**

[28]Dit is een oppervlak, dat twee onderling loodrechte scharen van evenwijdige lijnen van Clifford heeft, alsmede een kromtemaat nul en de samenhang van een torus.
'Evenwijdige lijnen van Clifford' zijn paren van lijnen in de elliptische ruimte, die niet in één vlak liggen, maar waarvan toch de punten van de ene rechte alle dezelfde afstand hebben tot de andere rechte.

[29]Vahlen I behandelt eerst verzamelingen, vervolgens geordende verzamelingen, dan groepen, daarna geordende groepen en dan 'getalsystemen', dat zijn verzamelingen met als elementen getallen, en waarin twee manieren van compositite in bestaan, verbonden door een distributieve wet $a(b+c) = ab + ac$.
Is het getalsysteem een geordende groep, dan is het systeem ook geordend.
Klein geeft getallen via een projectieve constructie (zie o.a. Russell, *Fondements de la Géométrie,* en Klein, *Vorlesungen über die Nicht–Euclidische Geometrie):*
Gegeven drie punten op een rechte lijn als basis. Noem deze $0, 1, \infty$.
Construeer een punt a, zodat $(a, o, 1, \infty) = -1$; noem $a = 2$.
Construeer een punt b, zodat $(b, 1, 2, \infty) = -1$; noem $b = 3$.
Dan c, zodat $(c, 2, 3, \infty) = -1$; noem $c = 4$, etc.
De gevonden getallen moeten dan voldoen aan Vahlens voorwaarden.

[30]Vahlen I, 52: tussen $a, b, c, ...$ bestaat dezelfde ordeningsrelatie als tussen $a + h, b + h, c + h, ...$
Vahlen I, 126: tussen $a, b, c, ...$ bestaat dezelfde of tegengestelde ordeningsrelatie als tussen $hak, hbk, hck, ...$ $(h, k \neq 0$, verder willekeurig).
Uit 52, 126 en **Z** en de ordeningswetten is **Q** te bepalen. Geordende paren (m, n) definiëren een rationaal getal. De ordeningswetten bepalen een orde in deze paren, dus dat geeft de geordende verzameling van geordende paren **Q.**

[31]Vahlen onderzoekt de onafhankelijkheid van de axioma's van de rekenkunde in *Zahlensysteme;* zie pagina 14 e.v. (tweede druk, 1940). Volgens Brouwer is dit onzin, want rekenen is een aprioristisch operatiesysteem.
Meetkunde daarentegen is een empirisch systeem, daar kunnen de axioma's geanalyseerd worden.

[32]Brouwers continuüm is er, en bestaat niet uit punten. Er zijn wel punten op te construeren, altijd meer; het resultaaat blijft aftelbaar en is nooit af.

[33]Hypercomplexe getallen worden gevormd door verschillende generalisaties van complexe getallen, zoals quaternionen. **C** is een lichaamsuitbreiding van **R.** De vraag is, of er nog meer lichaamsuitbreidingen **K** van **R** zijn, die als eindig-dimensionale vectorruimte over **R** zijn op te vatten. Ziet men af van commutativiteit van vermenigvuldiging, en eist men slechts $a\alpha = \alpha a$ $(a \in \mathbf{R}, \alpha \in \mathbf{K})$, dan is er (Frobenius) nog precies één scheef lichaam: het scheve lichaam van de quaternionen.
Quaternionen als 'gegeneraliseerd complex getal': $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$, met x_1, x_2, x_3 reëel en i, j, k hypercomplexe getallen met $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

[34]Dit klopt, als de zinsnede 'die ik kan aftellen' zeggen wil 'is in eindig veel stappen geheel telbaar'.

[35]M.A. 59 geeft Zermelo's bewijs van de welordeningsstelling. Voor een 'Belegung' γ (zie Cantor, M.A. 46, waar hij dit begrip invoert bij de definitie van exponentiatie van transfinite getallen) is het keuzeaxioma nodig, maar er is geen algoritme, dat aangeeft hoe die m_1 te kiezen, dus dit is voor Brouwer een niet-geldige operatie.

[36]Zie Mannoury, *Methodologisch und Philosophisch zur: Elementar-mathematik* de hoofdstukken I en II.

[37]Dedekind praat over systemen van elementen (§ 1), over afbeeldingen van S op $\varphi(S)$ (§ 2), in § 3 over een–eenduidige systemen, dat wil zeggen $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$ en in § 4 over afbeeldingen van systemen S in zichzelf en over een keten φ, als namelijk $\varphi(K) \subseteq K$. De naam 'keten' vanwege het feit dat $\varphi(K)$ dan ook een keten is.
Er worden nu stellingen over ketens afgeleid, die in § 6 tot de definitie van getallen leiden (na in § 5 het bestaan van ∞ bewezen te hebben), zonder echter de mogelijkheid van zo'n functie φ bewezen te hebben, *en dat is Brouwers bezwaar*: er moet bewezen worden dat zo'n functie φ bestaat, en dat doet Dedekind niet.

[38]§ 4: Is A een deelverzameling van S, dan is A_0 de doorsnede van alle ketens, die A bevatten, dus A_0 is de kleinste keten, die A bevat.
Dedekind definieert het niet in deze bewoordingen, maar daar komt Satz 44 wel op neer (dat wil zeggen, de terminologie 'doorsnede').
Dat bedoelt Brouwer ook met $A_0 = M(A, A', A', ...) = M(A, \varphi(A), \varphi(\varphi(A)), ...)$.

[39]Dit is een vraag van Brouwer. Een klassificatie van 'afbeelding van een systeem in zichzelf' in eindig veel stappen, of althans in een eindig uitdrukbaar, inductievrij algoritme.

[40]In een doorgehaald fragment over priemgetallen: wetten zoeken is de overgang van verassingen naar zekerheid, van blijdschap naar vastigheid. Duidelijk is wat Brouwer prefereert.

[41]Niet duidelijk is, op welke weerlegging van Poincaré dit slaat. Het zou, in verband met wat verderop gesteld wordt op pagina IV–21, op de ruimteopvatting uit *La Science et l'Hypothèse* kunnen zijn.

[42]Eindige hoeveelheden worden intuïtief als vaststaand gesteld, en kunnen dus vergeleken worden.
De begrippen G.G.H. en O.G.H. komen voor in Mannoury's inleiding op het achtste Natuur- en Geneeskundig congres (1901) te Rotterdam *De zogenaamde grondeigenschap der rekenkunde*
Definitie (in Mannoury's woorden): Een 'O.G.H.' is een 'open-gekoppelde hoeveelheid', dat is een hoeveelheid met de volgende eigenschappen:

1. elke eenheid (A) heeft één en niet meer dan één *'onmiddellijke volgende'* eenheid (A'); deze is van de eerstgenoemde verschillend;
2. Elke eenheid (A), uitgezonderd ééne (de eenheid E) heeft één en niet meer dan één eenheid, waarop zij *onmiddellijk volgt* (deze *'onmiddellijk-voorafgaande'* eenheid ($'A$) is blijkens 1 weder van de eerstgenoemde verschillend);
3. de hoeveelheid kan niet zonder verbreking van minstens één koppeling in twee delen worden gescheiden.
Een G.G.H. is een 'gesloten-gekoppelde hoeveelheid, dat is een hoeveelheid die aan dezelfde voorwaarden als een O.G.H. voldoe, met deze uitzondering dat onder hare eenheden ééne (de eenheid L) voorkome, die geen *onmiddellijke volgende* bezit.

[43]Wederom: het bestaansbewijs van getallen is het bestaan van bovengenoemde vastgestelde hoeveelheden.
Brouwer prefereert dit boven Hilberts abstractere definities. Zie Festschrift, Anhang VI.

[44]'Brachistochroon' is de weg, die een deeltje neemt om in de kortste tijd onder invloed van de zwaartekracht alleen van een punt A naar een punt B te komen.

[45]Berekeningen baseren we altijd op fysische continuïteit, dus op continue, zelfs op differentieerbare functies. Zie ook Poincaré.

[46]Het stelsel van Ruimte en Tijd, dat ondergrond is voor fysische wetten (bewegingsmechanica), gehoorzaamt zelf aan simpele wetten.
Brouwer oppert nog de mogelijkheid, stelt zich althans de vraag, of fysische wetten niet eenvoudiger zouden worden bij discontinue ruimte en tijd. Dat lijkt niet, want met niet differentieerbare en niet continue functies is het toch moeilijker rekenen.

[47]Brouwers kritiek of althans scepsis met betrekking tot de natuurkundige praktijk. 'Fysische maat als verstarring'. Alsof de natuur meetbaar zou zijn, alsof alles in een getal uitdrukbaar zou zijn.

[48]Zie Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen,* § 9, punt 131.

[49]Mannoury *en* Brouwer: Bij een getal vier denkt men aan een lineaire groeporde (vergelijk de groeiende lijn) en *niet* aan een cardinaliteit. Zie Mannoury, hoofdstuk II (pagina 58).

[50]Brouwer hanteert bij tijd en wijle de term 'tuimeling, zoals hier: 'het was een toevallige tuimeling ...'; zie ook bv. III–12: het tuimelsysteem, of (zie verder): 'de tuimeling van het tellen' of 'een tuimelwaarheid'. Dit moet slaan op een toevallig, ongewild, onbedoeld, maar wellicht verrassend gebeuren.

[51]De hoofdstelling van de rekenkunde en de 'tuimelwaarheden'. Als voorbeeld van die hoofdstelling het cardinaalgetal 'wat tegen volgordeverandering

kan'. Uiteraard, is dat juist per definitie een van de karakteristieken van een cardinaalgetal. Dit geeft weer de hoofdstelling van de rekenkunde. Widersinnigkeit blijkt in de tuimeling.

[52]Vanaf hier wordt dit schrift voornamelijk gevuld met potentiaaltheorie.

[53]Zie *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15.1, het artikel van Schoenflies *Über die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter (nicht-archimedischer) Maßbestimmung,* punt 7.

[54]Het mathematisch continuüm moet hier opgevat worden in de zin van het meetbaar continuüm, zoals geconstrueerd in het eerste hoofdstuk van Brouwers dissertatie.

[55]Inhoudelijk, maar niet letterlijk staat het allemaal op pagina 110–120, met name op pagina 119 van Vahlens *Abstrakte Geometrie.*

[56]Het bedoelde artikel in Jahresbericht *Die Möglichkeit einer projektiven Geometrie bei transfiniter nicht-archimedischer Maßbestimmung.*
Veronese construeerde ook transfinite getallen. Het voorbeeld, wat Brouwer noemt, staat op pagina 28 van genoemd artikel in de Jahresberichte 15.1.
N.b. Cantor heeft in M.A. 46 ook kritiek op Veronese (zie pagina 500).

[57]De rest van dit schrift behandelt potentiaaltheorie, behoudens enkele algemenere opmerkingen daartussendoor.

Chapter 5

Schrift V

(De pagina begint met een onleesbare doorhaling)[1] **V-1**

[Als uitbreiding der Maxwellsche formules voor een willekeurig vectorveld op een gegeven oogenblik moet zijn op te schrijven een formule voor een willekeurig quaternionveld bij wisselenden tijd, (zoodat zoowel in de onafh. als in de afh. verand. een scalar bij komt).

(een ⟨van physica onafh.⟩ mathem. formule, die zich physisch gaat dekken met de wetten der inductiestroomen.)]

. . . .

[De gradient van alle binnenbol functies is vrij van rotatie en divergentie.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Denk een vector buis ⟨zonder *div.*⟩ van oneindige lengte in een begrensde (b.v. de elliptische) ruimte, dan moet hij toch òf een limietpunt hebben (b.v. als hij daar omheen gaat krullen) en dan is daar en agenspunt, òf hij heeft eindelijk ⟨op zeker punt⟩ een oneindige vector-integraal langs zich; sluit nu de keten door een eindig stuk, en kan daarlangs geen oneindige vector optreden*), dan blijft dus een zeker [?][⟨1⟩] bedrag voor vectorintegraal langs de gesloten kromme, dus kan niet overal de $curl = 0$ zijn.⟧

*) *(in de kantlijn, ook doorgrhaald en moeilijk leesbaar:)* ⟨Immers de vector kan alleen ∞ zijn op (..) vlakken en zou kiezen (..) te verbinden eindpunten daarbuiten.

In elk geval hoeven we geen oneindige (..) grens langs eindige stukken toe te laten, dat doen we tenminste niet.⟩

. . . .

⟨1⟩ *origineel vraagteken*

[Een 'willekeurige' vectordistributie blijft toch altijd een, die ik door ⟨een⟩ eindig ⟨aantal⟩ woorden kan bepalen (in welke woorden de mathem. inductie kan worden opgenomen).]

. . . .

[1. splitsing in *rot.* en *div.* voor ell. ruimte ⟨als inl. Schering, en dan zeggen, hoe het vraagstuk moet worden gesteld.⟩

2. afleiding der elem. distr. voor ell. ruimte.

(kantlijn:) ⟨waarop Maxwell en Föppl niet wijzen.⟩

3. uitbreiding van 1 voor Eucl. ruimte ⟨waarbij men over het oneindige zich duidelijk rekenschap heeft te geven wat het agens daarin betreft.⟩

4. formuleering der quaternionformule voor Eucl. ruimte ⟨die nòch bij Maxw., nòch bij Föppl wordt gevonden.][2]⟩

. . . .

V-2 *(doorgehaald:)* ⟦De phil. uitspraken der diss. toelichten niet met redeneeringen, maar met citaten.⟧

. . . .

Mannoury met zijn G. G. H. geeft geen Existenzbeweis; dat kan trouwens alleen gebeuren door levend opbouwen, maar dan komt meteen de hoofdeigenschap der rekenkunde vanzelf.[3]

. . . .

Eigenlijk is het onzin, om dingen waar we allemaal van overtuigd zijn, nog te willen bewijzen. Maar redeneer b.v. zoo:

In de doos zitten de zes stippen, en aan elk zit vast een der cijfers

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$$

Nu ga ik ze er weer uithalen; en kies eerst de stip, die op *3* zit; dan verruil ik die met de stip op 1, en haal er uit cijfer 1 met stip c. Over blijven nu de cijfers $2 \cdots 6$, elk met een stip. Zoo ga ik door, ten slotte blijft alleen het cijfer 6 met een stip. Neem ik die stip weg, dan is er geen stip meer over, en de hoofdeig. der rekenk. is bewezen.[4]

. . . .

De mathem. logica kan misschien wel hier of daar fouten opsporen en aantoonen. *) Maar de groote intuitieve logische samenvattingen ⟨die alleen zeer lastig logisch geheel te ontleden zouden zijn,⟩ waarmee de wetenschap werkt, daar staat ze buiten; de hoofdzaak in het wisk. denken zou ze dus wegwerpen.⟨2⟩[5]

⟨2⟩ ⟦van⟧ de hoofdzaak in het wisk. denken zou ze dus wegwerpen.

*) *(kantlijn:)* ⟨ofschoon ze zelf even goed een logisch ‘bouwen’ is, waarin je fouten kunt maken.⟩

. . . .

Toepassing van theorieën of toestellen is bijna altijd kwade partieeringen.[⟨3⟩] **V-3**

. . . .

Mijn eigen spontaan waargenomen leven heeft geen vaste wetten, maar is een wonderlijk spel van het toeval.

Alleen als een der elementen van die toevalswereld drijft de zwarte wolk van het wiskunde bedrijvende tuig, die op de wereld zóó ageert, dat zij slechts in wetten (d.i. iets uit de onderwereld) kan reageeren.

. . . .

(Poincaré, Science et Hypothèse ⟨p. 188⟩)[6] ‘Dans les sciences naturelles, on ne retrouve plus ces conditions: homogénéité, indépendance relative des parties éloignées, simplicité du fait élémentaire, et c’est pour cela que les naturalistes sont obligés de recourir à d’autres modes de généralisations.[7]

. . . .

Is de geometrie de leer der bewegingen, dan hoort zij tot de physica.

. . . .

(Poincaré) ‘Le but de l’hypothèse, c’est de prévoir les phénomènes’. Juist, de mensch wil kunnen voorspellen, dat is van uit zijn afgegrensd hokje tòch zuiver reageeren, reageeren n.l. met betrekking tot zijn afgegrensd hokje. Aspiraties daarbuiten heeft hij niet meer.[8]

. . . .

Poincaré’s ‘Valeur de la Science’ is zuivere dialectiek.[9] **V-4**

. . . .

(Poicaré) Science et Hypothèse pag. 196 1^{ste} alinea.[10]

. . . .

De continue splitsbaarheid der verschijnselen naar den tijd (voor physica en geometrie) is het grondaxioma. M.a.w. men kan differentiaalbetrekkingen opschrijven als grondidee; (‘causaliteit’,*) als drager daarvan voert men in de

---

[⟨3⟩] ⟦...*(?)* ⟧ theorieën of toestellen ⟦zijn⟧ bijna altijd kwade partieeringen.

materie **) *(volgt een onleesbaar doorgehaalde zin)*

*) *(kantlijn:)* ⟨de verandering te zien als een constante, dus te grijpen;
**) *(kantlijn:)* ⟨de *drager* der verandering, die door haar constantheid maakt, dat de verandering wordt opgemerkt.[11]⟩

. . . .

(Naar aanl. van 'Science et Hypothèse' p. 212) Ja, de eenheid in het systeem ⟨en de volkomenheid⟩ neemt wel toe, maar de *waarde* ⟨voor het leven⟩ der toepasbaarheid wordt eer minder dan meer.[12]

. . . .

Dat er natuurwetten zijn, m.a.w. dat het willen beheerschen van de wereld uit het afgesloten standpunt, succes heeft; natuurlijk, anders had die afdwaling zich niet kunnen handhaven.
Trouwens, elke afdwaling heeft succes.[13]

. . . .

Het aannemen van stationaire toestanden ⟨bij moleculen⟩, *) [volgens de wetten der groote getallen] is eigenlijk hetzelfde, als het aannemen van de continuiteit, **) die de physica in differentialen ontbindt. (De stationaire toestand is dan zoo'n enkele differentiaal).[14]

*) *(kantl.:)* ⟨zoolang we buiten onze meetgrens en binnen een iets grootere grens blijven,⟩
**) *(kantl.:)* ⟨buiten onze meetgrens,⟩

. . . .

V-5 Het ordetype η bevat in zich veel minder eigenschappen, dan wij gebruiken bij de gewone wijze van generatie er van ⟨die wijze van generatie kan dus nog weer nader worden bepaald en bestudeerd.⟩ Dit geldt dus ook voor ϑ, die uit η wordt afgeleid.

(kantlijn:) ⟨Ofschoon, dat tusschen 2 punten ⟨A en B⟩ nog andere liggen; van die andere pik ik toch een er het eerst uit, b.v. C, en dan liggen weer andere punten tusschen A en C en tusschen C en B. Zoo genereer ik toch het tweetallig stelsel volgens de eigenschappen van η zonder meer.[15]⟩

. . . .

Uit de onafhankelijkheid der arithmetische axioma's had Vahlen nu een opbouwsysteem moeten laten volgen.[16]

. . . .

De Grundlagen M.A. Hilbert gelden voor elk oppervlak, dat anal. sitaal met een Zahlenebene overeenstemt, welke deformaties daarop ook aan de beweging mogen verbonden zijn.[17]

. . . .

[Zij gegeven een lijnvectordistr. L zonder *div.* in R_n,[18] dan is als eenheid te nemen een gesloten buis. De *rot.* daarvan is een eendimensionale reeks van H_{n-2}'s (hypersferen van $n-2$ afmetingen), (waarop de rotatievector dan telkens $\perp$ staat) om die buis heen. ⟨Een⟩ vectorpot. van L is nu $\int \frac{rot.L}{r^{n-2}}$;⟨4⟩ dat is de algebraische som van de vectorpotentiaal, die uit zoo'n willekeurige H_{n-2} voortvloeit. We kunnen dus als elementairveld nemen, de afgeleide lijnvector van de vectorpotentiaal uit zoo'n enkele H_{n-2}.]

. . . .

[Een V_p geeft in 't algemeen een V_{p-1} en een V_{p+1}. Geeft hij alleen V_{p+1}, dan geeft die V_{p+1} alleen een V_p, díe V_p weer alleen een V_{p+1}, die weer alleen een V_p enz. **V-6**

Dus een vector, die alleen $V_{p\pm1}$ geeft, is ook alleen voortgekomen uit een $V_{p\pm1}$.

We hebben zoo een oneindige reeks, waarvan de termen beurtelings V_p en $V_{p\pm1}$ zijn.

Is nu ⟨in⟩ de algemeene lineaire V_p-distributie niet te toonen, hoe ze is te splitsen in twee deelen, die resp. alleen geven $V_{p\pm1}$, dus ook zijn voortgekomen uit alleen $V_{p\pm1}$?

. . . .

Een V_2, die alleen V_1 geeft, komt voort uit een V_1. Immers, daar hij geen V_3 geeft, is zijn tweede afgeleide zijn $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \cdots$, dus hijzelf de $\int \frac{}{r^{n-2}}$ van die tweede afgeleide. Maar die tweede afgeleide is een V_2 uit een V_1, dus ook zijn $\int \frac{}{r^{n-2}}$ of de oorspr. V_2 is uit een V_1.]

. . . .

Om dezelfde reden als mathem. logica nooit buiten en achter de rekenkunde kan treden, omdat ze met rekenkundige hersens wordt bedreven, die alleen door het geweten zijn te contrôleeren, om dezelfde reden ‖ kan psychologie nooit **V-7** treden achter philosophie, omdat ze in de cathegorieën ⟨der philosophie⟩ wordt bedreven.[19]

. . . .

Sc. et Hyp. p. 239 'Si la croyance à la continuité disparaissait, la science expérimentale deviendrait impossible'.[20]

⟨4⟩ ⟦De⟧ vectorpot. van L is nu $\int \frac{rot.L}{r^{n-2}}$;

. . . .

Faraday begreep evenveel van het electrisch veld, als Maxwell; aan Maxwell's *formules* 'heeft men alleen meer', voor de techniek.

. . . .

De vectordistr. $\langle X = ax\rangle$ krijgt divergentie,⟨5⟩[21] als we aan de lijn 1 of 2 punten in 't oneind. toekennen. Dat toekennnen schijnt hier dus een actie, gegrond op de overtuiging, dat alles een oorzaak moet hebben. (in casu de vectordistr. een *div*.)

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Gaan we het proj. vlak Euclidisch meten, dus met een bijz. lijn, dan blijft de stelling, dat er geen distr. zonder *rot*. en *div*. is, dus dat de distr. geheel door de *rot*. en *div*. bepaald is. Verder dat het *div*. element is de elem. magneet.

Voor een buiten de bijz. lijn ⟨in een algemeen punt eindig veld⟩ kunnen we dan onderscheiden:

1. Magneet met beide polen buiten de lijn. Dan moeten beide polen eindig zijn, en het veld is bekend.

2. Magneet met een der polen op de lijn. De polen moeten weer eindig zijn, en het veld bekend.

3. Beide polen op de bijz. lijn. Die moeten dan oneindig sterk zijn en dit veld is nog na te gaan.

V-8 *(nog steeds doorgehaald:)* Denk dus een Eucl. vlak met bijz. lijn, en een vectordistr., die op de lijn vlak bij elkaar twee polen heeft. Ontbind de magneet in een langs de bijz. lijn, en ⟨een⟩ er loodrecht op. Voor ⟨de laatste⟩ vinden we in 't eindige⟨6⟩ *) de binnenbolfunctie (zonaal), die slechts volgens 2 tijdpunten waarden (tegengestelde) heeft, en verder niet; voor de eerste *(de rest van de zin onleesbaar doorgehaald)*

In de 3 dim. ruimte *(eerdere doorhaling:)* ⟦geeft de tweede weer tot de eerste, nu⟧ evenzoo. Nu is het ook waar, dat men een willekeurige binnen-bolfunctie kan integreeren uit het veld ax.

*) *(boven aan de pag.:)* ⟨niet eenvoudig het eenparige veld A; dat heeft in 't oneindige niet in één punt *div*., maar in alle, n.l. gedistr. volgens zonale bolfunctie.⟩

Verschil tusschen de correctie voor *rot*. en *div*. komt ook hier niet; immers een buis, die naar 't oneind. loopt, kan ik daar naar verkiezing laten doorloopen (als gesloten buis dus), of van twee kanten laten vastloopen in een dubbelpunt.⟧

⟨5⟩ De vectordistr. ⟦aX⟧ krijgt divergentie,

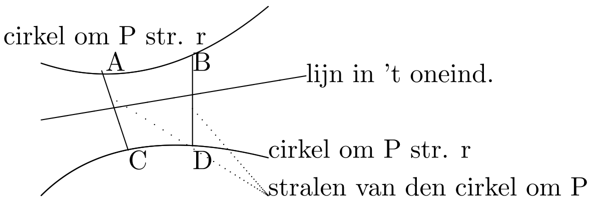
⟨6⟩ *doorhaling binnen de doorhaling:)* Voor ⟦beide⟧ vinden we overal in 't eindige

. . . .

Wijzelf kunnen niet nagaan, of, wat wij aan verstandelijke vastheid bezitten, is aangeboren of het gevolg van bakerlessen. Maar wat ik in het wetenschappelijk leven der menschheid als geheel zie, is een steeds verzwaren en versterken van een dijk (tegen de wilde dieren en natuurkrachten, en andere volken), vooral aan de ondergronden moet gelijkmatig worden bijgestampt (abstracte wiskunde, die alles centralizeert), naarmate men van boven meer opgooit.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦ **V-9**



Onder *div.* om een punt ⟨in 't oneind.⟩ verstaan we de limiet, waartoe de uitgaande vectorstroom om dat punt nadert ⟨voor een volumetje $ABCD$.⟩

Dit dus ook voor een punt in 't oneindige.

. . . .

De stroomlijnen blijf ik mij voor de zuivere voorstelling toch altijd op het eindige projectieve vlak denken. Ik merk dan dat ik zeer goed een distr. kan teekenen, die gegeven *div.* resp. *rot.* heeft over de punten der bijzondere lijn. (De lijn in 't oneindige.) ⟧

. . . .

[Over de *div.* in de lijn in 't oneind. moeten we opmerken, dat ze kan zijn ⟨oneindig groot⟩ van de n^{de} orde ⟨ten opz. van den straal van uit een gegeven punt P.⟩

Maar – want we onderstellen in het eindige een eindige vector – *(onleesb. doorh.)* dan moet de distr. van dat agens zijn volgens een n^{de} bolfunctie. Maar door alleen de divergentie op te geven, is nu het veld niet bepaald, want we weten niet, waar we het middelpunt van den bol, vanwaaruit we de ⟨bijbehorende⟩ binnenbolfunctie moeten tellen, nemen moeten.

Ja, toch weten we dat,⟨7⟩ n.l. uit de *div.* der $(n-1)^{de}$ orde in 't oneind. (want daarin verschillen de beide gelijksoortige velden met versch. middelpunt.]

Het blijft op die manier waar, dat $V = \int \frac{\text{div.}}{r}$.

⟨7⟩ ⟦Wel echter zien we⟧

Voor oneven bolfuncties zal men in 't oneind. geen *div.* vinden, maar *rot.*; de krachtlijn zal door 't oneind. heengaan en in zichzelf terugkeeren. Zoo bij de eerste bolf. is er *rot.* in 't oneind. ⟨voor elk volumetje $ABCD$⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦hoe groot die wordt, moet nog verder worden nagegaan aldus: $(r_\infty - r_A)(\cos\varphi_B - \cos\varphi_A)$ (φ de hoek tusschen de lijnen PB resp. PA en de richting der bolfunctie *(?)*⟧

. . . .

V-10 *(doorgehaald:)* ⟦Die limietovergang ⟨moeizaam naar punten⟩ heeft natuurlijk geen nut; in elk geval is de formule van Föppl

$$V = \nabla \int \frac{\nabla}{r} + \mathrm{rot} \int \frac{\mathrm{rot}}{r}$$

kortweg zonder meer onjuist.⟧

. . . .

[(Klein) 'Die einzige ein-eindeutige algebraische Funktion ist die linear gebrochene'.][22]

. . . .

[De willekeurige tweedegraads functie is te splitsen in een som van tweedemachten als elementairfuncties; zoo ook de n^{de} gr's functie in n^{de} machten? Waarschijnlijk niet.]

. . . .

[Een willek. vectordistr. V bestaat uit 1^e het pot. veld, dat uit de *div.* is afgeleid.[23] 2^e Het stroomveld, waarbij als stroomcirkel in elk volumeëlement wordt genomen V; m.a.w. de magnetische inductie voor V als magnetisatie.

⟨Het element hiervan is dus de magn. inductie van een elementairmagneet, de V in een zeker punt; waaruit het geheele veld door integreren wordt gevonden.⟩]

. . . .

[De operator ∇ is onafh. van de keus van cordinaatrichtingen. Hij zal dus wel voor de elliptische ruimte zijn uit te breiden.]

. . . .

V-11 [Het veld, bestaande uit een enkel vectortje in R_n $\|$ heeft een rotatievector volgens een oneindig klein (n-2) bolletje ⟨n.l. loodrecht daarop gericht⟩ (in de R_{n-1} $\perp$ de vectorrichting), en als *div.* een elementairmagneet volgens zijn richting. Hiermee is dus tevens het element van *rot.* en *div.* distr. gegeven.]

. . . .

(doorgehaald:) Na te gaan wat van den rotatievector in de elliptische (of willekeurig gekozen*(?)*) ruimte wordt als hij tweemaal achter elkander wordt toegepast

(een gedeelte van de doorhaling is onleesbaar)

. . . .

Dit blijkt zeer eenvoudig de *div*. Immers de oorspr. lijnvector I heeft zijn integraal langs gesloten kromme als planivector II. Teeken nu elementair-orthogonaal volumetje (waarvan natuurlijk niet de parallelle ribben gelijk zijn). Denk de vectorcomponenten vermenigvuldigd met de ribbe van elementairvolumetje in bijbehorende richting, of het omgekeerde van het product der beide andere richtingen. Dan

$$II = \frac{\partial \frac{Y}{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{Z}{xy}}{\partial y}_{\;x} + \frac{\partial \frac{Z}{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{X}{yz}}{\partial z}_{\;y} + \frac{\partial \frac{X}{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{Y}{zx}}{\partial x}_{\;z}$$

Dus de x -component van III:

$$\frac{\partial \left\{ y \frac{\partial \frac{Z}{xy}}{\partial x} - y \frac{\partial \frac{X}{yz}}{\partial z} \right\}}{\partial z} - \frac{\partial \left\{ z \frac{\partial \frac{X}{yz}}{\partial y} - z \frac{\partial \frac{Y}{zx}}{\partial x} \right\}}{\partial y} = \partial \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \right.$$

(einde doorhaliing)

. . . .

(toevoeging bovenaan blz.:) ⟨[Alles wat ik nu ga zeggen, is *niet* exact; spreken, **V-12**
dat zin heeft, *is niet exact*, is geen wiskunde]⟩[24]

Een *oordeel* is een gebrekkige nastameling van een gedachte.[25]

Het is ten opzichte van den hoorder dus altijd een scheeve kracht, die den ander wil brengen, niet naar een punt maar binnen een zeker gebied (regio) of *buiten* een zeker gebied (regio).[⟨8⟩]

⟨Zoodat een oordeel alternatief is tusschen twee gebieden, maar geen volstrekte scheiding⟩ .

onversch.

niet wel

vage grens

onversch.

⟨8⟩ ⟦niet binnen⟧ een zeker gebied (regio).

Nu blijkt het, dat men, ten einde een zekere determineering bij een ander te verwekken, dikwijls vrij goed [ten opzichte van het beperkte beoogde doel n.l.] twee der woorden kan verwisselen b.v.

de Romeinen zijn bondgenoten van de Perzen
...Perzen .... Romeinen

[Kan worden verwisseld intuitieve voorstelling, beduidend zoo ongeveer, dat de vervanging geen onaangenaam gevoel geeft, het is intuitief, *dat* die vervanging soms gaat: oordeelen zijn alleen als woorden saamgesteld, de gedachte er om is altijd één, zou door één klank zijn uit te drukking*[?]*; het oordeel is de decimaalbreuk, die de gedachte benadert.]

Ook is het nu eenmaal zoo, dat dikwijls in de dwaze taal en dwaze voorstellingswereld de eene halfverbeterde eenzijdigheid d.i. oordeel vanzelf de andere mee- sleept, *als* dit, *dan* dat; wat toch altijd òf maar voor enkele bijz. gevallen doorgaat, òf de beide deelen v.d. stelling zijn beide onderdeelen van eenzelfde voorstelling ⟨wat betreft practische waarde en beteekenis⟩ – die elk voor zich zeer gebrekkig weergeeft–, zoodat: geeft het eene oordeel zuiver weer een wilsalternatief, of een projectie ervan, [⟨9⟩] dan ook het andere. [een 'dier' heeft als woord in de *taal* alleen zin t.o.v. daden, b.v. een dier mag je trappen; je kan er niet tegen praten.] – En het is nu ook maar eenmaal zoo, dat ik een voorstelling van verschillende dingen kan combineeren, zonder dat ze onderscheiden zijn (dat partieele gezichtspunt is mogelijk; *(onleesb. doorh.:)* intuitief, maar is de bestaanbaarheid van relatie niet intuitief; en mag ik met een G.G.H. werken zonder te weten of zij niet contradictoor is, d.w.z. zonder die te hebben voorgesteld?[26]

....

V-13 Bij wiskundig denken is het, alsof men afdaalt in een mijn; wat men merkt, als men weer aan 't daglicht terugkomt; bij philosophisch denken blijft men in de vrije natuur

....

[Men is de eerste op zijn gebied, als men zichzelf is.]

....

Wetenschap kan nooit iets leeren omtrent onszelf: alleen als actie tegen onze vijanden is het hulp.

....

Het werken van de menschelijke geest is zelfdressuur: hij tracht eenige bepaalde dingen telkens weer te doen, en voorzoover aan hem ligt, zou telkens hetz. voor den dag komen; door de omstandigheden komt echter telkens iets

---

[⟨9⟩] zoodat: geeft het eene oordeel ⟦wat, dan ook het andere⟧ zuiver weer een wilsalternatief, ⟦dan⟧ of een projectie ervan, verschillends. De volleerdheid is het voor alle omstandigheden alternatief gedetermineerd zijn. En het is de wilszucht, om van nu ⟨of van morgen⟩ af bij het oude te kunnen volharden, die de menschen noopt om voor elk nieuw onverklaard (d.w.z. voor de dressuur niet voldoende geplaatst) feit een nieuwe theorie op te bouwen.

....

(na een onleesbare doorhaling:) Wil geen vastheid door de wiskunde; *doe* wiskunde, omdat het blijkt te gaan, maar voel de zondigheid er van.

....

In de ruimte zijn nog niet de vlakken gegeven; die worden er in *gebouwd*, zooals op de aarde uit de elementen er van de huizen worden gebouwd. En zoo geldt de zondige meetkunde ook in de praktijk slechts voor de zondige bouw–werken der menschen.

(In een lange toevoeging, bovenaan de blz. en in de kantlijn:)
⟨En het woordje '*elk* element' van een ⟨oneindige⟩ hoeveelheid heeft geen zin, als ik die hoeveelheid niet zelf heb opgebouwd (in de natuur zijn ze er niet), en hoe kan ik dat doen anders dan door inductie? En dat kan ik niet doen zonder ononderscheidenheid in de veelheid, en *die* sluit in de hoofdstelling der rekenkunde.*)

Ook kan ik juist uit hoofde van die on-onderscheidenheid voorstellen de machine, die '*altijd maar door*' (intuitieve voorst.) punten een voor een bijlegt (bij onderscheidenheid gaat dat niet).[27]

*) *(eveneens in de kantlijn:)* Maar dan nog in beide gevallen steun je er op, (voor het idee van *elk* en voor die hoofdstelling), dat je een hoeveelheid kan vasthouden, zonder dat er van wegraakt. (dat ik straks dan weer over *diezelfde* dingen kan spreken; waarin overigens reeds de ononderscheidenheid in veelheid zit, ook bij Mannoury).

[Dit is een zondige onderstelling, en steeds moet je verder nog het idee hebben: *als* er zuiver valt te redeneeren – door het ongerijmde – dan moet het zóó zijn, maar is dat zoo, en voert het niet tot helsch schijnsucces?⟩ *(einde van deze lange kantlijntoevoeging)*

Nu is de praktijk van het tellen de opbouw van het fantaziesysteem *een twee drie* enz., op welke beelden⟨10⟩ de dingen der werkelijkheid als methode worden betrokken.[28] **V-14**

Zoo komen intuitief en exact (⟨d.w.z. van onszelf⟩ de werkelijkheid, daar wordt met die cathegorieën op gewerkt, en die treedt als resultaat met haar eigen verzet zóó tot inexacte meetkunde tevoorschijn) de getallen, en ⟨ook⟩ het continuum. *(volgt een onleesbaar doorgehaalde zin.)*

⟨10⟩ ⟦waarop⟧

⟨Bij het cardinaalgetal⟩ stelt men zich ook voor een *begin*, een grens,*) wat niets is dan een zondige in 't intellect verstarde passie; dat *stellen* van aangroeien uit een begin is even gek als het laten aangroeien van een getelde hoeveelheid; in beide zit dezelfde waan (van behoud) van hebberige menschen.

*) *(kantlijn:)* ⟨steunidee voor het intellect, en de afspiegeling daarin van de *begeerte* naar bezit; in de *vrees* voor een continu ding zit b.v. die vastheid als begeleiding in 't intellect niet.⟩

....

De getallen nu zijn *niet* het resultaat van hun relaties, *) maar de relaties worden er later door ons in opgebouwd; het systeem moet appliceerbaar zijn aan de begeerte (⟨zelf⟩ niet uitdrukbaar ⟨in woorden⟩ , waarvan ze de projectie in zeker deel der hersenen is), en we voelen direct, **) dat ze *moet* hebben die eigenschap van ononderscheidenheid en inductie; dat ze anders voor de begeerte niet van dienst zou zijn, voor den waan, dat iets blijft bestaan ⟨en gelijk kan
V-15 zijn⟩ onafhankelijk van den ‖ tijd van je leven, waarop je het aanpakt, dus onafhankelijk van je zonden (dus ook onafh. van de volgorde van telling, d.i. van den tijd waarop je het pakt: volgens die wanen grijpt de mensch in de natuur in, en bederft ze).

Uit het feit, dat er een vorm voor die begeerte bestaat, volgen de eigenschappen van die vorm.

Maar daarom zitten die eigenschappen er niet in, alleen *wij* kunnen ze er in opbouwen.

Maar stellen we eenmaal de vraag: is inductie mogelijk en zijn de eenheden als gelijk te zien (m.a.w. is er een cardinaalgetal te zeggen), dan zou een ontkennend antwoord behalve zijn eigen vraag tegelijk doen instorten de 'vorm', als onbruikbaar voor de begeerte.

Defin. Een eindige hoeveelheid is een exact door mij opgebouwd, zonder inductie.

*) *(kantlijn:)* ⟨zooals ⟨b.v.⟩ het meetbaar continuum, dat het veld van een groep is (zie later)⟩

**) *(kantl.:)* ⟨als we ons in die begeerte denken⟩

....

Als Dedekind zijn voorbeeld van oneindig systeem geeft, past hij inductie toe, want zeggend, dat het beeld van *elk* element tot het systeem hoort, denkt hij bij zichzelf: het beeld B van A hoort er toe, ook het beeld C van B, D van C, *enzoovoorts.*[29]

....

Hoe kan ik een syllogisme of stelling opstellen omtrent iets, dat ik me niet kan voorstellen? Stel ik zoo'n ding op over iets gedefinieerds, dan geldt het eigenlijk alleen over de aanschouwelijke *voorbeelden* van het gedefinieerde.

....

Er zijn drie gebieden van voorstelling: **V-16**

(bovenaan blz.:) ⟨(Zulke doctrinaire classificaties zijn begeleidingen, meer niet, men vatte ze niet te streng op.)⟩

1^e uit de aanschouwingswereld de tegenpolen onzer zonden, (voorgestelde dingen niet exact, woorden niet exact); *)

2^e uit de wiskunde: het medium der Beharrung dier voorstellingen (voorgestelde dingen *exact*, want uit mijzelf, woorden niet exact, ⟨al was het alleen maar, omdat ik nooit ω in woorden kan beelden; wij spreken van 'als', 'telkens als', 'enz.', en de hoorder moet ω voelen⟩), dat zich kras kan ontwikkelen; het bouwt intuitief op, en bouwt nieuwe dingen in het intuitief opgebouwd grondmateriaal.

3^e uit de logica: (voorgestelde dingen èn woorden exact);
Zij leert alleen dat 2 dingen ⟨eventueel⟩ *elkaar* uitsluiten ⟨of insluiten;⟩ of een van tweeën zin heeft, leert ze niet. Zoo komt het voor, dat ze elkaar tegelijk insluiten en uitsluiten,als in de bekende contradictie, ⟨tenzij men maatregelen à la Hilbert neemt⟩. [30] Men kan intusschen vaak logistiek als een gekleurd puntsysteem interpreteeren, en zoo voorstellen, **) dan heeft het als zoo'n puntsysteem zin, als wiskunde, maar niet toegepast op *andere* wiskunde, b.v. transfinite getallen. ***)

*) (*kantlijn:* ⟨Het woord 'exact' heeft alleen zin als: volkomen evenwicht geven in 't hoofd, d.i. geplaatst in een wiskundig systeem.)⟩

**) *(kantlijn:)* ⟨maar niet alle logistiek kan ik voorstellen⟩

***) *(kantlijn:)* ⟨als ik me niet eerst die transfinite getallen zelf kan voorstellen, dan kan ik daaruit wel weer als *medium* voor de niet-exacte woorden der wiskunde (die echter zonder die woorden niets zijn) de logica abstraheeren.⟩

....

Spreekt ⟨men⟩ van een commutatieve relatie in 't algemeen: de logica heeft er geen vat op, als we ons die relatie niet kunnen voorstellen, als een bepaalde, niet in woorden uitdrukbare, intuitieve.

⟨De systemen⟩ zijn altijd reëel geplaatste teekeningetjes, uit woorden bestaande.⟨11⟩

....

Men doe *niets* goed, anders hadde men zich immers den duivel zijn talenten overgegeven.

....

⟨11⟩ ⟦het⟧ zijn altijd reëel geplaatste teekeningetjes, uit woorden bestaande.

Wanneer iemand het woord *ruimte* gebruikt,[31] en daarover gaat spreken, moet hem direct ⟨de mond⟩ toegesnoerd worden: het woord *ruimte* mag niet toegelaten worden. Evenmin het woord *niet*, om óver te spreken.[32]

. . . .

(Kant p. 24) denken, ja, maar ik heb mij niets te denken, dan ter wille van den strijd; de rest is dwaasheid.[33]

. . . .

Gewichtig *) logisch spreken gaat niet over philosophische vragen (daar spreek je zoo eenvoudig mogelijk), alleen over een zuiver samen opgebouwd wiskundig systeem.

*) *(kantlijn:)* ⟨d.i. gecompliceerd wiskundig⟩

. . . .

V-17 In de werkelijkheid bij God bestaan geen getallen, alleen bij ⟨moordenaars⟩ en sjacheraars.[⟨12⟩]

. . . .

(Naar aanl. van Russell § 57) Een deel zien is ⟨in de cathegorie der⟩ *constantheid* zien, de noodz. vorm voor empirie: het is een in onszelf gelegene, dus als *'constant en exact gevoelde'* passie.
Maar een logisch noodz. vorm voor een ⟨soort van⟩ empirie (die Russell wil), wat is het anders, dan een tautologie. 'Ik kan mij een uitwendigheid niet anders denken, dan volgens meetkunde', natuurlijk, want als je van uiterlijkheid spreekt, spreek je al van meetkunde, wat wil je dus nog meer.[34]

. . . .

Het empirische, ⟨nog niet in een wisk. hypothese ondergebrachte⟩ feit is ook een oordeel en wel, waar getast wordt naar vastheid voor begeerte 3 ⟨en voor een begeerte is geen andere vastheid te krijgen dan in het oogenblik zelf⟩ , zonder begeerte 1 en 2 los te laten; dát die vastheid te krijgen is, wordt gepostuleerd (dwaas en ten onrechte).

$$\underbrace{\text{Als het vriest}}_{1}\text{, }\underbrace{\text{gaan de }\underbrace{\text{boompjes}}_{2}\text{ dood}}_{3}$$

⟨alle drie zijdelings verstard uit een intuitivum van 'November', dat van alle verstarde begeerte zelf vrij is.⟩

⟨12⟩ alleen bij ⟦vechters⟧ en sjacheraars.

Het feit 3 is niet vast, alleen ten opzichte van de wil, om de boompjes te zien leven, is een ⟨band met een intuitie, en daardoor met andere begeerte, een⟩ 'regel' gevonden het (door vastzitten in 1 en 2 van 't centrum afgesloten intellect) zoekt empirische feiten ⟨regels⟩ , die verwonderd worden aangestaard, en vindt ze dus. [dat zoeken en vinden, is inexact; maar de vorm 'als ... dan' *) is uit onszelf, dus exact.] **)

*) *(kantlijn:)* ⟨dit is niet het logisch impliceerende àls... dàn, maar een eenvoudige coördinatie; al wordt het vaak als logica gebruikt⟩ .

**) *(kantlijn:)* ⟨Wordt ook toegepast bij overgang van 2^e naar 3^e⟩

maar dan is de wiskunde tot een empirische wetenschap verlaagd, als er zoo logica op wordt toegepast; zóó empirisch moeten alleen helaas de stellingen in de praktijk worden toegepast, en zóó maken ze alleen indruk op het publiek. De wijze leest ze echter als tautologieën ***) over hetzelfde opgebouwd. ⟨Het bewijs vergt dan ook beide leden in eenzelfde gebouw.⟩

(kantlijn:) ⟨Maar dan hebben we daar de oorsprong der grondfout van logica buiten zelfopgebouwde wiskunde, waar alle Russellsche onzin vandaan komt.⟩[35]

***) *(kantlijn:)* ⟨twee ⟨versch.⟩ benaderingen⟩

Zoo zijn de stellingen 'als... dan' in *1* ongewis en vaag, in 2^e vast en toepas- **V-18**
baar op de werkelijkheid, en in 3^e vast, maar hersenschimmig, niet ⟨onafhankelijk⟩ toepasbaar op 2^e, ⟨tenzij het natuurlijk eerst uit 2^e geabstraheerd is.⟩

(noot bovenaan blz.:) ⟨De logistiek wil de *taal* dwingen in een wisk. systeem, maar die woorden gehoorzamen alleen aan wetten zoolang ze teekens zijn voor reeds geconstrueerde wiskundige systemen, of deelen daarin; zoo is *alle punten van* OA b.v. te stellen $O\pi$, als π is *punt van* OA; maar dan komt het invoeren van een nieuw teeken met nieuwe axioma's hierop neer, dat een formule, waarin het nieuwe teeken voorkomt, wordt gezegd te beteekenen hetzelfde als een, waarin het nog niet voorkomt. Zoo blijven alleen nog over formules, die een wisk. gebouw direct accompagneeren. En elke redenering met de symbolen gaat ver- dwalen zoodra we er los van de wisk. mee gaan opereeren. Dan komt men b.v. tot antinomieën van 2 beteekenislooze uitspraken.⟩

(kantlijn:) ⟨de werkelijkheid is kneedbaar, kan dus toepassing van 2 hebben (dat er niet uit is geboren), maar 2^e is niet kneedbaar, kan dus geen toepassing van 3^e hebben, als het er niet uit is geboren. Vandaar de contradicties⟩ .

(na deze lange kantlijntoevoegingen weer over de stellingen:)

(de stellingen) hebben alleen zin als eigen systeem, *niet* als medium. Hiervan kunnen stellingen èn *wel*, èn *niet* gelden. ⟨Hieruit volgt de onbruikbaarheid der logistiek als grondslag⟩ (cf. de antinomieën van Kant)

(doorgehaalde kantlijntoevoeging:) ⟨Kant pag 340 Euthanasie 350 1^{ste} alinea.

De 1ste antinomie v. Kant eigenlijk over het tijd-mechanische systeen der wereld, *dat ik mij denk*, heeft dat een begin of niet?[36]

Natuurlijk *wel*, want ik ga in elk physisch systeem van een aanvangstoestand uit. Maar ook *niet*.⟩

(kantlijn:) Hier worden redeneeringen over dingen gehouden, die *als geheel* nog geen wisk. hypothese hebben gevonden; geen wonder dus, dat als men er wiskunde van 2 kanten op laat inwerken, strijd komt. Trouwens op dingen als 'de wereld', waarbij je contempleert, niet strijdt, *moet* je de wisk. niet laten inwerken.⟩

. . . .

Het aprioristische ⟨in het oordeel⟩ (Russell § 56) is bij 1^e de wil tot regelmaat en vastheid ⟨oordeel synthetisch⟩ .

Bij 2^e is het oordeel analytisch in Kantischen zin.

Bij 3^e is het oordeel zelf een ⟨los gebouw, een⟩ ding in de wiskunde; ⟨er hoort geen 'oordeelsstemming' bij, het⟩ is zelf niet meer dan een 'punt'; maar is buiten zijn eigen letterfiguren zinloos, *tenzij* alweer het wordt gebruikt, als medium om iets wiskundigs mee te deelen.[37]

. . . .

De absolute ruimte is door onze geest ⟨in een tuimeling⟩ opgebouwd om er verschillende empirische feiten op af te beelden.[38]

(kantlijn:) ⟨Een fictief algemeen vast lichaam van vergelijking, waar we alleen vaste lichamen met vaste lich. vergelijken⟩

. . . .

⟨Overigens heeft Riemann van zijn standpunt gelijk; de verwarde boel, die Russell er tegenover stelt, is niets waard⟩ [39]

(Russell § 62) Grandeur? Maar 'grandeur' is ⟨in al deze theorieën der ruimte⟩ niet een uitgestrektheid, maar een punt op de puntrij *een*, *twee*, *drie* enz. Overigens dient in plaats van dit geredeneer[⟨13⟩] te komen de Poincaré'sche discussie over 'coupures'. Hieruit volgt dan, dat de punten één–éénduidig zijn af te beelden op een deel van den 'Zahlenraum'.[40]

(kantlijn:) ⟨Hoewel hoeveelheid in de zin van meer en minder, welke relaties worden saamgehouden door het *systeem* der cardinaalgetallen, zeker a priori is; en in geen geval ruimte of maat vooronderstelt. Maar de wiskunde spreekt van grandeur eerst na de ordetypen; en de heele ruimte⟨bewegings⟩ groep is klaar voor men aan 'grandeur' heeft gedacht.⟩

. . . .

[⟨13⟩] Overigens dient in plaats van dit ⟦gedoe⟧

Het continuum *is* niet van een machtigheid: ik kan er zooveel op zetten als ik wil; het is intuitief (de punten *bouw* ik er op), zooals alles, waarvan de moreele ondergrond kan worden gevoeld.

....

Construeer op de lijn een ⟨groep en dus een schaal,⟨14⟩ ⟩ dan is elk punt buiten de schaal te *benaderen* met de schaal, we *zien* ⟨dus⟩ , dat voor het intuitieve continuum de Vahlensche wetten gelden, en hebben zoo meteen een Existenzbeweis daarvoor;⟨15⟩ overigens blijken ze ook te gelden voor het geconstrueerde continuum.[41] **V-19**

Met het 3-dim. Poincaré'sche continuum zou ik nu nog geen raad weten, als niet overal bleek te kunnen worden gemeten met eenzelfde maat ⟨hetgeen alleen wil zeggen de *groep* met vrije bewegelijkheid; waaruit ook volgt, dat de driehoeksmeting er is⟩ (door menschelijke heerschzucht n.l. ⟨de natuur meet niet diepte door breedte⟩), m.a.w. ik kan 3 dimensies uitdrukken in hetzelfde ⟨continuum, en daarop kan ik plaatsen om te rekenen, een⟩ *getallen continuum.*[42] Zoo kunnen dan de Hilbertsche ⟨M.A.⟩ grondslagen volgen ⟨(zoo zondigen de menschen altijd, en het postulaat daarvoor is eigenlijk dwaas),⟩ maar nog beter ware, de getallen nog niet direct te zetten, maar sitaal-analytisch te redeneeren, *(doorgeh. in de kantl.:)* ⟨⟦Doen dat Bolyai en Lob. misschien? Waarschijnlijk niet voldoende zuiver⟧ ⟩ met de Hilbertsche redeneering parallel, maar niet aan getallen, maar alleen aan continua te denken.[43]

....

Heb ik het intuitieve continuum, dan kan ik daar op een of andere willekeurige manier een getallen continuum op construeeren, punt voor punt willekeurig aanwijzen bij elk getal, alleen binnen het juiste interval.

Voor de 3-dim. Poincaré'sche ruimte[44] kan ik dat doen met de maatstok, en zoo zooveel punten een getalwaarde geven, als ik wil. Empirisch gaat het met de maatstok maar voor enkele getallen: ik postuleer, dat het gaat voor alle getallen (wat misschien empirisch later onjuist blijkt, maar daarmee zal het concept van continue ruimte niet weg zijn), en dat de beweging als een–eenduidige afbeelding ook gaat voor *alle* aangewezen getallen.

....

Over het continuum van één dimensie. Een rationale schaal is eerst naar willekeur te plaatsen. Neem dan een andere rationale schaal: geef ik daarvan de 'tusschenverhoudingen' van punt t.o.v. de eerste schaal, dan volgen daaruit (dat zien we intuitief) die van alle punten der tweede schaal. Is de eerste schaal met een maatstok (fictief nauwkeurig en fijn zonder perk) geconstrueerd, dan zegt deze stelling het axioma van de Abgeschlossenheit der bewegingen (Hilbert).[45] **V-20**

⟨14⟩ in plaats van een onleesbare doorhaling

⟨15⟩ ⟦en kunnen⟧ en hebben zoo meteen een Existenzbeweis daarvoor;

(De tweede schaal denk ik dan door willekeurige verplaatsing des maatstoks begonnen.)

(toevoeging bovenaan de blz.:) ⟨Voor de praktijk zou men genoeg hebben aan één rationale schaal. Men bouwt er nu de oneindige decimaalbreuken tusschen; deze voldoen aan de opname van $\sqrt{2}$ enz.; maar men zou er nog veel meer tusschen kunnen bouwen; het continuum bevat nog veel meer (elk punt is n.l. weer onder te verdeelen).

(kantlijn:) Bij het fictieve continuum *versta* ik onder $\sqrt{2}$ de Fundamentalreihe van de decimaalbreuk er van.⟩

In onze Poincaré'sche R_3 kunnen we nu zoover als we willen ⟨een⟩ willekeurige 3-schaal construeeren; we postuleeren de vervollediging tot een Zahlenraum, en leiden volgens Hilbert de grondslagen af.

Maar beter: uit het Poincaré'sche phys. continuum leiden we het mathem. intuitieve af (of eigenlijk is dat van het phys. onafh.), en leiden daarin de meetkunde af uit de groepeigenschap der bewegingen.[46]

(doorgehaald:) ⟦Van de continue ruimte is de Zahlenraum een deel; en zoo is ook de Hilbertsche 2^e meetkunde slechts een deel van de werkelijke meetkunde.[⟨16⟩ 47]⟧

Men kan over de wiskundige grondslagen tot steeds meer klaarheid komen, maar wat heeft dat voor waarde? ⟨Tot wijsheid helpt het niets.⟩

(kantlijn:) ⟨Uit de groepeig. volgt, dat na constructie der üb. dichte schaal geen eindige intervallen meer zijn overgebleven. Omgekeerd voldoet de optelling in zoo'n üb. dichte schaal zonder intervallen aan de eigenschap van stetige groep. Immers, naderen de punten $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ... in de schaal niet tot 0, maar tot α, dan zou 0 tot α kunnen gaan, en andere punten vast. Maar de groep moet eenduidig zijn.⟩ [48]

(volgt nog een onleesbaar gemaakte doorhaling in de kantlijn.)

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Met een rationale schaal van 3 dimensies zou men de bewegingsgroep niet krijgen; wel met de fictief continue schaal; maar wat geeft dat omtrent het werkelijke continuum, dat intuitief is? *Lie* werkt met intuitief continuum, maar neemt aan de differentieerbaarheid der functies. Het laatste doet *Hilbert* niet, maar die werkt met het fictieve continuum, en dat is ook weer fout.⟧

. . . .

Zoo goed als kunst en industrie, is wiskunde een zuivere veruiterlijking van

---

⟨16⟩ *Deze gehele pagina is gelardeerd met enkele onleesbaar gemaakte doorhalingen.*

de menschheid, die echter steeds slechts kan worden doorgedreven door kwelling, opstoving meesleept vervuiling op allerlei ander gebied van het leven.

. . . .

Het is waar, dat de traagheidswet ⟨of differentieerbaarheid der mechanische functies v.d. tijd⟩ eigenlijk niets uitdrukt, dan de 'conventie', om den tijd te meten. Immers feitelijk ligt in die wet alleen, dat onafh. v.d. tijd, de functies op *elkaar* geschaald zijn. ⟨Men vindt nu dat bij ongeveer gelijke toestanden ook ongeveer gelijke toestandsveranderingen hooren; daarom neemt men de geconstr. schaal als absolute schaal (of althans daarvan slechts verschillend door een functie van één var. t, die differentieerbaar is. En daaruit volgt dan weer omgekeerd, dat nu ook in ándere toestanden v.h. mechanisme de functies differentieerbaar zijn.⟩ [49] **V-21**

. . . .

(Russell § 71 terecht) 'un point purement géométrique, etant défini uniquement par ses attributs spatiaux, ne peut être supposé se mouvoir sans une contradiction dans les termes'.[50]

. . . .

Het Kantsche apriori en aposteriori worden omgezet in:[⟨17⟩]
1^e de zonde van nu
2^e de verwondering, komend uit de afsluiting, die in vroegere zonden lag.

. . . .

(Russell § 80 terecht) 'Tels sont les dangers de la tendance des mathématiciens à tout réduire à la quantité'. Maar Russell vecht daarin heusch tegen windmolens.[51]

. . . .

(Russell § 79) Maar grandeur heeft niets met onze quantiteit van *hoeveel* te maken; alleen beduidt het: intuitief continuum, waarop schalen zijn te construeeren (naar willekeur) en de Russelsche axioma's postuleren toch ook de bollenreeks, dus daarin een eendim. cont. voor den afstand.[52]

. . . .

Het is niet waar, dat extériorité projectieve rechte lijnen insluit. De relatie kon even goed zijn door lichtstralen, die niet aan de stelling van Desargues voldoen.

. . . .

[⟨17⟩] ⟦Maar wat hij er op laat volgen, is niet waar: men zou⟧ Het Kantsche apriori en aposteriori worden omgezet in:

Als ik zeg: een lijncontinuum ontstaat door beweging van een punt, bedoel ik met 'beweging' iets anders, dan bij de empirische beweging van vaste lichamen (want de laatste is 'in iets anders').

. . . .

Dat intuitivum van extériorité, dat Russell bedoelt, bestaat wel, maar niet als ruimte-intuitie; maar mijn mengintuitie (ook hier werken we met ongemeten intuit. continua. Russell veroordeelt dit in § 64 ten onrechte.)[53]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Al het gezaag van Russell is direct uit, zoo gauw het continuum als zonde wordt gevoeld en ingekeerd⟧

. . . .

De meetkunde moet zóó zijn op te bouwen, dat ze niets anders *is*, dan 'bewegingsgroep in ⟨3-dim.⟩ continuiteit'.

. . . .

V-22 Een *functie* behoeft geen diff. quot. te hebben, maar een kromme lijn wel. Een functie van Weierstrass is een Punktmenge, geen 'kromme lijn', waarlangs ik de intuitieve ⟨continue⟩ beweging ⟨der mechanica⟩ kan voelen.[54]

. . . .

[Een vlakken distributie in de ruimte is niet steeds te leggen in een oppervlak als raakvlakken.

Maar kan men er toch niet een pseudo-oppervlak uit vormen, zoodat de stelling van integraal over het oppervlak verdeeld over de volume-elementjes, doorgaat? Misschien door een trap-oppervlak te nemen? ⟨waarin ik dan kan zeggen dat de elementjes liggen?⟩][55]

. . . .

Je moet zeggen: *zij* (niet *wij*) hebben de intuitie van het continuum; want je moet de wiskunde alleen beschouwen, voorzoover je medemenschen, die dwaze waan, haar bedrijven.

. . . .

Dit loopt in 't moreele parallel met het logische, dat je een classificatie slechts op iets anders, niet op zichzelf mag toepassen.

. . . .

Het postulaat van Euclides geldt ⟨in de wereld⟩ bij definitie, aldus: ik *stel* een Euclidische ruimte, en forceer alle verschijnselen met geweld daarin (hij is er niet, zoo min als er een ideaal gas is, ⟨en een absolute temperatuurmaat⟩.) En in de wisk. geldt het bij defin., in zooverre dat ik een ruimte wil bekijken, die aan dié en dié voorwaarden ⟨o.a. het postul. v. Eucl.⟩ voldoet.

....

Wiskunde is een exportartikel; vraag en aanbod worden sterk door de *mode* beinfluenceerd.

....

Stel je voor, dat tusschen echte wiskundigen vriendschap zou bestaan!

....

De groote tegenst. tusschen wisk. en phil. spreekt ook hierin, dat de eerste wèl, de laatste niet bij het werken dwingt, het centrum te verlaten.

....

(doorgehaald:) ⟦Aldus is mijn mengmeetkunde te beredeneeren volgens de aprioriteit van Russell.⟧ [56] **V-23**

....

De meeste individuen van de soort zijn ‘organen’ zonder wil; slechts in enkele, de gewetens der soort, centralizeert zich de wiskunde eenigszins.

....

(doorgehaald:) ⟦In de wiskunde der logica is het continuum voorondersteld (voor de ..*(?)*)⟧

....

(Bradley Logic p. 187) ‘Une chose est possible, lorsqu’elle doit résulter d’un certain nombres de conditions, dont on sait que quelques–unes sont réalisées’. Dat doet denken aan het opbouwen van niets af; zoo gauw eenige dingen gesteld zijn, zijn voor hun combinaties de vóóronderstellingen aanwezig; en voor de combinaties zijn dan verschillende dingen *mogelijk*.[57]

....

Zoo gauw een natuurlijk oordeel b.v ‘alle ijzer wordt door wrijven magnetisch’ zoo scherp is geformuleerd, dat geen misverstand meer mogelijk is,[58] ⟨d.w.z. dat alle menschen er ⟨zeker⟩ precies dezelfde daadreactie ⟨in de samenwerkende organisatie⟩ uit zullen krijgen,*) ⟩ kunnen de elementen van het oordeel als mathematische elementen worden opgevat.

Maar dat misverstand is eerst dán niet meer mogelijk, als een maatgetal optreedt als resultaat van andre maatgetallen; m.a.w. als het verschijnsel in formule staat ⟨die zoowel door een =, als > of ≠ kan zijn gedragen⟩ – of als het oordeel een van coïncidentie is,⟨18⟩ b.v. 'Berlijn ligt in Pruisen' (Toch moet ook bij dit laatste eerst Pruisen een mathematisch segment op de kaart worden, eer het oordeel exact is; Berlijn evenzoo.)

*) *(noot in de kantlijn:)* ⟨want op een oordeel, als 'het regent' is niet te ontkomen, of er zijn overgangsgevallen, b.v. als het eventjes druppelt.⟨19⟩ En zeg ik gewoon 'ijzer', hoort daartoe ook ijzer met een beetje nikkel?⟩

V-24 Nu is evenwel, wat ik denk bij 'ijzer', ⟨of bij 'wrijven'⟩ , nog niet exact. Ik zou dan ijzer moeten definieeren, wat niet *kan* (cf. Poincaré Rev. de Metaph. 14,1 over phosphor[59]), daarom zoek ik voor ijzer een mathematische hypothese van moleculen b.v., die wèl exact zijn kan (in de *verstandhouding* n.l.); offer zoo de waarheid aan de verstandhouding op. Een gas moet wel, om ⟨in⟩ exacte verstandhouding van een ander gas onderscheiden te worden, in moleculen worden verdeeld. Hoe wil ik anders onderscheid brengen? ⟨dat de gassen exact als verschillend definieert.⟩

(kantlijn:) ⟨Tegelijk tracht ik, om *zeker* te zijn van sommige stellingen en verstandhouding, ijzer 'zuiver' te fabriceeren.⟩

. . . .

Zoo zie je dus, hoe de wetenschap een eindig systeem (waarin inductie en contin. optreden) moet opbouwen, wil ze vast zijn; dus op het *al* met zijn eindeloozen samenhang (het *fatum*) nooit vat *kan* krijgen.

. . . .

(Russell Fond. p. 128 ⟨terecht⟩ 'on pourrait expliquer les phénomènes optiques en supposant l'éther réfringent et l'espace non-euclidien'.[60]

. . . .

Poincaré wil alleen le continu physique erkennen als gegeven. Maar het intuitieve continuum nemen wij direct als grond daaronder (*omdat we het al hadden*) en we kunnen daarop bouwen niet alleen het fictieve continuum, maar ook actual-unendlich kleine dingen er tusschen.[61]

. . . .

(Grassmann, Ausd. 1844 2e ed. p. XXIII) ' Ce qui appartient à l'intuition pure ne peut guère, semble-t-il, être déteminé par un raisonnement a priori'. Terecht en aan 't adres der logistici.[62]

⟨18⟩– of als ⟦de formule⟧ het oordeel een van coïncidentie is,

⟨19⟩want op een oordeel, als 'het regent' is niet te ontkomen, of ⟦de een fantazeert zich iets anders, dan de ander. Zet de ..⟧ er zijn overgangsgevallen, b.v. als het eventjes druppelt.

. . . .

De hoofdstrekking van Russell's 'Fondements' is misschien ⟨wat de metrische meetk. betreft,⟩ *) nog niet zoo erg in tweestrijd met de strekking van de Hilbertsche 'Grundlagen'.[⟨20⟩] In zooverre: de meting (*afstand*, d.w.z. eendim. Mannigf.) tusschen 2 punten onderstelt de cirkelgroep (bollengroep) om een der punten, en zoo dus de bewegingsgroep.[63]

*) *(kantlijn:)* ⟨en toch blijft het ook daar onzinnig wat zijn idee van 'a priori' betreft.⟩

. . . .

Intusschen volgt de proj. meetkunde nog niet zoo; immers volgens Lie is nu nog geen minimaalkromme noodig.[64]

. . . .

(Russell Fond. p. 138) 'La congruence est un axiome a priori, sans lequel la Géometrie serait impossible'. ⟨En het is waar, dat elk gek oppervlak zoo gauw wij er lichamen op laten 'bewegen', zoo een *groep* van constante kromming geeft.⟩[65] **V-25**

. . . .

Philosophie in tegenst. met wiskunde, mag zich bezighouden met intuitief gevoelde, en aan het geweten getoetste waarheden. Maar ook alleen als het geweten spreekt. Spreekt ze zonder dat, dan is ze gedaas als vrouwenlogica, *) tenzij ze zich bepaalt tot *beschrijven* zonder strekking ⟨d.i. toch weer lyriek uit neven-centrum⟩ , of zich verwiskundigt – wat logica wordt, en nadert tot de bouwende *wiskunde*.

*) *(kantlijn:)* ⟨geen haar beter, dan de redeneeringen der Kantische antinomieën; de frasen van Russell zijn van hetz. allooi⟩

. . . .

(Russell § 99) Uit het feit, dat waar congruente groei *wil* optreden, b.v. bij kristalgroei, ten slotte degeneratie optreedt, zou men veeleer tot niet-Eucliditeit der ruimte besluiten, indien die degeneratie althans ook bij opheffing der zwaartekracht (zweving) blijft.[66]

. . . .

(§ 100 p.144 bij ([2]) Niet waar. cf. ⟨ook⟩ § 133.[67]

[⟨20⟩]nog niet zoo erg in tweestrijd met de strekking van de ⟦gecorrigeerde, d.i. op het enkele continuum gegronde⟧ Hilbertsche 'Grundlagen'.

. . . .

Daar het altijd mèt logica en wiskunde is, dat we redeneeren over de grondslagen vàn logica en wiskunde, is die ⟨redeneerende⟩ philosophie niet Hereeniging, maar Verwijdering in 't kwadraat. Hereeniging gaat alleen onzeggelijk in 't geweten.

. . . .

[Om de algemeene aantrekkingskracht te verklaren,[68] is voldoende, aan de materie een grootere ⟨elliptische⟩ ruimteconstante toe te kennen, dan aan de ruimte d.w.z. de ether ⟨zoo spant de materie de ruimte en de ruimte de materie, en door die spanningen beweegt de materie zich op elkaar toe.⟩

Merk op, dat de etherhypothese identiek is met de ruimtehypothese (d.w.z. ruimte onafh. v. materie.)]

(kantlijn:) ⟨Werkelijk krijgt men zoo uitrekking langs en samentr. ⊥ de krachtlijnen.⟩

(kantlijn, tevens terugverwijzend naar 2 paragrafen hierboven (§ 100...):) ⟨Denk eerst een cirkelvormig schijfje (Eucl.) geplaatst in een niet-Eucl. ruimte, en zoek de deformatie⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Eenmaal toegegeven, dat de ruimte een Mannigfaltigkeit is, (Grössensystem) volgt uit de vrije bewegelijkheid de constante ruimteconstante. Of het Monodromie-axioma uitdrukkelijk moet worden uitgesproken, doet er niet veel toe; we denken het er bij, als we zeggen 'vrije bewegelijkheid'. In hoeverre zijn de Hilbertsche axioma's vrij van het monodromie-axioma?⟧ [69]

. . . .

V-26 [Euclides schijnt van den cirkel uit te gaan, niet van de rechte lijn.[70] Dit is nu in vergelijking te brengen met de Hilbertsche 'Grundlagen'.][71]

. . . .

(De volgende vier §§ zijn doorgehaald:) ⟦De projectieve coördinaten van Klein zijn in tegenst. met de andere coördinaten, ranggetallen, niet hoofdgetallen.[72]

. . . .

Misschien kan de projectieve R_3 opgebouwd worden zonder continuum, uitgaande van 4 punten $a\ b\ c\ d$. Invoerende de relaties (abc), (bcd), (abd), (acd) en ook (ab) enz. Ik kan dan zeggen (ab) in (abc); dat *moet* sluiten. Nu neem ik een vijfde punt e, dat ik stel in (ab), dan ook in (abc); zij f op (ac), dan ook (ef) in (abc). Maar dat geldt immers alleen, als ik ef uit abc kan denken gevormd, gegenereed, dus alleen in de mengmeetkunde.[73]

....

De gang is dus: de methode van Klein voor de proj. geometrie, gecorrigeerd door Russell en de mengmethode. (Russell begint hier al te *stellen* zonder Existenzbeweis, zooals hij dat later nog veel erger zal doen in de 'Principles'.)

....

Het phil. gedeelte wordt eenigszins afgekort omdat het in een wisk. diss. niet op zijn plaats is. Desniettemin blijft het het geraamte van alles.⟧

....

(Russell) 'Tous les trois axiomes dépendent philosophiquement l'un des autres', n.l. als je ze Hegelt.[74]

....

Philosophie schrijven of zeggen is in strijd met philosophie. **V-27**

....

Russell beweert (pag. 173, § 126) niet meer of minder, dan dat 'la géométrie projective ne saurait changer sans que les lois de la pensée changent et que toute notre connaissance s'écroule en même temps'.[75]

⟨Alsof je je mag voorstellen, *met* je geest, dat iets van je geest niet bestond? Overigens heeft hij in zooverre gelijk, 'dat de proj. meetkunde *hoort* tot onze veruiterlijking', maar de metrische net zoo goed.⟩

....

Intusschen geeft hij direct daarna toe, dat zij als elke 'vérité nécessaire' is 'hypothétique', maar dan belooft hij weer, in Chap. IV te zullen toonen, dat zij 'nécessairement a une portée réelle'. *) ('que l'on a nécessairement l'expérience d'une extériorité') (cf. p. 226)

*) *(kantlijn:)* ⟨ja wel, aan elke expérience is zoo iets noodig, maar dat kan nog wel op andere manieren, b.v. met een eindig aantal punten, of een niet-Desarguesische meetkunde.⟩ [76]

....

(Kant p. 54) 'Also macht allein unsere Erklärung die Möglichkeit (....) begreiflich'. Dat is echt philosophisch redeneeren: je toont van een paar andere dingen aan, dat *die niet* waar zijn, en concludeert zoo op de waarheid van je eigen domheid, een vrouwelijke 'mouw-aanpassing'.[77]

....

Bij § 129: Overigens spreekt het niet van zelf, dat thinghood en vorm te scheiden zijn, dat van den thinghood *kan* worden geabstraheerd.⟨21⟩

(kantlijn:) ⟨Dat is allemaal onzin; wij bouwen een vorm op bestaande uit pseudo-things (punten) de rechte lijnen (Russell's zgn. 'relaties') bouwen we *daarin.*⟩ [78]

. . . .

Maar hierin heeft hij gelijk: het is te voelen, dat aan de ⟨eendim.⟩ exterioriteit zonder meer oneindige deelbaarheid en continuiteit verbonden zijn. Maar 't is niet noodig, dat zij zoo ⟨in meer dimensies⟩ een portée réelle heeft.[79]

. . . .

Hij zegt (sic!) (p. 175 r. 4 v.o.) 'dans la recherche des éléments'; dit onderschrijft dat die recherche mogelijk is, wat a priori heelemaal niet spreekt.

(kantlijn:) ⟨hij zegt p. 177 dat in ch. 4 te zullen toonen⟩ [80]

. . . .

V-28 In § 131 gaat Russell al om de mengmeetkunde heendraaien. Overigens zijn de 'bewegingen', die hij hier beschouwt, willekeurige ⟨reëele⟩ proj. transformaties.[81]

. . . .

Op p. 178 'Il faut donc substantialiser les relations spatiales, pour les traiter quantitativement'. Dit is onzin, getuige de mengmeetkunde; de laatste zin van de § is kras.[82]

. . . .

§ 138 is eenvoudig onzin, ook afgezien nog van het feit, dat niet eens wordt bewezen, dat de lijnrelaties moeten liggen in de vlakrelaties.[83]

. . . .

Het is maar gekheid: als de proj. meetkunde in exterioriteit ligt opgesloten, dan moet ik haar er uit kunnen opbouwen; een andere beteekenis heeft het niet. ⟨of: exterioriteit is te ontleden in projectieve meetkunde en nog wat.⟩ [84]

. . . .

ad (§ 141)[85] Je *kon* van te voren niet weten, dat de maat op onderstelde homogeniteit mogelijk zou zijn,⟨22⟩ die vrije bewegelijkheid gaf. *)

⟨21⟩dat van den thinghood *kan* worden geabstraheerd. ⟦van de ruimte b.v. kan *niet* worden geabstraheerd.⟧

⟨22⟩Je *kon* van te voren niet weten, dat de maat op onderstelde ⟦mogelijk⟧ homogeniteit

⟨T.o.v. stat. electr. is de ruimte ook homogeen: toch bestaat geen homogeen veld⟩ [86]

*) *(kantlijn.:)* ⟨m.a.w. dat een homogene groep mogelijk is.⟩

....

ad (§ 142) De dualiteit spreekt, ook bij de projectieve meetkunde niet a priori vanzelf, maar wordt verwonderd achteraf gevonden.[87]

....

Het doel van alle meetkundig inzicht moet zijn, te merken, 'dat men het zélf gedaan heeft'.[88]

....

§ 143 p. 189. Onzin: hoe wil ik in 3 gelijke deelen verdeelen, d.w.z. welke weg tusschen de 2 punten; hoe vind ik n.l. de rechte lijn, die ze verbindt? Lees eens, hoeveel moeite Hilbert heeft, om het midden van een 'Strecke' te vinden![89]

....

Zoo goed als verschillende bouw-stijlen onafhankelijk van elkaar zijn, zoo ook de verschillende onderdeelen der wiskunde.[90] **V-29**

....

Die 'identité des indiscernables' van Leibniz wordt door Russell (p. 196) voor zijn *libre mobilité (onleesb. doorh.)* gebruikt; ⟨even goed⟩[⟨23⟩] mag men ze gebruiken voor de hoofdeigenschap der rekenkunde. ⟨gelijke dingen kunnen niet verschillen, niet door een cardinaalgetal, maar ook niet door een ordinaalgetal. Wat impliciet ieder toepast.⟩[91]

....

Hoe weet Mannoury, dat er G.G.H.'s en O.G.H.'s bestaan?[92]

....

Men kan *met* inductie de wiskunde opbouwen, zoo goed als men in den tijd het tijdsorgaan in de hersenen kan bestudeeren, en mét het bewustzijn het bewustzijn.

....

Russell p. 208-224 is niet te weerleggen, omdat het totaal onzin is.[93]

---

mogelijk zou zijn,

[⟨23⟩] I.p.v. een onleesbare doorhaling

. . . .

Alleen staat op p. 223 terecht: 'La divisibilité à l'infini, la libre mobilité et l'homogénéité (les équivalents de nos trois axiomes) sont nécessaires pour la mesurabilité d'une multiplicité continue'.[94]

. . . .

Tegen Russell: De logica is een anal. sitale extériorité, zonder echte lijnen, en toch homogeen, en ook met een eindig aantal afmetingen ⟨waarvoor de redeneering der fond. kan worden gebruikt⟩ . Had hij dit laatste goed ingezien, dan had hij zijn heele klassenlogica van later niet kunnen maken.[95]

. . . .

(Russell sic) 'Supposer deux choses au même endroit de l'espace et du temps serait une contradiction logique'[96]

. . . .

V-30 *(doorgehaald:)* ⟦Ook in de gewone logica is de tijd verondersteld; maar dat zegt niets: het heele leven is in elk gezegde vooronderstelt.⟧

. . . .

(Russell p. 243 terecht) 'La contradiction inhérente au point, n'est que le résultat de l'abstraction illégitime qui constitue l'objet de la Géometrie'.

⟨Het voorwerp van een antinomieredeneering wordt dáárvoor gepostuleerd in één wisk. systeem te zijn ondergebracht; tewijl men er niet eens een van de beide tegen-systemen op had mogen toepassen.⟩ [97]

. . . .

Als de relaties worden uitgedrukt door de ruimte, dan is het *punt* het element, waarop die relaties worden toegepast. (dat zelf geen intene relaties meer heeft dus, men zou dus kunnen zeggen 'atoom').

'Les lignes droites et les plans sont les vraies unités spatiales'. 'Le point résulte de la tentative de trouver dans l'espace le terme ultraspatial'.[98]

. . . .

Zien we eenmaal in, dat de ledige ruimte 'er niet is', ⟨maar als spreekwijze is ingevoerd⟩ , dan komt plaats vrij voor allerlei nieuwe physische hypothesen.[99]

(kantlijn:) ⟨in zooverre er naast de dichterlijke ruimte nog wel andere termen komen; ook is a priori de dichterlijke ruimte zonder haar meetkunde⟩ .

(kantlijn:) ⟨waarin Kant dus ongelijk heeft.⟩

. . . .

(§ 207 terecht) Met het continuum bereikt men nooit het punt; dit aan 't adres van hen die het continuum als een Punktmenge willen opvatten.[100]

....

In continu v. 1 dim. is een willek. punt uit een gegeven schaal te benaderen.
In continu v. 2 dim. is continu v. 1 dim. m.a.w. kromme-stuk *niet* uit gegeven schaal (d.i. netwerk) te benaderen; zijn ze dat *wel*, dan noem ik ze differentieerbaar. (Ze zijn dan door de reeks v. Taylor te benaderen.)
(De laatste doorhaling op deze pagina is onleesbaar.)

....

(Russell p.251 sic) 'Ils ne réussirent pas à construire un système affranchi des trois axiomes fondamentaux.' En Hilbert dan?[101] **V-31**

....

De mogelijke verschijnselen in de physica beschrijvend, vergeet men altijd, dat nog één factor noodig is, n.l. de tusschenkomst van den berekenenden, d.i. zich veruiterlijkenden mensch (welke tusschenkomst groot positief kan tot stand brengen, ten koste van even groot negatief, latente schade aan zijn ziel); voor die veruiterlijking alleen bestaat vrijheid in de natuur; *)
Zoo is ook de vrije bewegelijkheid, de ruimte, slechts het raam voor de veruiterlijking van den mensch in de natuur, maar niet van de natuur zelf: die heeft geen vrijheid en geen ruimte.

*) *(kantlijn:)* ⟨wij kunnen een vast lichaam ∞^6 standen geven;[102] en de standen, die het in de natuur, vrij van ons krijgt, betrekken we op dat systeem van ons.⟩

....

[Maxwell zegt over zijn 'pression and tension' langs de krachtlijnen:[103] 'I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric'. Dit zou nu kunnen met de buiging op een elliptische ruimte.]

....

De 4 hoofdbew. zijn rekenkundig ⟨rationaal⟩ intuitief; maar algebraisch krijgen ze de beteekenis van een transformatie van de reeële getallen in zich, en nog sterker krijgen ze dat karakter bij het meetkundig continuum.
⟨De rekenk. bew. zijn heel iets anders als de algebraische, maar kunnen op een deel dezer laatste afgebeeld worden.[104]⟩

....

Het is eigenlijk het idiootste grondfoutieve, dat je denken kan, waar Kant **V-32** en alle philosophen ⟨die het exact, d.i. wiskundig willen zeggen (Russell ook)⟩ , van uitgaan dat je met je eigen gedachten je eigen bewustzijn (dat van anderen zou nog gaan) gaat bekijken; bedenk toch dat je bewustzijn slechts zin heeft als strijd naar buiten.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Is de stelling, dat een p-distr. in R_n bepaald is door zijn p_{n-1} en zijn p_{n+1} niet uit momentproducten af te leiden? Daatoe eerst de analoge afl. voor lijnvector in R_3.⟧

. . . .

De homogeniteit der empirische ruimte leiden wij eerst af *uit* de vrije bewegelijkheid (contra Russell, ⟨die beweert, dat de homogeniteit al voorwaarde was, om iets te kunnen ondervinden.⟩)[105]

. . . .

[De contramassen van de massa's v.h. planeten systeem moeten toch ergens zitten; waar?]

. . . .

[Is het Eulersche vraagstuk der ell. ruimte ook niet op te lossen voor een massa, wier algebraische som 0 is?]

. . . .

De wiskunde van Schuh en Cardinaal is geen inzicht, maar een 'zich laten gaan', en dan zijn het niet de grondcathegorieën der wiskundige eenheden, waarmee ze werken, maar een of andere empirische oppervlakte, waarin een onanistisch talent waardeloos is.[106]

. . . .

Een in een wiskundig gebouw gevonden betrekking is zelf een nieuw bouwwerk, dat in het oude een plaats kon vinden.

. . . .

V-33 [(Ter uitbr. op ${}^pV$ in R_n)

Kan ik niet zeggen: bij een vectordistr. in R_3 neem ik 1^e die, welke dez. $\frac{dX}{dy}$ enz. heeft, maar geen $\frac{dX}{dx}$ enz. 2^e die, welke dez. $\frac{dX}{dx}$ enz. heeft, maar geen $\frac{dX}{dy}$, $\frac{dZ}{dx}$ enz. En is dan de distr. niet gesplitst in een met alleen *rot*. en een met alleen *div*.?

Jawel, maar daarmee is niet aangetoond, dat elke V zonder *div*. is te beschouwen als een *rot*.

. . . .

(Bij de uitbr. van mijn bewijs hiervoor, dat in Maxw. II ligt, zien we wel direct, dat ${}^{p+1}V$ (eerst afgel.) = 0 noodzakelijk is, maar niet, dat het voldoende is.)]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦*De gang die gevolgd moet worden om* V_p ⟨*in Eucl.* R_n⟩ *te leeren beschouwen als afgeleide vector van een* V_{p+1} *en een* V_{p-1}.

We zoeken eerst ⟨de⟩ afgeleide ⟨van⟩ een enkelen geisoleerden vector V_p⟨24⟩ *(onleesbaar stukje doorhaling)* van elk van beiden bepalen we de $\int \frac{}{r^{n-2}}$, en ⟨van elk⟩ daarvan de afgeleide. Die twee afgeleiden blijken dan overal in R_n gelijk en tegengesteld, behalve alleen in het oorspr. punt van uitgang. Daar komt dan de oorspr. geisoleerde V_p weer voor den dag. Zoo zien we werkelijk – wat de ∇^2 stelling slechts waarschijnlijk maakte – dat: afgeleide van $\int \frac{afgeleide}{r^{n-2}} = V$. Hieruit volgt ook, dat de distr. V door zijn afgeleide bepaald is, immers had $V + V'$ dezelfde afgeleide, dan moest afgeleide van $\int \frac{afgeleide}{r^{n-2}}$ tegelijk $= V$ en $= V + V'$ zijn.⟧

. . . .

[Een indicatrix over een n-voudig assenstelsel ⟨uit halfstralen⟩ wordt gegeven door α_1 gevolgd door een $(n-1)$ indicatrix, of door α_1 gevolgd door $\{\alpha_p$ gevolgd door een $(n-2)$ indicatrix$\}$ of door enz. **V-34**

(kantlijn:) ⟨En dan helemaal vooraan de indicatrix van den oorsprong als 0^{de} index.⟩

We krijgen dus een enkele rangorde der indices. Een verwisseling van twee der indices, die elkaars plaatsen innemen, verandert het teeken der indicatrix. Twee verwisselingen brengen dus weer het oude teeken.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦(Na het slot op de vorige pagina) En toch spreekt het direct van zelf, dat $V =$ afgeleide van $\int \frac{\text{afgeleide}}{r^{n-2}}$. Immers vooreerst kunnen twee veld f's *(?)* niet dezelfde afgeleide hebben zonder gelijk te zijn, (want anders hadden ze ook dez. tweede afgeleide), dus moesten beide zijn: $= \int \frac{\text{tweede afgel.}}{r^{n-2}}$.

Stel nu afgeleide van $\int \frac{\text{afgeleide}}{r^{n-2}} = V'$, dan hebben V en V' dezelfde afgeleide; ze zijn dus gelijk, als niet alleen V, maar ook V' de veldeigenschap heeft, en dat zal zijn als V haar heeft (zie dictaat pot. theorie) *)

⟨24⟩ *(eerdere doorhalingen:)* We zoeken eerst ⟦welke⟧ afgeleide ⟦geeft⟧ een enkelen geisoleerden vector V_p; ⟦hieruit volgen de eenheidsfiguren *(?)* waarin de V_p moet liggen als afgeleide van een V_{p+1} resp. V_{p-1}⟧

(kantlijn:) ⟨Want ook bij gewone Euclidische opvatting is duidelijk dat er geen pot. functie kan bestaan van lager dan $\frac{1}{r^{n-2}}$ in 't oneind., die nergens in 't eindige divergentie heeft.⟩

Dus is iedere velddistr. als een afgeleide te beschouwen, maar alleen eenduidig, als ze is van lager orde ⟨dan⟩ $\frac{1}{r^{n-2}}$ (dan is de potentiaal ook ondubbelzinnig bepaald.)

*) ⟨$\int \frac{p}{r^{n-2}}$ is altijd ⟨hoogstens⟩ twee ordes minder laag, dan p. Dus V' kan niet zijn van minder lage orde als V.⟩

....

V-35 *(nog steeds doorgehaald:)* Na te gaan uit het dictaat pot. theorie, welke eischen ⟨voor de formule $V_2 \nabla \int \frac{\nabla}{r^{n-2}}$⟩ gesteld moeten worden 1^e aan de pot. functie 2^e onafh. aan de op zichzelf beschouwde agensfunctie.
En dan dit uitbreiden op R_n. Waarsch. is ook daar voor de pot. functie het 0 worden in 't oneind. voldoende. (dan zal n.l. waarsch. de afleiding ⟨met behulp van⟩ de stelling van Green doorgaan)⟧

....

De 2 afm. voor een reëele ruimte zou misschien daarom al ongerijmd zijn, omdat twee agenspunten op oneindige afstand nog een oneind. energie t.o.v. elkaar zouden hebben (M.a.w. een evenwichtsverstoring op ⟨on⟩eindigen afstand eindig effect zou hebben.)

....

(doorgehaald:) ⟦Het werk van Lie is hoogstens aldus te beschouwen: het lapwerk, om een beetje beter sommige wegen te vinden in de door eigen onverstand van lichtzinnig opbouwen geschapen doolhof in de wiskunde, die door de laatste eeuwen gekomen is. Lie lijkt een genie, maar voor wie bewust door de wiskunde is gegaan, is het toch alleen waardevol bij toepassing op warhoofden.⟧

....

[Na te gaan of de elementair-plani vector distrib. in R_4 in gesloten oppervlakken samenliggen. Zoo ja, welke betr. er tusschen de beide oppervlakken⟨stelsels⟩ van E_1 en E_2 bestaat. Of er misschien een functie is, die over de eene reeks v. opp. constant blijft, en over de andere het snelst verandert.]

....

V-36 K.Geissler. Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und der Philosophie. (Leipzig, Teubner)
A.E.Harvard, On the Transfinite Numbers. (Phil. Mag. Sixth Series Vol.X (no 55-58)

Frischauf , Absolute Geometrie nach Johann Bolyai. (Appendix)

. . . .

. . . .

Notes

[1]De eerste pagina van dit schrift behandelt potentiaaltheorie.

[2]Dit is, naar het lijkt, een planmatige schets voor de inhoud van een artikel over potentiaaltheorie, zoals dat verschenen is in de KNAW verslagen.

[3]Voor G.G.H.: zie IV–20.

[4]Wederom de hoofdstelling van de rekenkunde, met dezelfde redenering als in het vierde schrift.

[5]De beperktheid van de logica: mogelijk nuttig, maar dan altijd slechts *na* het eerst opbouwen van de wiskunde. Logica zonder inhoud is leeg.

[6]Vanaf hier tot en met pagina 7 van dit schrift worden de hoofdstukken 9 en 10 van Poincaré's *La Science et l'Hypothèse* besproken. Deze hoofdstukken handelen over de fysica.

[7]In hoofdstuk 9, *Les Hypothèses en Physique,* bespreekt Poincaré de rollen van *ervaring* en *generalisatie* (dat is theorievorming, uitgaande van een hypothese). Beide zijn nodig; alleen uitgaande van een hypothese kunnen wij waarnemen.
Het citaat is de laatste alinea van het negende hoofdstuk. Hierin verheldert Poincaré het ontstaan van de mathematische fysica. Er zijn drie manieren om complexe fenomenen uit de ervaring terug te brengen tot elementaire fenomenen (pagina 182): ontleden van de verschijnselen in de tijd, ontleden in de ruimte en ontleden door experimenten. Dank zij homogeniteit en continuïteit, die wij aannemen, kan het resultaat in de vorm van een differentiaalvergelijking weergegeven worden.
Het citaat zegt dan : in de 'sciences naturelles' (natuurwetenschappen) is die homogeniteit, afstandsonafhankelijkheid en eenvoud van elementaire feiten is er vaak niet meer; daarom zijn andere methodes van generalisatie nodig.

[8]Geen letterlijk citaat uit *La Science et l'Hypothèse*, maar qua inhoud wordt het besproken op de pagina's 169 en 178 e.v..

[9]Dialectiek hier niet in de zin van redeneer– en debatteerkunst, maar als kritische denkleer. Daar voldoet *La Valeur de la Science* zeker aan, maar toch ook *La Science et l'Hypothèse.*

[10]Brouwer verwijst hier naar het einde van de eerste paragraaf van hoofdstuk 10, over de betekenis van fysische theorieën. Het laatste gedeelte gaat over de rol van Pricipes (zoals behoud van energie, 'least action' etc.) . Dit zijn geschikte en handzame principes (principes commodes). Er is iets wat constant blijft en dat noemen wij energie. Maar is dat constant blijven absoluut waar? Dat hoeft niet voor altijd te gelden, maar die aanname is voorlopig zeer nuttig, totdat de ongeldigheid blijkt.

[11]De continuïtiet van de tijd is een axioma; zonder dat is differentiëren onmogelijk. Poincaré stelt dit ook als voorwaarde voor de mathematische fysica in hoofdstuk 9: een homogeniteit van de elementaire verschijnselen, om een differentiaalvergelijking op te kunnen stellen.

[12]Dit is de laatste pagina van de laatste paragraaf van het tiende hoofdstuk, *État actuel de la science.* Er worden enerzijds verbanden gevonden, zodat er een eenheid ontstaat, maar anderzijds ook nieuwe verschijnselen, die daar niet in passen. Men zoekt naar eenheid, ondanks nieuwe vertakkingen en afsplitsingen (zoals de fysische chemie).
Brouwers bezwaar tegen deze opvatting wordt verwoord in de laatste regel.

[13]Brouwers opvatting over de fysica en haar wetten, naar aanleiding van Poincaré's ideeën hierover: natuurwetten zijn er omdat wij ze willen, om aldus de natuur te kunnen beheersen. Maar van nature zijn ze niet nodig.

[14]Dankzij deze aannames bestaat volgens Poincaré de mathematische fysica.

[15]Het ordetype ω is het ordetype van de natuurlijke getallen $\mathbf{N}$, het ordetype η is dat van de rationale getallen $\mathbf{Q}$ en het ordetype ϑ is dat van de reële getallen $\mathbf{R}$. Cantor bouwt η op door middel van permanente deling van een lijnstuk; zie ook de dissertatie van Brouwer. Dit is de meest eenvoudige en directe opbouw hiervoor.

[16]Vahlen, *Abstrakte Geometrie,* deel I, Die Grundlagen der Arithmetik. Dit eindigt met 'Vollständigkeit', maar er volgt geen existentiebewijs en systeem van opbouw (bij Poincaré is consistentie voldoende!). Dedekind geeft een opbouwsysteem en Mannoury ook.

[17]Over de Grundlagen M.A. van Hilbert zegt Brouwer: In de Grundlagen M.A. geeft Hilbert een definitie van een vlak als verzameling van 'dingen', die zich op in het eindige gelegen punten van een 'Zahlenebene' laten afbeelden. Nu blijven de gevonden axioma's en dus ook de Sätze gelden bij een topologische afbeelding van die Zahlenebene op een andere Zahlenebene.

[18]Potentiaaltheorie tot onderaan pagina 6.

[19]Logica ligt nooit 'achter', dat wil zeggen voorafgaand aan wiskunde, want logica moet over objecten gaan die eerst in een wiskuindig systeem zijn opgebouwd. Zo is ook psychologie nooit voorafgaand aan filosofie: eerst moet er een mensbeeld zijn opgebouwd in de filosofie.

[20]Een niet-letterlijk citaat. Het hoofdstuk handelt over *Le Calcul des Probabilités,* met als onderparagrafen onder meer de waarschijnlijkheid in de wiskunde, de waarschijnlijkheid in de fysica, 'rood en zwart' (de roulette), de waarschijnijkheid van oorzaken, gevo;gd door nog twee onderparagrafen. De laatstgenoemde paragraaf gaat na hoe wij weten of een verschijnsel als oorzaak A of B heeft. Bij het opstellen van een natuurwet nemen wij n waarnemingen en

trekken een continue curve, dus *in de buurt van de punten.* Dit is het probleem, maar het heeft betekenis omdat wij in die continuïteit geloven. Zonder dat geloof is wetenschap onmogelijk.

[21]Potentiaaltheorie tot bovenaan pagina 10.

[22]Feitelijk is dit natuurlijk waar, maar zo'n losse en korte zin is vrijwel onvindbaar, het wordt op meerdere plaatsen in zijn werk besproken. Waarschijnlijk komt dit uit zijn *Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie* (1893).

[23]Potentiaaltheorie tot en met bladzijde 11.

[24]Zinvol leven en spreken is nooit wiskundig, want exact spreken is nooit uit het leven.
Vanaf hier tot en met pagina 16 volgt een beschouwing over taal en de relatie van taal tot wiskunde, alsmede over algemene filosofische grondslagen van de wiskunde. Deze twaalfde pagina spreekt over oordelen, die geuit worden.

[25]Een oordeel als nastameling van een gedachte: taal als pricipieel ontoereikend ten aanzien van gedachtes; dit geldt zeker swaar het wiskunde betreft. De hoorder wordt niet naar één punt, maar slechts binnen een zeker gebied, dus alleen maar in de buurt van een punt, gebracht.

[26]Voor het begrip G.G.H. zie voetnoot bij IV–20.

[27]Om te bouwen, bijvoorbeeld vlakken in de R_3, moeten de elementen eerst opgbouwd worden. Er zijn van nature geen punten en lijnene en vlakken. Die constructie kan alleen maar inductief en dat sluit in ononderscheidenheid, wat op zijn beurt weer de hoofdstelling van de rekenkunde inhoudt.

[28]Het begin van de opbouw: het fantasiesysteem 1,2,3,..., 'op welke dingen ...', dat wil dus zeggen dat er in de aanvang objecten in het leven zijn om te tellen.
Intuïtief en exact komen de getallen en het continuüm.

[29]Dedekind past bij zijn bewijs van de stelling 'es gibt unendliche Systeme' (Satz 66 uit *Was sind und was sollen die Zahlen*) inductie toe.

[30]'Maatregelen à la Hilbert' (om contradicties te voorkomen) slaat op de Heidelberger-congres lezing uit 1904 *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik,* waar met behulp van vijf principes (pagina 274 e.v., uitgave Festschgrift 1909, Anhang 7) paradoxen voorkomen worden, met name door de principes II en III.

[31]Vanaf hier tot het einde van dit schrift volgt een uitvoerige bespreking van Russells *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897, dissertation 1895). Brouwer gebruikt de Franse vertaling van dit werk uit 1901, *Essai sur les Fondements de la Géométrie.*
§ 51 tot en met 59 bespreekt de opvattingen van Kant met betrekking tot

Ruimte.

[32]Dit slaat waarschijnlijkl op Kants Transzendentale Ästhetik, erster Abschnitt *Von dem Raume', § 2 Metaphysische Erörterung dieses Begriffs* (A 22 e.v.), besproken door Russell. Brouwer stelt: niet over ruimte spreken! Waarom niet? Waarschijnlijk is het te formalistisch, het leven is er dan uit. De ruimte kan slechts intuïtief ervaren worden.

[33]Kant A 24. Hier wordt gesteld, dat Anschauung alleen in Ruimte en Tijd kan. Wat Ruimte is, wordt dan toegelicht onder 2) 'Der Raum ist eine notwendige Vorstellung a priori ... Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, daß kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl *denken* kann, daß keine Gegenstände darin angetroffen werden.

[34]In het tweede hoofdstuk van *Fondements* wordt een kritische beschouwing gegeven van een aantal oudere theorieën over de meetkunde. § 51 t/m 59 behandelt Kants Transcendentale Esthetica, waar Ruimte en Tijd eigenschappen *in ons* zijn, noodzakelijk voor de waarneming.
§ 56 stelt: moderne logica beschouwt elk oordeel als zijnde zowel synthetisch als analytisch (zekere kennis, i.e. de wiskunde en in het bijzonder de geometrie, is volgens Kant zuiver synthetisch, meetkunde is synthetische a priori kennis).
Volgens Russell blijft er slechts a priori over, want een zuiver synthetisch oordeel bestaat niet; a priori is dat, wat verondersteld wordt in de mogelijkheid van ervaring. Volgens Brouwer is deze voorwaarde van Russell niets anders dan een tautologie. Bij Kant was een synthetisch a priori oordeel noodzakelijke voorwaarde voor ervaring.

[35]Brouwers conclusie uit bovenstaand voorbeeld is, dat logica bedrijven zonder eerst een wiskunde op te bouwen leidt tot de grondfout, waar 'alle Russellse onzin vandaan komt'.

[36]De eerste antinomie, zie A 426. Kant wil hiermee aantonen, dat beide bewijzen op foute uitgangspunten berusten, die slechts te vermijden zijn door niet te blijven steken in dogmatisch rationalisme, noch in onkritische 'common sense', maar aan te nemen (volgens Kants kritische filosofie) dat Ruimte en Tijd Anschauungsformen in ons zijn en niet iets objectiefs buiten ons.

[37]Kant stelt zowel:
1) meetkunde is apodictisch, *dus* ruimte is a priori en subjectief, als
2) ruimte is a priori en subjectief *dus* meetkunde is apodictisch.
Punt 1) is volgens Russell onhoudbaar, want de Euclidische meetkunde is sinds de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde niet meer apodictisch.
Verder kan punt 2) aangevallen worden door
a) bekritisering van het scherpe onderscheid tussen synthetische en analytische oordelen, en
b) de eerste twee argumenten uit de de Transcendentale Esthetica betreffende de metafysische deductie van de ruimte te bekritiseren.

§ 56 doet a) en stelt dat elk oordeel zowel een synthetisch als een analytisch facet heeft.
Eigenlijk pas in § 57 komt het a priori ter sprake en Brouwer doelt hier waarschijnlijk op. A priori is dat, wat verondersteld wordt in de mogelijkheid van ervaring.
De punten 1, 2 en 3 uit het bovenstaande slaan weer op de 'gebieden van voorstelling' van V–16, en dan is het duidelijk wat Brouwer bedoelt. Bij 3 is het oordeel alleen zinvol *in* een wiskundig gebouw.

[38]V.w.b. het begrip 'tuimeling', zie de opmerking in de voetnoot bij pag. IV–24.

[39]Riemann beschouwt Ruimte als een puur quantitatief manifold, zonder qualitatieve (volgens Russell fundamentelere) eigenschappen van ruimte mee te nemen. Het maatbegrip is niet primair a priori. Brouwer vindt Russells redenering in §§ 60 t/m 65 maar een warboel.

[40]Grandeur (Eng. magnitude). Volgens Brouwer verstaat Russell daar *uitgestrektheid, afstand* onder, maar dat is fout. Bij Brouwer is Grandeur een punt op de rij 1,2,3, ...
V.w.b. Poincaré's *coupure* discussie: zie *La Valeur de la Science,* hoofdstuk 4, § 1. Dit gaat over de bepaling van de dimensionaliteit van een (fysische) ruimte. Punten zijn een–een af te beelden op een (deelverzameling van de) Zahlenraum, en is dus een ruimte waar elk punt door n getallen wordt weergegeven.

[41]Op de lijn een groep construeren (een schaal, dat moet dus $\mathbf{Q}$ in binair stelsel zijn). Aldus is elk punt te benaderen; dit is volledig uitgewerkt in de dissertatie.
Dit idee van de groep op het eendimensionaal continuüm is te vinden bij Hilberts Grundlagen M.A.
Voor de 'Vahlense wetten': voor die van de geordende groepen zie *Abstrakte Geometrie,* pagina 11 e.v. Hier wordt overigens nog over het geconstrueerde continuüm gesproken.

[42]Zie *La Valeur de la Science,* hoofdstuk IV, pagina 96 e.v. In dit hoofdstuk wordt geen voor alle drie dimensies geldige maat gedefinieerd. Dit vereist dus vrije bewegelijkheid.

[43]Hilberts Grundlagen M.A. geeft de definitie van een vlak als afbeelding van 'Dingen' (punten) in een Zahlenebene, zodat een omgeving van A overgaat in een omgeving van A'.
Daarna wordt de beweging van een vlak in zichzelf gedefinieerd, die continu is, en met behoud van omlooprichting. Deze vormen een groep. Voor de vorming van getallen zie § 30.
Volgens Brouwer is het beter om niet getalsmatig te redeneren, maar topologisch.
(Over Bolyai en Lobatchevski in de doorhaling: zie Anhang III (uit M.A. 57)

van Hilberts Festschrift.)

[44]Voor de Poincaré'se driedimensionale ruimte, zie *La Valeur de la Science,* hoofdstuk IV.

[45]Over het eendimensionale continuüm; dit wordt in de dissertatie uitvoerig uitgewerkt.
– Willekeurig plaatsen van een binaire rationale schaal.
– Een tweede schaal. Met behulp de tussenverhoudingen van een punt ten opzichte van de eerste schaal zijn alle punten van de nieuwe schaal in die van de oude uit te drukken. Dat is het axioma van de Abgeschlossenheit van Hilbert. Zie Grundlagen M.A., axioma III.

[46]Het fysisch continuüm, waar $A = B, B = C, A < C$ altijd mogelijk is (zie *La Science et l'Hypothèse,* pag. 35, zie ook *La Valeur de la Science*). Hieruit geeft Poincaré de 'création du continu mathématique' in twee stappen, door een steeds herhaalde verdeling tot wij een continuüm van de eerste orde krijgen. Hierna volgt de overgang naar het continuüm van de tweede orde.

[47]In een doorhaling: Hilberts tweede meetkunde. Waarschijnlijk is dit die van de Grundlagen M.A. 56, in tegenstelling tot die van het Festschrift. (De Grundlagen M.A. is opgenomen als Anhang IV in de 1909 uitgave van het Festschrift.) Zie de slotopmerking van Grundlagen M.A. op pagina 236 van de 1909 Festschrift uitgave.

[48]Zie bijvoorbeeld de constructie van $\mathbf{Q}$ in de Grundlagen M.A. § 30. Brouwer volgt dit idee, maar in meer algemene zin.

[49]Over het fysisch continuüm. Zie Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* hoofdstuk VI La Mécanique classique.

[50]Van § 66 t/m 73 van Russells *Fondements* wordt Helmholtz' filosofische theorie van de meetkunde besproken, in het rijtje van Kant, Riemann, Helmholtz, Erdmann, Lotze en Delboeuf.
Helmholtz viel Kant aan, maar zijn criterium voor aprioriteit varieert nogal. Hij bewijst dat niet-Euclidische ruimtes voorstelbaar zijn, maar Russell vecht zijn bewijs aan. En zijn these, dat maat af zou hangen van rigide lichamen, op drie manieren op te vatten, is fout, als dat betekent, dat het congruentie axioma het bestaan van rigide lichamen beweert. Het is ook fout als dat betekent dat de noodzakelijke referentie van geometrie aan materie de zuivere meetkunde empirisch zou maken. In de weerlegging van dit tweede punt staat het gegeven citaat: referentie aan materie is nodig om de homogeniteit van de lege ruimte te vernietigen. Om het congruentie axioma (gegeven een lijnstuk AB en een punt A', dan is er een punt B' zodat $AB = A'B'$) te gebruiken, is beweging nodig. Maar ... en dan volgt het citaat.
Russell abstraheert dan van die (inderdaad noodzakelijke) materie, in tegenstelling tot Helmholtz.

[51]Brouwer ziet dit ook als 'danger' (de zonde? de tuimeling?). Toch vecht Russell tegen windmolens. Voor Brouwer is er slechts de intuïtie van het continuüm, maar daarop construeerbaar punten en maat. Verder is er niets.

[52]§ 74 t/m 84 van Russells *Fondements* gaat over Erdmann die, volgens Russell, een belangrijk boek schreef over de filosofie in het werk van Riemann en Helmholtz. Hij beschouwt de axioma's als noodzakelijke stappen in de classificering van Ruimte als een soort manifold. Zijn deductie houdt vier foute (volgens Russell) aannames in, waarvan de derde (§ 79) is: Het begrip 'grootte' is toepasbaar op de ruimte, beschouwd als geheel. Russell vecht dit aan, maar met het verwijt dat Erdmann alleen kwantiteit, en niet kwaliteit van de ruimte beschouwt. Kwantiteit is begrepen in, en is deel van, kwaliteit.
Brouwer vecht Russell weer aan met andere argumenten, zie boven.

[53]§ 64 van *Fondements* behandelt Riemann. Russell verwijt Riemann dat deze geheel kwantitatief werkt, zonder kwalitatieve eigenschappen van de ruimte te bezien. Zijn definitie van manifold is obscuur en zijn definitie van maat is alleen op de ruimte van toepassing.
Brouwer stelt daar tegenover: het intuïtivum van extériorité is iets anders dan de ruimte-intuïtie.

[54]De functie zonder differentiaalquotient. Zie de voetnoot bij I–9, zie Klein, *Vorlesungen über die Nicht–Euklidische Geometrie,* zie ook andere artikelen van Klein uit *Gesammelte Abhandlungen,* cahier 25.
Brouwer ziet een kromme lijn als een continuüm, waarlangs altijd een raaklijn mogelijk is.

[55]Projectieve meetkunde of potentiaaltheorie? Het lijkt dat er gerefereerd wordt aan de stelling van Gauss uit de vectoranalyse.

[56]V.w.b. de aprioroteit van Russell ten behoeve van Brouwers mengmeetkunde, zie hiervoor Russells kritiek op Helmholtz (§ 67) en op Erdmann (§ 83).

[57]Bradley wordt hier door Russell geciteerd in § 89 (in de bespreking van Lotze, § 85 t/m 97). Lotze beziet de mogelijkheid van een niet-Euclidische ruimte als zijnde gesuggereerd door de subjectiviteit van de ruimte, maar verwerpt dit weer door een wiskundige misconceptie (namelijk dat de Euclidische en de niet-Euclidische meetkunde het over dezelfde lijnen hebben), en mist daarmee de betekenis van deze mogelijkheid, die bestaat uit het feit dat deze ruimtes de logische voorwaarden vervullen, waaraan elke vorm van externaliteit moet voldoen.
Daarna volgt het genoemde citaat.

[58]Dit gedeelte handlt over de wiskundige zekerheid van een natuurijk oordeel.

[59]Poincaré geeft een definitie van fosfor van de vorm 'fosfor, dat is die stof daar', daarbij wijzend op fosfor; dus verstandhouding in plaats van waarheid.

[60]Het citaat staat in § 92 van Russells *Fondements,* in het gedeelte, waarin Lotze besproken wordt (§ 85 t/m 97, zie ook het citaat en de voetnoot op pagina 23 van dit schrift). Is de niet-Euclidische ruimte gesuggereerd door de subjectiviteit van de ruimte? Neen, zegt Lotze, maar op grond van een fout wiskundig argument. Hij valt ook de wiskundige procedure van metageometrie aan, maar met een definitie van parallel die een petitio principii is. Maar dan stelt hij: schijnbare afwijkingen van Euclides kunnen fysisch verklaard worden (dat maakt de Euclidische meetkunde in feite empirisch). Maar, stelt Russell dan, dit kan ook omgedraaid worden: een kleine verandering in onze geometrie zou dat ook kunnen verklaren. Het punt volgens Russell is: als een fysische verklaring mogelijk is bij een klein verschil tussen waarneming en meetkunde, dan kan het omgekeerde ook.
Daarna volgt het gegeven citaat: beide kan, zowel de fysica aanpassen als de ruimte niet-Euclidisch beschrijven. Brouwer is het hiermee eens.

[61]Zie Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* alsmede *La Valeur de la Science.* Poincaré bouwt het wiskundig continuüm op in twee stappen (Sc. et Hyp., pag. 35 e.v.). Brouwer stelt: we hadden het intuïtieve continuüm al, en daarop bouwen we het fictieve continuüm met 'alles ertussen'.

[62]In § 94 van *Fondements* bespreekt Russell het bewijs van Lotze, dat de ruimte drie dimensies moet hebben. Russell stelt: Lotze wil *logisch* bewijzen (d.w.z. met behulp van de logica), dat elke vorm van intuïtie, die het hele systeem van geordende relaties van een coëxisterend manifold omvat, drie dimensies *moet* hebben. Men kan, om a priori redenen, bezwaar hebben tegen elke poging van dit soort.
Dan volgt het citaat. Het is het 'behoren tot de intuïtie' versus het 'bepaald zijn door een a priori redenenring'.
De verwijzing naar Grassmann in de tekst van Brouwer refereert, volgens een voetnoot behorend bij het citaat uit de *Fondements …* van Russell, naar Grassmanns *Ausdehnungslehre* uit 1844, 2de druk, pag. XXIII.

[63]De hoofdstrekking wat *metrische meetkunde* betreft; de metrische meetkunde begint bij § 141. Vergeleken met Hilberts *Grundlagen* is het niet zo tegenstrijdig. De meting/afstand onderstelt bij beide uiteindelijk de bewegingsgroep.

[64]De axioma's van de projectieve meetkunde vanaf § 102 van Russell's besproken werk.

[65]§ 95: Lotze valt de niet-Euclidische ruimtes aan op de foute grond dat ze niet homogeen zijn. Sferische en pseudo-sferische ruimtes zouden incompatibel zijn met de inhomogeniteit van de drie dimensies en met de gelijkvormigheid van alle delen van de ruimte. Fout: zulke ruimtes zijn overal absoluut identiek aan zichzelf.
Russell stelt: Lotze heeft niet de moeite genomen de metameetkunde te begrijpen. Dan volgt het citaat.
Meetkunde kan niet ontstaan zonder congruentie axioma.

Brouwer: door beweging van een lichaam op elk gek oppervlak ontstaat een groep van constante kromming.

[66]Delboeuf, § 98 t/m 101. Deze bespreekt nog een bezwaar tegen de metameetkunde: de Euclidische ruimte moet zò zijn, dat gelijkvormigheid mogelijk is, dat wil zeggen vergroting of verkleining in constante verhouding.
Delboeuf stelt dan dat de niet-Euclidische ruimte deze eigenschap niet heeft en daarmee min of meer uit is.
Russells commentaar: de redenering van Delboeuf is fout. Een variatie in *alle* ruimtelijke grootheden is geen verandering (geldt voor Euclidisch en niet-Euclidisch).
Brouwer geeft een nog algemenr argument in deze paragraaf.

[67]§ 100 stelt dat recente Franse onderzoekingen betreffende de grondslagen van de geometrie weinig nieuwe gezichtspunten opleverden.
'§ 100 bij ([2])' slaat op voetnoot nummer twee op die pagina, welke voetnoot ook naar § 133 verwijst.
De betreffende opmerking, waar Brouwer het mee oneens is, luidt:
'... mais Calinon ajoute cette nouvelle hypothèse, que la constante spatiale varie peut-être avec le temps. Cela impliquerait, entre l'espace et les autres choses, une relation causale qui paraît difficilement concevable, et qui, si on la regardait comme possible, ruinerait infailliblement la Géométrie, car la Géométrie repose entièrement sur l'hypothèse que la Causalité n'a rien à y voir.'
Calinon schreef schreef het artikel over *l'Indétermination géométrique dans l'Univers* in de *Revue Philosophique*, t. XXXVI. Ook Poincaré verwijst in zijn *La Valeur de la Science* naar een artikel van Calinon: *(Etude sur les diverses grandeurs, Paris*, Gauthier-Villars, 1897).

[68]Potentiaaltheorie en meetkunde in de volgende paragrafen.

[69]Het monodromie axioma van Helmholtz, zie § 25 IV van Russells *Fondements.* Daar staat:
IV *Touchant l'indépendence de la rotation dans les corps rigides.* (Monodromie): Si $(n-1)$ points d'un corps restent fixes, de telle sorte que chaque autre point ne puisse décrire qu'une courbe determinée, alors cette courbe est fermée.

[70]Hier begint de bespreking van het derde hoofdstuk van Russells *Fondements:* Axioma's van de projectieve meetkunde.

[71]Gaat Euclides wel uit van de cirkel? Zie opmerking § 104, pagina 151, regel 7 v.o. Hij gaat uit van de cirkel bij definiëring van de ' égalité spatiale'.
Brouwer vraagt zich dit kennelijk ook af.

[72]De methode van Klein voor de definitie van getallen in de projectieve meetkunde. Brouwer noemt dit meestal 'Kleins getallengeverij'.
Zie Kleins *Nicht-Euklidische Geometrie I,* 1893 pagina 337. Zie bij Russell, *Fondements* § 113, pagina 162.

[73]Een doorgehaald fragment, over de opbouw van de R_3, zie *Fondements* § 109 e.v.

[74]Dit is niet helemaal een letterlijk citaat, zie § 122.

De Brouweriaanse term 'Hegelen' moet wel slaan op het dialectisch redeneren van Hegel.

[75]Wederom geen letterlijk citaat. Er staat: 'mais ce qui est purement intellectuel ne peut changer sans que ...'
En de projectieve meetkunde is natuurlijk, volgens Russell, *Fondements* § 126, 'purement intellectuelle'. Projectieve meetkunde is dus bepaald door de wetten van ons denken en kan slechts veranderen als die wetten ook veranderen.
Maar, zo vraagt Brouwer zich dan af, hoe kun je dat dan weten?

[76]§ 127: bij elke ervaring is een extériorité nodig. Maar dat hoeft, stelt Brouwer, niet noodzakelijkerwijs de door Russell geporteerde externalité te zijn.

[77]*Kritik der reinen Vernunft,* B 41 (niet in de A-nummering). Dit citaat heeft betrekking op § 126. Kant bespreekt in B 41 de mogelijkheid van meetkunde als synthetische kennis a priori. De 'transzendentale Erörterung des Begriffs vom Raume'.
Russell stelt, met Grassmann, dat meetkunde een tak van toegepaste wiskunde is, want zij behandelt een *gegeven* object. Maar het moet mogelijk zijn een wetenschap te construeren, waarvan het object een constructie van het verstand is, en die toch de ruimte/uitgestrektheid behandelt zoals de meetkunde dat doet. En dan verdwijnt de controverse tussen Kantiaans en anti-Kantiaans: volgens beide hoort geometrie tot de toegepaste wiskunde.
Maar Brouwer verwerpt die redenering van Russell.

[78]§ 125–140, het einde van sectie A (projectieve meetkunde) en van hoofdstuk III; hier wordt het concept van een vorm van externaliteit behandeld. In § 129 wordt gesteld, dat een dergelijke vorm noodzakelijkerwijs relatief is. Russell komt tot het postulaat van de relativiteit van positie voor een dergelijke vorm, dat wil zeggen, de volledige afwezigheid van elk spoor van 'thinghood' (substantialité).
Brouwer stelt de vraag of die abstractie eigenlijk wel kan, en antwoordt in de kantlijn ontkennend.

[79]§ 131 stelt: de relaties die de vorm van exterioriteit bepalen, moeten oneindig deelbaar blijken (bijvoorbeeld de lijn, in het geval van twee punten). Dit is een gevolg van de homogeniteit van de vorm. Brouwer is het hiermee eens. Maar Russell vervolgt dan zijn redenering, die tot de conclusie leidt: de lijn is uit punten opgebouwd en deze punten zijn *reële* punten en met dit laatste is Brouwer het natuurlijk niet eens. Zie ook hier direct onder.

[80]Russell is op zoek naar de elementen van de vorm van exterioriteit. Brouwers standpunt is, dat die vorm continu en oneindig deelbaar is, en is het dus hierin

met Russell eens. Maar, en hier verschilt Brouwer met Russell, die vorm bestaat *niet* uit elementen.

[81]De 'bewegingen' (pagina 178, regel 4–13) zijn projectieve transformaties (de externe relatie tussen A en B, de lijn, blijft gelijk, hoewel de metriek verandert). Dit gaat dus over Mengmeetkunde.

[82]Voor kwantitatieve behandeling is substantialisatie nodig van ruimtelijke relaties. Wat wil dat zeggen? Is het betekenisloos?
'Onzin, getuige de mengmeetkunde', dat wil zeggen die toont dat er zonder substantialisatie over te gaan is naar een metriek.
De laatste zin: deze substantialisatie van relaties toont, dat lijnen en vlakken uit punten bestaan. Volgens Brouwer is dat onzin.

[83]§ 138 bewijst dat twee punten een relatie moeten hebben, onafhankelijk van elke referentie aan andere posities. Dit wordt vereist door de perfecte homogeniteit van de ruimte.
Brouwer: onzin, volgt Russells conclusie uit zijn redenering?

[84]Dit is Brouwers constructivisme: projectieve meetkunde moet uit de vorm van exterioriteit opgebouwd kunnen worden.
Ofwel: er zit nòg iets in de exterioriteit .

[85]Hier eindigt de bespreking van de projectieve meetkunde en begint die van de metrische meetkunde.

[86]§ 141 stelt dat het grondpostulaat van metrische meetkunde gelijk is aan dat van projectieve meetkunde, want het grondpostulaat van de metrische meetkunde moet datgene zijn wat meting, dus vergelijking, mogelijk maakt, i.e. een identiteit van kwaliteit die bekend is, en de bepaling daarvan is juist dat, wat de projectieve meetkunde doet.
Brouwer: dat volgt absoluut niet uit de projectieve meetkunde, dat maat, vrije bewegelijkheid ofwel de homogene groep mogelijk is.

[87]§ 142 noemt de verschillen tussen de projectieve meetkunde en de metrisch meetkunde:
–In plaats van het axioma van de homogeniteit van de ruimte is er het axioma van de vrije bewegelijkheid.
–In plaats van het axioma van de rechte lijn is er het axioma van afstand (dit houdt het axioma van de rechte lijn in!)
–Het principe van dualiteit verdwijnt.
Het is evident dat dit laatste principe in de metrische meetkunde niet geldt, maar Brouwer stelt dat het in de projectieve meetkunde niet a priori en van zelf geldt, maar dat het met verwondering wordt geconstateerd.
Bij Russell is dat niet het geval: zie § 115 en 116, het volgt uit de relativiteit van de ruimte.

[88]De constructivistische opvatting! Er is een ruimte en men bouwt op. Waar

komt die ruimte vandaan? Het is een uitbreiding van het intuïtief gekende lineaire continuüm.

[89]Brouwers kritiek: Russell verdeelt de lijn tussen twee punten naar believen (zie het aangemerkte fragment), maar vraagt zich niet af hoe.
Brouwer verwijst naar de moeite, die Hilbert daarmee heeft: zie *Grundlagen (Festschrift),* bijvoorbeeld § 27, Streckenrechnung.

[90]Dit als kritiek op de 'vermenging' van rekenkunde en meetkunde in § 143.

[91]'Identité des indiscernables' (een term van Leibniz)
Russell behandelt hier uit de metrische meetkunde het axioma van de libre mobilité. Ontkenning van dit axioma zou een actie van de lege ruimte op dingen inhouden.
Maar er zijn nog problemen, die overblijven, met als eerste:
–De vergelijking van volumes en van Kants symmetrische dingen: hoe zijn deze te meten cq te vergelijken? Als twee kubussen van plaats verwisselen, is dat dan te zien? Niet aan hun geometrieën (maten). Hoe past Volume hierin?
Maar de libre mobilité is voor meer te gebruiken.

[92]In verband met de bespreking van Russell is dit een opmerking 'zo maar er tussendoor'. Voor O.G.H. en G.G.H. zie IV–20

[93]Dit gaat over het 'afstandsaxioma', § 162 t/m 179. Russell zegt: In de projectieve meetkunde is de lijn de relatie tussen twee punten, in de metrische meetkunde is dat de afstand. Waar bestaat de 'totale onzin' uit? Tot en met § 167 lijkt het allemaal redelijk; in § 168 t/m 171 probeert Russell sferische meetkunde hier in te verwerken en § 173 t/m 177 lijkt het meest aanvechtbaar.

[94]Zie Russell § 178.

[95]Wat wil Brouwer zeggen? Buiten de geometrie is er ook een extériorité, homogeen, eindig dimensionaal, waar de redenering van de Fondements op van toepassing is.
De geometrische ruimte is dus geen unieke exterioriteit in Russells redenering.

[96]§ 192. Het laatste hoofdstuk gaat over 'filosofische consequenties'. Russell vergelijkt zijn these (axioma's van geometrie, afgeleid uit het concept van 'forme d'extériorité' zijn a priori met betrekking tot onze ervaringsruimte (§ 192 vanaf hier)) met die van Kant. De axioma's bij Russell zijn objectief en niet subjectief, zoals bij Kant. Deze verwaarloost de mogelijkheid van andere vormen van exterioriteit.
Dan volgt het citaat. De onmogelijkheid is een logische contradictie (geen ervaringsgegeven). Dan volgt er: Niet omdat we met behulp van de logica waarneembare gegevens hebben geconstrueerd, maar omdat de logica voor zijn toepassing van de aard van deze gegevens afhangt.
Hier moet Brouwer het toch wel mee eens zijn en hij spreekt dit dan ook niet tegen.

[97]Vanaf § 194 bespreekt Russell drie contradicties, inherent aan de ruimte, en tracht deze op te lossen.
De eerste betreft het punt: delen van de ruimte zijn intuïtief onderscheiden, maar geen enkel concept kan ze onderscheiden. Lijn en vlak zijn opgebouwd uit punten èn zijn relaties tussen punten. Een lijn is oneindig maal deelbaar, met als limiet het punt. Een punt is noodzakelijk ruimtelijk èn het bevat geen enkele ruimte, bevat niets ruimtelijks.
Dit bewijst de relativiteit van ruimte en ook dat geometrie een referentie aan materie moet hebben, met behulp waarvan het betrekking heeft op een ruimtelijke ordening. De aard van de materie doet er hierbij niets toe, is daar volledig van geabstraheerd.
Dan komt de conclusie (het citaat van het eind van § 199), waar Brouwer het mee eens is, maar toch niet met Russells invulling daarvan.
Wat de twee 'tegensystemen' in zijn commentaar zijn, is niet geheel duidelijk.

[98]De tweede tegenspraak: posities zijn slechts door middel van relaties te definiëren, dus door lijn en vlak. Maar lijn en vlak zijn slechts te definiëren met behulp van posities. Zie Brouwers commentaar in de tekst: op het punt worden de relaties toegepast, dat zelf geen relaties meer heeft, dus atoom is. Maar de antinomie zegt dit niet! Het punt laat zich juist definiëren door zijn relaties tot twee lijnen.
Russells oplossing: punten vervangen door materiële (geabstraheerde) atomen. Dan verdwijnt de dualiteit punt–lijn, de lijn wordt de relatie tussen twee atomen en niet omgekeerd.
Dan volgt het citaat § 200: lijn en vlak als ruimtelijke eenheden; punt als resultaat van de poging om in de ruimte de 'ultraruimtelijke term te vinden.
Vergelijk dit met het begin van de antinomie.

[99]De derde antinomie: de ruimte bestaat slechts uit relaties en is toch meer dan dat (§ 201 e.v.). Brouwers kritiek slaat op § 203–205.
Voor Kant zijn ruimte en tijd in ons als categorieën, die waarneming mogelijk maken. De ledige ruimte als subject van geometrie.
Brouwer (mèt Russell): de 'ledige ruimte' is er niet zonder meer.

[100]§ 207: De schijnbare deelbaarheid van ruimtelijke relaties is òf een illusie, geboren uit de lege ruimte, òf de uitdrukking van de mogelijkheid van kwantitatief verschillende ruimtelijke relaties.
Dit handelt nog over de derde antinomie. Het commentaar slaat op pagina 249: nieuwe punten op een lijn die bepaald is door twee 'atomes primitifs' 'cette ligne droite paraît divisée par eux. Mais la relation primitive n'est pas réellement divisée'. Er is alleen maar een tussenrelatie toegevoegd, zodat de twee nieuwe samen de oude vormen (zoals tweemaal in successie de relatie vader–zoon de relatie grootvader–kleinzoon geeft).

[101]§ 209 geeft een conclusie en begint met een korte samenvatting van de hoofdstukken. Het citaat staat in de samenvatting van hoofdstuk I: de richting van de wiskunde, die de onafhankelijkheid van het vijfde postulaat van Euclides

vond, en een meetkunde zonder dit postulaat opbouwde.
De tweede periode daarna had een meer filosofisch doel, een logische analyse van *alle* voor de geometrie essentiële axioma's. Op deze tweede periode slaat het citaat. 'Hilbert' verwijst naar zijn Festschrift.

[102]3 translaties en 3 rotaties.

[103]Volgen nog enkele paragrafen potentiaaltheorie tot het einde van dit vijfde schrift.

[104]Dit slaat mogelijk op de tweede periode, zoals geschetst door Russell in hoofdstuk I: een meer analytische benadering van de eerste periode.

[105]Russell stelt homogeniteit van de ruimte als axioma, als voorwaarde voor ervaring.
Brouwer: neen, er is een libre mobilité, en dat geeft homogeniteit.

[106]Schuh was ten tijde van het schrijven van de schriften privaatdocent te Groningen, later naar Delft gegaan en weer naar Groningen als hoogleraar.
Cardinaal was hoogleraar te Amsterdam.

Chapter 6

Schrift VI

⟨Schoenflies⟩,⟨1⟩ Göttinger Nachrichten 1902⟨2⟩ **VI-i**
Jahresbericht der Deutschen
Math. Ver. Bd 8,2 *(doorgehaald?)* S. 115
W. Killing, Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen
Crelles Jornal 98 (1885).
F. Klein, Math. Annalen 43.
C. Jordan, Cours d'Analyse 2 Aufl. Bd. 1 S 92.
D. Hilbert, Archiv der Mathem. u. Physik 3^e Reihe I (1,2,⟨3,4⟩) 1901.
H. Poincaré, Bulletin de la Société Physique mathém. de Kasan série 2,
h. XIV n^o 1 section I. ⟨zie ook tome X sect. I en II⟩
D. Hilbert, Göttinger Nachrichten 1902 en 1900 (3,4).
R. Dedekind, Abhandl. Göttingen. série 2. Festschrift n^o 2
D. Hilbert, -Annales de l'école normale supérieure, série 3. h.17.
-Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. VIII, 1.
-L'enseignement mathématique VII 12.
(Hierbij Revue de Metaph. Nov. 1905, Jan. 1906)
H. Poincaré, L'enseignement mathématique. VI 1904 p.257-283.
P. Mansion Annales de la société scientifique de Bruxelles. 29 (3,4)
Mathesis 3^e série tome V p.207.

J. Royce, Transactions of the American Math. Society VI (2.3.) p. 353 **VI-ii**
Vivanti-Gutzmer, Eindeutige analytische Functionen (Publications
non-périodiques)
Jourdain, Archiv d. Math. u. Ph. Bd. 10.
Schur, Mathem. Ann. 27 en 55 en 51 en 39.
Padoa, l'Enseignem. Math. 5.
Hilbert, l'Enseignem. Math. 3.

⟨1⟩ *De pagina's VI–i en VI–ii staan op een los vel voorin dit zesde schrift.*

⟨2⟩ ⟦C. Jordan⟧ Göttinger Nachrichten 1902

Francesco, Mathem. Annalen 55.
J. Keyzer, Bull. of the American Math. Soc. h. IX p. 424, 190

VI-1 [Heb ik gevonden de functie[1]

$$V = V_1 - V_2 \left\{ \begin{array}{l} (V_1 - V_2)_1 = (V_1 + V_2 + 2V_3)_1 \\ (V_1 - V_2)_2 = (-V_1 - V_2 - 2V_3)_2 \end{array} \right\}$$

op de hypersfeer $\langle H_n \rangle = f(\alpha) \cos \omega$
(ω van 0 tot 2π, of van 0 naar $+\pi$ en van 0 naar $-\pi$ loopend
α van 0 tot π ,),
dan kan ik die potentiaal beschouwen als te zijn gecomponeerd uit de volgende potentiaal om een enkel agenspunt: $-\int f(\alpha)d\alpha$ $\langle = \vartheta(\alpha) \rangle$

Dus is het veld van twee gelijke en tegengest. agenspunten op eindigen afstand van elkaar, in bipolaire coörd. $\vartheta(\alpha) - \vartheta(\beta)$ of $\vartheta(\alpha_I) - \vartheta(\alpha_{II})$.⟨3⟩

Dus $div.\vartheta(\alpha_I) = div.(V_1) + \zeta$, waarin ζ een divergentiedistributie, onafhankelijk van de ligging van I op de hypersfeer; die aan den anderen kant ten opzichte van elk punt op de hypersfeer geometrisch aequivalent moet liggen; ζ is dus een constante, en $\vartheta(\alpha_I)$ is de functie, die in het punt$_I$ en het tegenpunt daarvan een gelijke positieve divergentie heeft, welke functie wordt gecompenseerd door een over de hypersfeer ⟨homogeen⟩ gedistribueerde negatieve divergentie. De diff. vgl. van ϑ is: $\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin^{n-1}\alpha \frac{d\vartheta}{d\alpha}\right\} = a \sin^{n-1}\alpha$ (a willek. const.), en in de opl. de constante zoo te kiezen, dat voor $\alpha = \frac{1}{2}\pi$: $\frac{d\vartheta}{d\alpha} = 0$

Analoog als we bij $V = V_1 - V_2 = f(\alpha)\cos\omega$ invoeren $\vartheta(\alpha) = -\int f(\alpha)d\alpha$, voeren we bij $V_1\{= F(\alpha)\cos\omega\}$ in: $\eta(\alpha) = -\int F(\alpha)d\alpha$.

Ook van η is de diff. vgl.: $\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin^{n-1}\alpha \frac{d\eta}{d\alpha}\right\} = a \sin^{n-1}\alpha$, maar nu zijn in de opl. de constanten zoo te kiezen, dat voor $\alpha = \pi$: $\frac{d\eta}{d\alpha} = 0$*(?)*

De fictieve (even fictief als de ⟨velden van⟩ stroomelementen van Ampère)‖
VI-2 velden η en ϑ zijn wel te onderscheiden, dan de feitelijke potentiaalvelden η' en ϑ', die komen als de ether samendrukbaar⟨4⟩ – maar toch aan zijn plaats gebonden – is, en in een punt – resp. in twee antipodale punten – wordt een overmaat van fluide ingebracht. Dan zal door samendrukking die overmaat worden gecompenseerd, volgens $div.V = -a^2V$. Voor η' resp. ϑ' geldt dus de diff. vgl. *)

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{\sin^{n-1}\alpha \frac{d\vartheta'}{d\alpha}\right\} = a^2\vartheta' \sin^{n-1}\alpha \qquad (1)$$

en analoog voor η'.

*) *(bovenaan blz:)* ⟨Deze is te herleiden tot $a^2x\frac{V}{(1+x^2)^2} + \frac{dV}{dx} + x\frac{d^2V}{dx^2} = 0$. En de coëfficienten van deze lineaire vgl. zijn de afgeleiden van die van de in het vorige cahier behandelde. (ter oplossing van de functie van r, die met $\cos\omega$

⟨3⟩in bipolaire coörd. ⟦$f(\alpha) - f(\beta)$⟧

⟨4⟩die komen als ⟦het medium⟧ de ether samendrukbaar moet worden verm., om aan de vgl. van Laplace te voldoen⟩

? Deze hypothese van samendrukbaarheid doet voor de beschouwde gevallen, dat toch de algebraische som der divergenties 0 is, niets aan de uitkomst af (want een aan voorwaarden gebonden potentiaal, die een minimum van energie moet geven, voert als het niet noodig is, op zijn vrij gebied geen divergenties in.) Maar aan de diff. vgl. (1) hebben we onder die hypothese niets, want daar geldt niet meer de additiviteit van twee velden. We kunnen overigens zoo'n veld $div.V = a^2 V$ nader bekijken.

$$Energie = \underset{\text{(door band aan plaats)}}{\int d\tau \left[\left(\tfrac{dV}{dx}\right)^2 \right]} \quad + \quad \underset{\text{(door samendr. in zichzelf)}}{\int d\tau . V . div . V}$$

Voor het geheele probleem zou men nu ook achteraf kunnen zijn uitgegaan van de diff. vgl. vaar ϑ en η. **VI-3**

Men behoeft er slechts $\frac{d\vartheta}{d\alpha}$ resp. $\frac{d\eta}{d\alpha}$ uit op te lossen, want daarmee is het dubbelpunt al bekend, en daaruit zijn allen reëel voorkomende gevallen te integreeren.

Neem weer eerst voor H_{2n+1}.

$$\frac{d\vartheta}{d\alpha} = \frac{1}{\sin^{2n}\alpha}\left\{ a\int_0^\alpha \sin^{2n}\varphi d\varphi + b \right\} = \frac{1}{\sin^{2n}\alpha}\left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n}\varphi d\varphi - \int_0^\alpha \sin^{2n}\varphi d\varphi \right\}$$

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{1}{\sin^{2n}\alpha}\left\{ \int_0^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi - \int_0^\alpha \sin^{2n}\varphi d\varphi \right\} = \frac{1}{\sin^{2n}\alpha}\int_\alpha^\pi \sin^{2n}\varphi d\varphi$$

$$\cos^{2n}\beta . 2n . \frac{d\vartheta}{d\alpha} = \frac{3\cdots(2n-1)}{2\cdots(2n-2)}\beta + \sin\beta \left\{ \cos^{2n-1}\beta + \frac{2n-1}{2n-2}\cos^{2n-3}\beta \right.$$

$$\left. + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)(2n-4)}\cos^{n-5(\textit{moet zijn:}2n-5?)}\beta + \cdots \frac{(2n-1)\cdots 3}{(2n-2)\cdots 2}\cos\beta \right\}$$

$$\cos^{2n}\beta \frac{2.4.\cdots(2n-2).2n}{1.3.\cdots(2n-1)} . \frac{d\vartheta}{d\alpha} = \beta + \sin\beta \left\{ \cos\beta + \frac{2}{3}\cos^3\beta + \cdots \right.$$

$$\left. \frac{2.4\cdots(2n-2)}{3.5\cdots(2n-1)}\cos^{2n-1}\beta \right\},$$

hetgeen overeenstemt met den vroeger gevonden factor van $\cos\omega$ voor de dubbelpuntspotentiaal.

Voor een oneindig aantal afmetingen is $\int_\alpha^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi}{\sin^{2n}\alpha} d\varphi = f(\alpha)$ niet alleen oneindig, maar ook is $\frac{f(\alpha_2)}{f(\alpha_1)}$ oneindig voor $\alpha_2 > \alpha_1$.

Er is dus niets van een veld te bespeuren. Krachtwerking breidt zich slechts uit ten gevolge van de beperktheid van het aantal afmetingen.

. . . .

Heb ik in een R_n: twee-vectoren [d.i. dus ook $(n-2)$-vectoren] gedistribueerd, dan kan ik in elk punt zetten:

1^e een $\begin{pmatrix} 3 \\ n-3 \end{pmatrix}$-vector met componenten

$\frac{\partial_2 X_3}{\partial x_1} + \frac{\partial_3 X_1}{\partial x_2} + \frac{\partial_1 X_2}{\partial x_3} = Y_{123}$,

⟨(dit voldoet aan $\frac{\partial Y_{123}}{\partial x_4} + \frac{\partial Y_{214}}{\partial x_3} + \frac{\partial Y_{134}}{\partial x_2} + \frac{\partial Y_{234}}{\partial x_1} = 0$)⟩

VI-4 2^e een $\| \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$-vector met componenten: $Z_1 = \frac{\partial_1 X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial_1 X_3}{\partial x_3} + \cdots \frac{\partial_1 X_n}{\partial x_n}$

(toevoeging bovenaan blz.:) ⟨${}_1X_2$ was hier eigenlijk te schrijven $X_{1\ldots n}$⟩

⟨Van dezen vector zien we dat de *div.* = 0 is, en dat hij verder niet beperkt is⟩

(Andere analoge vector-bepalingen zijn niet mogelijk, immers de richting van differentieering moet eenduidig zijn toegevoegd aan de indices van ${}_1X_2$, dat is 12 of $3\ldots n$; en nu is alleen in R_3 een richting toegevoegd aan den 2-vector en in R_{n-1} aan den $(n-2)$-vector.

⟨De⟩ 2-vector ⟨heeft over⟩ een willekeurige gesloten kromme ⟨2-ruimte⟩ met 2-indicatrix een integraal,⟨5⟩ die gelijk is aan de integraal van Y over een willekeurige 3-ruimte daardoor.

De $(n-2)$-vector heeft over een willekeurige gesloten kromme $(n-2)$-ruimte met $(n-2)$-indicatrix een integraal, die gelijk is aan de integraal van Z ⟨als $(n-1)$-vector⟩ over een willekeurige $(n-1)$-ruimte daardoor.

In de componenten der Y's treden op de diff. quot., waar de index v.d. noemer *niet* in den teller voorkomt; in die der Z's juist de overschietende.

(volgt een 2-regelige onleesbare doorhaling)

. . . .

Is een distributie mogelijk, waarbij Y en Z zonder uitzondering wegvallen? Zoo niet, dan is ook de kwestie onder aan de volgende pagina opgelost.

. . . .

Voor een 1-vector is direct duidelijk, dat niet allebei zijn afgeleiden kunnen wegvallen; voor een 2-vector is het niet zoo direct duidelijk.

. . . .

VI-5 Omgekeerd kunnen we ⟨met een⟩⟨6⟩ 1-vector een 2-vector afleiden ⟨waarvoor Y wegvalt⟩ . Is nu die 1-vector bepaald door zijn *div.* en de Z van zijn 2-vector? (wat het aantal gegevens betreft, komt dit uit; want de Z is enkelvoudig beperkt door de voorwaarde, dat haar *div.* = 0 moet zijn)]

⟨5⟩ ⟦Uit deze⟧ 2-vector ⟦kan ik⟧ een willekeurige gesloten kromme ⟦opbouwen⟧ met 2-indicatrix een integraal,

⟨6⟩ i.p.v. een onleesbare doorhaling

[Deze pot. theorie ⟨is onafh. van⟩ singulariteiten,⟨7⟩ is dus zuivere meetkunde, onafhankelijk van de arithmetik, haar afbeeldingen en de daarbij optredende singulariteiten. ⟨Ze geldt ook voor niet-continue en niet-differentieerbare velden⟩

(Is in 5 afm. b.v. nu geen algebra mogelijk met imag. eenheden i, j, k, l, m zóó, dat $i.j.k. = l.m$ enz.; $i.j.k.l = m$, $i.j.k.l.m = -1$. Verder zijn er allemaal versch. eenheden: $i.j$; jk; lj. enz. lmk enz.)

. . . .

Ook in R_n moet in⟨8⟩ lijnvectordistrib. bepaald zijn door haar *div.* en de planaire distrib. harer rotatie. (Immers was hij daardoor niet bepaald, dan bestond een verschildistrib. zonder *div.* of integraal langs gesloten krommen, en dat is onmogelijk.

Neem nu als eenheid alleen rotatiedistr. ⟨in de punten⟩ van een oneindig klein ⟨geïndicatriceerd⟩ bolletje⟨9⟩ H_{n-2} in een H_{n-1} in den oorsprong. Het is dan bepaald door de loodlijn op die H_{n-1}. En de rotatiedistr. ⟨is alleen in de punten van den bol, en gericht volgens⟩ het volkomen loodrechte normale vlak op het boloppervlak.

Het is nu nog alleen maar de vraag, of de algemeenste rotatiedistr. als P_{n-2}-vector zoo over zulke bolletjes is te verdeeelen, of in 't algemeen homogeen over een R_{n-2}–⟨elementair-gesloten⟩ oppervlak is te verdeelen.

Noem ∇ die geheimzinnige operatie, die uit een V_1 afleidt een V_0 en een V_2; **VI-6**
uit een V_2 een V_1 en een V_3 enz. Voor een V_2 zonder V_3 is $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \langle + \frac{d^2}{dt^2} + \ldots \rangle$, Voor een V_1 zonder V_0 is evenzoo: $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{du^2} + \ldots$

. . . .

Het is waar, dat een lijn zonder *div.* kan worden beschouwd als Z van een vlak. Is het ook waar, dat een vlak zonder Y kan worden beschouwd als *rot.* van een lijn?

. . . .

Heeft de V_2 wel een V_3 dan blijkt dat de ∇ ⟨van de V_1⟩ $= \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots -$ de V_2 van de V_3.

Dus als $\nabla V_2 = \{V_1 + V_3\}$ van V_2, dan $\nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \ldots$ ⟨voor een willek. V_2⟩

⟨7⟩ Deze pot. theorie ⟦kent geen⟧ singulariteiten,

⟨8⟩ *moet waarschijnlijk zijn:* een

⟨9⟩ ⟦Zoek nu⟧ Neem nu als eenheid ⟦voor vector met⟧ alleen rotatiedistr.⟦⟨als rotastiedistr⟩ de elementjes ⟨in de punten⟩ van een oneindig klein ⟨geïndicatriceerd⟩ bolletje

. . . .

Willen we in 3 afm. *rot.* (d.i. integr. langs gesloten kromme van een lijnvectordistr. alleen aanbrengen op enkele bijzondere punten (om elementairvelden te vormen), dan moeten we minstens nemen een gesloten krommen lijn (anders *) zou⟨den⟩ er⟨10⟩ oppervlakken van 2 afm. zijn, waarvoor de integraal niet 0 was). Analoog in n afmetingen moeten we minstens aannemen een gesloten ruimte van $n - 2$ afm.

*) *(kantl.:)* ⟨d.w.z. als de kromme een lacune had⟩

VI-7 (En in 2 afm. moeten we minstens twee verschillende punten aannemen)

De planivector moet dan loodrecht op dat oppervlak gericht zijn (want anders zou voor een kringstroom óp het oppervlak een oneindige integraal komen.), en constant van sterkte. (dit weer om de integraal over willekeirig gesloten oppervlak 0 te maken.)

. . . .

Een p-vector is voor een deel afgeleid van een $(p-1)$-vector, hetgeen wordt uitgedrukt door een andere $(p-1)$-vector, voor een ander deel determineert hij een $(p+1)$-vector [en wel zoo een, die geen $(p+2)$-vector determineert].

. . . .

Hilbert bouwt in zijn Festschrift niet op, maar bewijst feitelijk ook een uniciteit van een groep.⟨11⟩[2]

. . . .

(Lord Kelvin 1905) 'Een gewone Helmholtz'sche wervelring bevindt zich in labiel evenwicht.

. . . .

Het *invoeren* van ⟨nieuwe⟩ getallen (en elke vervolkomening van het rekenmechanisme),⟨12⟩ is een jodenstreek.

. . . .

VI-8 [Een willekeurig mechanisme ⟨onder gegeven krachten⟩ is te beschouwen als een vectordistributie ⟨liever te schrijven niet als V_1, maar als $F = V_1 \frac{du_1}{ds}$, de

---

⟨10⟩(anders zou ⟦uit de integraal⟧

⟨11⟩Hilbert bouwt in zijn Festschrift niet op, maar ⟦laat axioma's uit de lucht vallen, die dan verwonderd worden aangestaard.⟧

⟨12⟩(⟦een⟧ vervolkomening van het rekenmechanisme) arbeidscoëff. bij u_1⟩, over een oppervlak van willekeurige kromming: levende kracht = boogelement in 't kwadraat.

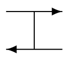
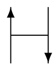
. . . .

Neem bij een willekeurige ⟨ruimte of opp. waarin de vectordistr. wordt beschouwd⟩[13] van den rotatievector het elementairveld (d.i. het ⟨uit een enkele vector⟩ op dezelfde wijze afgeleide veld,[14] als de potentiaal uit een enkele divergentie. Kunnen we dat veld dan als vectorpotentiaal beschouwen?

(kantlijn:) ⟨Daar we als *div.* element altijd een elem. magneet nemen, moeten we hier ook steeds uitgaan van twee gelijke en tegengest. rotatievectoren, op eenigen afstand van elkaar gelegen⟩

Het veld van een elementair-rotatiering is ⟨voor een homogene ruimte⟩ gelijk aan het veld van een elementair-magneet?

In elk geval kunnen we den elementair-rotatiering vervangen door

 en 

, wat betreft de vorming van het elementairveld er uit. We hebben dus maar na te gaan, of het daaruit gevormde veld werkelijk kan worden beschouwd (voor de elliptische ruimte) als vectorpotentiaal van de magn. inductie bij een elementairmagneet.

(kantlijn:) ⟨Niet in orde⟩

Zij het elementairmagneetveld: $y = f(r)$. *(deels in de kantlijn:)* Dan wordt de vermeen⟨de vectorpot. $X = -yf(r)$ en $Y = xf(r)$⟩; de rotatie daarvan:[15]

$$Z = -2f(r) - \tfrac{(x^2+y^2)}{r} f'(r)$$
$$X = \tfrac{xz}{r} f'(r)$$
$$Y = \tfrac{yz}{r} f'(r)$$

Terwijl het veld van een elem. magneet volgens ∥ de Z-as is: **VI-9**

$$Z = f(r) + \tfrac{z^2}{r} f'(r)$$
$$X = \tfrac{xz}{r} f'(r)$$
$$Y = \tfrac{yz}{r} f'(r)$$

---

[13] I.p.v. onleesbare doorhaling

[14] (d.i. het ⟦daaruit⟧ op dezelfde wijze afgeleide veld,

[15] Dan wordt de vermeende ⟦vectorpotentiaal⟧

De voorwaarde dat de stelling opgaat is dus:

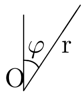
$$\begin{aligned}&f(r) + \tfrac{z^2}{r} f'(r) = -2f(r) - \tfrac{(x^2+y^2)}{r} f'(r) - 3f(r) = r f'(r)\\ &f(r) = \tfrac{1}{r^3}\end{aligned}\quad .$$

De stelling gaat dus *alleen* op voor de gewone Euclidische ruimte.

(kantlijn:) ⟨Niet in orde⟩

. . . .

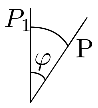
In de gewone ruimte is de kracht door een stroomelement, gelijk gedistribueerd, als de vectorpot. door een elementairmagneet, n.l. beide volgens $\frac{\sin\varphi}{r^2}$



. . . .

Om in een ellipt. ruimte een vectorpot. te vinden, hebben we slechts de geconjugeerde functie *) van de gewone potentiaal te zoeken, en die te deelen door een factor, evenredig met het omwentelings-boogelement. (want vermenigvuldigd met dat boogelement geeft de vectorpot. eerst de geconjugeerde functie in het meridiaanvlak, d.w.z. de krachtstroom door de meridiaan zones.)

*) *(kantlijn:)* ⟨d.w.z. de krachtstroom door een zone, die ontstaat door een kleine wenteling van P_1P.



⟩

. . . .

VI-10 De bedoeling is nu nog:

a) Te vinden voor het elementairmagneetveld in ell. ruimte een vectorpotentiaal (zie vorige pagina voor de manier)

b) Te vinden het veld van een stroomelement, uit een scalarpotentiaal ⟨zie pag. 10,⟩ daaruit de kracht.⟨16⟩ Verder uit a) de kracht uit den vectorpotentiaal; de beide krachten zullen verschillend zijn. Het verschil van die twee krachten wordt een distributie, die langs een gesloten kromme telkens 0 geeft.⟨17⟩

Om voor die laatste kwestie voorbereid te zijn, zullen we haar eerst voor de Eucl. ruimte behandelen.

⟨16⟩ *tussen veel onleesbare doorhalingen*

⟨17⟩ Het verschil van die twee krachten wordt een distributie, die langs een gesloten kromme telkens 0 geeft. ⟦De reactiekracht van dat verschil moet dus solenoidaal zijn.⟧

. . . .

Hoe vinden we overigens in de Eucl. ruimte de kracht van een stroomelement uit die van een stroom? Wel, die kracht ⟨van een gesloten stroom in een bep. richting⟩ is de potentiaalval ⟨in die richting⟩ , is de *(onleesb. doorh.)* pot. van een ⟨zoo gerichte⟩ elem. magneet, is *(zelfde onleesb. doorh.)* de pot. van de gesloten stroom in het veld van een elem. magneet.

Dus de kracht door een stroomelement in een bepaalde ∥ richting, is de pot. **VI-11**
van het stroomelement door een dubbelpunt volgens die richting, is de ontbondene van de vectorpot., teweeggebracht door het dubbelpunt, in de richting van het stroomelement. En die is, als

φ de hoek van stroomelem. en verbindingslijn

ψ. . . . . elem. magneet . . . .

κ . . . . tusschen vlak $\left\{\begin{array}{c} \textit{stroomelem.} \\ \textit{verbindingsl.} \end{array}\right\}$ en vlak $\left\{\begin{array}{c} \textit{elem. magn.} \\ \textit{verbindingsl.} \end{array}\right\}$

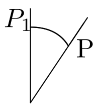
$$\frac{\sin\varphi\sin\psi\sin\kappa}{r^2}$$

(= $\frac{1}{r^2}\times$ volumeprod. van verbindingslijn en elem. magneet en stroomelement)

(kantlijn, slaande op de volgende paragraaf:) ⟨hiertoe eerst nog te bewijzen, dat de energie van een veld 2 in een veld 1 = $\int V_1 dq_2$. Dit met behulp van het theorema v. Green)⟩

Het vraagstuk van de kracht door een stroomelement in de ell. ruimte zal dus ook zijn opgelost, als we hebben gevonden de vectorpotentiaal van een elementairmagneet in de ell. ruimte.

Zoeken we dus de geconjugeerde functie van de pot. van het dubbelpunt,



d.i. voor een punt P de totale krachtstroom door ⟨de zone bij⟩ den cirkelboog P_1P.

Die krachtstroom, gedeeld door het wentelingsboogelementje in P moet de vectorpotentiaal geven.

. . . .

Hoe kunnen we een scalarpotentiaal vinden bij een stroomelement in de **VI-12**
Euclidische ruimte.

We zeggen dan: de potentiaal in den oorsprong door een gesloten stroom is de krachtstroom van

$$A = \frac{x}{r^3}_x + \frac{y}{r^3}_y + \frac{z}{r^3}_z \text{ door die stroom}$$

De potentiaal in den oorsprong door een stroomelement is dus de ⟨absolute waarde van⟩ vectorpot. van $A \times \cos$(vectorpot. van A, stroomelement)

We vinden bij het zoeken van die vectorpot. (zie aanteekenpapier in Maxw. II)

$$\xi = \frac{z^2 - y^2}{r^5} \qquad \eta = \frac{x^2 - z^2}{r^5} \qquad \zeta = \frac{y^2 - x^2}{r^5}$$

$$\int \xi dy = y\frac{3z^2(x^2+z^2) + y^2(z^2-x^2)}{3r^3(z^2+x^2)^2} \qquad \int \xi dz = -z\frac{3y^2(x^2+y^2) + z^2(y^2-x^2)}{3r^3(y^2+x^2)^2}$$

$$\int \eta dz = z\frac{3x^2(y^2+x^2) + z^2(x^2-y^2)}{3r^3(x^2+y^2)^2} \qquad \int \eta dx = -x\frac{3z^2(y^2+z^2) + x^2(z^2-y^2)}{3r^3(z^2+y^2)^2}$$

$$\int \zeta dx = x\frac{3y^2(z^2+y^2) + x^2(y^2-z^2)}{3r^3(y^2+z^2)^2} \qquad \int \zeta dy = -y\frac{3x^2(z^2+x^2) + y^2(x^2-z^2)}{3r^3(x^2+z^2)^2}$$

$$\text{Nu is H} = \int \zeta dxdy = \int dy \int \zeta dx = \int dy \left\{ \frac{xy^2}{r^3(y^2+z^2)} + \frac{x^3y^2}{3r^3(y^2+z^2)^2} - \frac{x^3z^2}{3r^3(y^2+z^2)^2} \right\}$$

Hierin is voor part. integr. te nemen:

$$\frac{-2ydy}{(y^2+z^2)^2} = d\frac{1}{y^2+z^2} \qquad en: \frac{x^2}{r^3(y^2+z^2)^2} = \frac{1}{r(y^2+z^2)^2} - \frac{1}{r^3(y^2+z^2)}$$

De uitkomst $\frac{x}{3}\left\{\int \frac{dy}{r^3} - \frac{y}{r(y^2+z^2)}\right\}$ schijnt fout.

VI-13 *Tot het vinden van de vectorpotentiaal*:

Vectorstroom door zone

$$\int \frac{2\cos\varphi(1+\beta\mathrm{tg}\beta)}{\cos^2\beta}.\cos\beta d\varphi.\cos\beta\sin\varphi_z = \sin^2\varphi.(1+\beta\mathrm{tg}\beta)$$

Vectorpotentiaal is: *dit*, gedeeld door $\cos\beta\sin\varphi$ of

$$\sin\varphi \times \frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}$$

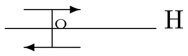
Dus ook:⟨18⟩ kracht van een stroomelement ⟨in een bepaalde richting⟩

$$\sin\varphi\sin\psi\sin\kappa \times \frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}$$

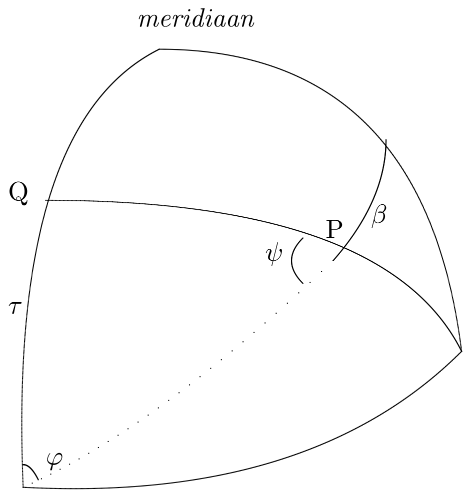
Bij wijze van proef zullen we hieruit integreeren de kracht door een gesloten stroom in oorsprong $\perp$ de wentelingsas uitgeoefend in punt $P(\beta,\varphi)$ in de β-richting en in de φ-richting. We hebben daartoe te sommeeren:

⟨18⟩ ⟦In 't algemeen dus⟧ Dus ook

a) De kracht van



De meridiaan, waarin P ligt, gaat door OH $\langle\perp$ vl. v. tek.$\rangle$. Beide stroomelementen geven een kracht: $\cos\varphi\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}$



De resultante is in 't meridiaanvlak $\perp$ QP naar beneden gericht, en

$$=\cos\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}.\frac{1}{\sin\tau}.$$

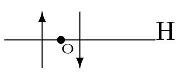
Dus ontbondene in β-*richting*:

$$-\frac{\sin\psi}{\sin\tau}.\cos\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}=-\cos\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos^2\beta}$$

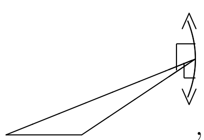
Ontbondene in φ-*richting*:

$$\frac{\cos\psi}{\sin\tau}.\cos\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}=\sin\beta\sin\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos^2\beta}$$

b) De kracht van



In het meridiaanvlak komen twee krachten:



, die door hun verschil geven de volgende *ontbondene in de φ-richting*:

$$-\sin\varphi.\frac{d}{d\beta}\left\{\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\right\} = -\sin\varphi\frac{2\sin\beta\cos\beta+\beta(1+\sin^2\beta)}{\cos^3\beta}$$

en die door hun hoek geven de volgende *ontbondene in de β-richting*

$$-\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha}\left\{\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}\right\} = -\cos\varphi.\frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos^2\beta}.$$

VI-14 De totale ontb. in de β-richting: $-2\cos\varphi\frac{1+\beta tg\beta}{\cos^2\beta}$

totale ontb. in de φ-richting: $-\sin\varphi\frac{\beta+\sin\beta\cos\beta}{\cos^3\beta}$

En dit is juist de kracht van een dubbelpunt⟨19⟩ in den oorsprong volgens de wentelingsas.

(Maar het teeken van de vectorpot. hadden we anders moeten nemen; daarop te letten bij de afleiding vam 3 en 4 pag. vroeger.

....

Bewijs der stelling van lijnintegraal en oppervl. integraal voor een willekeurig gekromde ruimte.

Zij $ds^2 = A^2du^2 + B^2dv^2 + C^2dw^2$ *)

*) *(kantlijn:)* ⟨Kan elk boogelement wel in dien vorm geschreven worden? Een van const. kromming in elk geval wel⟩

En zijn de coörd. op het oppervl. α en β, en zij de vectordistr. volgens u; v; en w: X, Y en Z.

Projecties van par. $d\alpha$ en $d\beta$ op de coörd. vlakken hebben de inhouden:

$$\left(\frac{Bdv}{d\alpha}.\frac{Cdw}{d\beta} - \frac{Bdv}{d\beta}.\frac{Cdw}{d\alpha}\right)d\beta d\alpha, \qquad \text{enz.}$$

Reken nu uit de oppervlakte-integraal van:

$$\frac{1}{BC}\left\{\frac{d(YB)}{dw} - \frac{d(ZC)}{dv}\right\}_u \qquad + \text{ analoog langs andere richtingen;}$$

Dit geeft:

$$\int\left(\frac{dv}{d\alpha}.\frac{dw}{d\beta} - \frac{dv}{d\beta}.\frac{dw}{d\alpha}\right).\left\{\frac{d(YB)}{dw} - \frac{d(ZC)}{dv}\right\}d\beta d\alpha \quad + \text{ twee analoge termen.}$$

⟨19⟩ En dit is juist ⟦het veld van⟧ de kracht van een dubbelpunt

Nemen we samen de termen met ZC:

$$-\frac{d(ZC)}{dv}\left\{\frac{dv}{d\alpha}.\frac{dw}{d\beta}-\frac{dv}{d\beta}.\frac{dw}{d\alpha}\right\}+\frac{d(ZC)}{du}.\left\{\frac{dw}{d\alpha}.\frac{du}{d\beta}-\frac{dw}{d\beta}.\frac{du}{d\alpha}\right\}$$

$$-\frac{d(ZC)}{dw}.\frac{dw}{d\alpha}.\frac{dw}{d\beta}+\frac{d(ZC)}{dw}.\frac{dw}{d\alpha}.\frac{dw}{d\beta}$$

Dit geeft

$$\int d\beta d\alpha\left\{\frac{d(ZC)}{d\beta}.\frac{dw}{d\alpha}-\frac{d(ZC)}{d\alpha}.\frac{dw}{d\beta}\right\}$$

Integreer de eerste term partieel naar β, de tweede naar α, dan vernietigen[20] **VI-15**
de supplementaire dubbelintegralen elkaar, en er blijft de lijnintegraal $\int ZCdw$ langs den omtrek.

....

Vectorpot. van elem. magneet voor ellipt. R_{2n+1}
Stel het zone-element van $n-2$ afmetingen $\varepsilon.\sin^{2n-1}\alpha\sin^{2n-1}\varphi$
Kracht in β-richting:

$$\left\{\text{uitpotentiaal: }\cos\varphi.\frac{1}{\sin^{2n}\alpha}.\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\varphi d\varphi\right\}$$

$$\cos\varphi\left\{1+\frac{2n\cot\alpha}{\sin^{2n}\alpha}\int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\varphi d\varphi\right\}=\cos\varphi\times F(\alpha)$$

Geconjugeerde functie:[21]

$$\int_0^\varphi\cos\varphi F(\alpha).\varepsilon\sin^{2n-1}\alpha\sin^{2n-1}\varphi.\sin\alpha d\varphi=$$

$$=\varepsilon\sin^{2n}\alpha F(\alpha)\int_0^\varphi\sin^{2n-1}\varphi\cos\varphi d\varphi=\frac{\varepsilon}{2n}\sin^{2n}\alpha.F(\alpha).\sin^{2n}\varphi$$

Vectorpotentiaal: $\frac{F(\alpha)}{2n}.\sin\alpha\sin\varphi$.

Zoodat ook hier weer de kracht door een stroomelement kan worden voorgesteld door een volumeproduct.

....

Vectorpot. voor Eucl. R_n. Zoneëlement: $\varepsilon r^{n-2}\sin^{n-2}\varphi$.

---

[20] dan ⟦komt de lijnintegraal⟧

[21] ⟦Krachtstroom door zone: $\int_0^\varphi$⟧ Geconjugeerde functie:

(kantlijn:) ⟨ongelet de constante factor⟩

Kracht in r-richting: (uitpot.: $\cos\varphi . r^{-(n-1)}$) $\cos\varphi . r^{-n}$

$$\text{Geconj. functie: } \int_0^\varphi \cos\varphi . r^{-n} . \varepsilon r^{n-2} \sin^{n-2}\varphi . r d\varphi =$$

$$= \frac{\varepsilon}{r}\int_0^\varphi \sin^{n-2}\varphi \cos\varphi d\varphi = \frac{\varepsilon}{r}\sin^{n-1}\varphi. \quad \text{Vectorpot.: } \frac{1}{r^{n-1}} . \sin\varphi.$$

(Weer een volumeproduct.)

. . . .

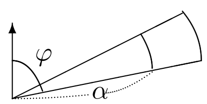
VI-16 De distributie in Eucl. R_3 voor vectorpot. van stroomelement $= \frac{stroomelement}{r}$ is een der distributies, die de juiste distributie voor een gesloten stroom geven; maar er zijn ook andere mogelijk.⟨zie Maxwell II pag. 256⟩

. . . .

Zij ∇ de operatie, die ⟨uit⟩ 0-vect. maakt 1-vect. of uit 1-vect. 0-vect.
Zij Ω de operatie, die uit 1-vect. maakt 2-vect. of uit 2-vect. 1-vect.
Dan is voor Eucl. ruimte: $\Omega^2$1-vect. = $\nabla^2$1-vect.
Hierin wordt verstaan onder $\nabla(ai+bj+ck)$: $i\nabla a + j\nabla b + k\nabla c$
Deze stelling kan voor een niet-Eucl. ruimte geen zin hebben, omdat we de operatie ∇, die op een scalar hoort te worden toegepast, hier niet kunnen uitbreiden tot toepassing op een vector.

. . . .

Voor ellipt. R_3: Te vinden een vector V, alleen afh. van β (niet van φ), en gericht volgens de getransporteerde oorsprongsrichting (d.w.z. in mer. vlak denzelfden hoek makend met voerstraal, als de elementrichting in oorspr.), die kan fungeeren als vectorpot. van stroomelement.



$$\text{Dan moet: } \underbrace{\sin\varphi \times \frac{1+\beta\,\text{tg}\beta}{\cos\beta}}_{Krachtv.stroomelem.} \times \underbrace{\sin\alpha d\alpha d\varphi}_{oppervl.elem.} =$$

=lijnintegraal v. vectorpot. om oppervl. elem. =

$$= \frac{d}{d\varphi}\{V\cos\varphi . d\alpha\}\, d\varphi + \frac{d}{d\alpha}\{V\sin\varphi\sin\alpha d\varphi\}\, d\alpha.$$

Dus diff. vgl. in V als functie van α:

$$-V + \frac{d}{d\alpha}\{V\sin\alpha\} = 1 + \beta\,\mathrm{tg}\beta. \qquad \text{Stel } V = \frac{y}{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}$$

Dan: $2tg\frac{1}{2}\alpha.\,\frac{dy}{d\alpha} = 1 + \beta\mathrm{tg}\beta = 1 + \frac{\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = 1 + \frac{\beta}{2}.\,\frac{(1-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}\alpha)}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha}.$ **VI-17**

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha.\,\frac{dy}{d(\frac{1}{2}\alpha)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}\beta}{\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2}\beta.\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha$$

$\dfrac{dy}{d(\frac{1}{2}\alpha)} = \cot\dfrac{1}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta\cot^2\dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{1}{2}\beta,$ hieruit na uitdrukking van β door α:

$$y = \left\{-\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right\}\left\{\cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right\}$$

$$y = -\frac{1}{2}\beta\left(\cot\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right); \qquad V = -\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\left\{\frac{\frac{1}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\alpha} + \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right\}$$

$$V = -\frac{\beta}{\cos\beta} - \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{1+\sin\beta}.$$

(kantlijn- en tussentoevoegingen:) ⟨Nog onderzoeken of deze, geintegreerd als V van een kringstroompje, ook is de V-pot. van een kringstroompje, m.a.w. dan vrij van divergentie is.
Natuurlijk ja, dat volgt uit de afleiding; we hebben, wetend de potentiaal van stroom en element, gezocht de pot. van 2 stroomelementen als $\int\cos\varepsilon f(\beta)d\varepsilon d\beta$ (zie Maxwell p. 46)⟩

(volgt een onleesbare doorhaling.
Onderaan de pag. in een voetnoottoevoeging nog:) ⟨[de fictieve pot. van 2 lijnvectoren: zoo hebben we reeds gevonden de fictieve potentiaal van 2 puntscalars.] Zoo kunnen we ook die van R_p–vectoren bepalen. In de Eucl. ruimte worden al die formules gelijk⟩

Deze vectorpotentiaal is in de niet-Eucl. ruimte echter niet de fraaie uitbreiding van de scalarpotentiaal, die ze in de Euclidische is.
(in een zeer kleingeschreven en moeilijk leesbare toevoeging:) ⟨*N.B.* Voor n afm. komt $F(\alpha)\sin\alpha\sin\varphi\times\sin\alpha d\varphi d\alpha.\sin^{n-3}\alpha\cos^{n-3}\varphi d\omega =$

$$-\tfrac{d}{d\varphi}\left\{V\cos\varphi.d\alpha.\sin^{n-3}\alpha\cos^{n-3}\varphi d\omega\right\}d\varphi$$
$$-\tfrac{d}{d\alpha}\left\{V\sin\varphi\sin\alpha d\varphi\sin^{n-3}\alpha\cos^{n-3}\varphi d\omega\right\}d\alpha$$

(na een onleesbare doorhaling:) $\frac{dV}{d\alpha} - (n-2)\mathrm{tg}\frac{1}{2}\alpha.V = -F(\alpha)\sin\alpha.$⟩

....

In een hypersfeer of ell. n-ruimtes de $(n-1)$-sten in A als volgt congruent naar de $(n-1)$-sten in B over te brengen. AP komt in BQ, als BQ ligt in het vlak BAP en denzelfden hoek met AB maakt, als in AP.

Uit deze overbrenging volgt dan direct de omzetting van de vectorpot. van een elem. magneet in de kracht van een stroomelement.

VI-18 Wat is de vergelijking der krachtlijnen op den gewonen bol, als we het dubbelpunt in het tegenpunt denken?

. . . .

Is de eendimensionale empirische wiskunde (de meetkunde langs een touw) empirisch of aprioristisch?[3] Wel, het continuum is aprioristisch.⟨22⟩ Nu kunnen op het continuum verschillende schalen (puntsprongen) worden geconstrueerd; voor die puntrijen geldt dan de ⟨ordinaal⟩ arithmetik; de ⟨ordinaal⟩ arithmetik is aprioristisch maar, dat ze geldt, is empirisch. (dat n.l. als houtje AB is te leggen op CD, dat dan ook, als ik AB verdeel in 3 aaneengesloten stukjes hout, ik die complex van 3 ook aaneengesloten kan leggen op CD; zoo blijkt, dat de meetkunde zich dekt met de arithmetik,*) voor elke schaal.

(kantlijn:) ⟨meetkunde zelf is immaterieel, n.l. beweging van het eene materieele lichaan, relatief het andere.⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨We kunnen ook zeggen: Empirisch blijkt langs een touw de *groep* te gelden bij benadering. (het in den tekst genoemde feit bewijst nog alleen de ⟨eenduidige⟩ afbeelding, nog niet de 'groep'). Dit blijkt hieruit, dat de versch. schalen aan elkaars tusschenverh. voldoen.⟩

(doorgehaald:) ⟦Maar verder blijken er onderl. onmeetbare schalen te bestaan, en wel zóó, dat de punten ⟨zoo ver de waarneming reikt,⟩ vormen een continuum in Dedekindsche zin,[4] voldoende aan de axioma's van opvolging.⟧

De planimetrie is even aprioristisch als coörd. geom.; empirisch blijkt, dat ze geldt volgens Helmholtz-Lie-Hilbert.

. . . .

VI-19 *(doorgehaald:)* ⟦De ordinaalgetallen hooren niet tot de rekenkunde, maar eerst tot de meetkunde. De cardinaalgetallen hooren tot de rekenkunde, maar ook tot de maat in de meetkunde.

Hebben we de ordinale rij der geheele getallen, dan kunnen we de gebroken getallen daar eerst tusschenvoegen, als we de cardinale getalopvatting hebben gekregen. Beide arithmetiken zijn aprioristisch, het onzegbare aprioristische geeft ons de vatbaarheid tot tuimeling in de afbeelding van alle hoeveelheden op de standaardnorm één twee drie .... (ordin. en cardin.)

⟨22⟩Wel, ⟦de telwetten⟧ het continuum is aprioristiscfh.

Het intuitieve tellen ⟨en de bepaling van ordinaalgetal door afbeelding,⟩ daarop schijnt zich de mathem. logica te willen werpen.⟧

. . . .

De ⟨beide⟩ elementair $\begin{pmatrix} p \\ n-p \end{pmatrix}$ -vectordistributies[5] (n.l. met de eenheid van $(p-1)$-afgeleide-⟨combin.⟩ en met de eenheid van $(p+1)$-afgeleide-⟨combin.⟩ in R_n aldus te krijgen: schrijf op de beide vgl. van beide afgeleiden $= 0$ voor een meridiaan R_2 tusschen een richting uit een R_p en een uit de R_{n-p} daar loodrecht op. De vector bevat dan de onbekende richting uit ⟨de meridiaan⟩ R_2 en de $p-1$ richtingen uit $R_p \perp R_2$ (de loodvector dus de loodlijn in R_2 en de $n-p-1$ richtingen uit $R_{n-p} \perp R_2$.

. . . .

Uit 2 lijndistr. in R_n is te componeeren een vlakdistr. (n.l. het sinusprod.) Zijn nu de beide afgeleiden van de resultante niet licht af te leiden uit de 2 paren afgeleiden der componenten? Zoo ja, dan is hieruit misschien te bewijzen, dat ook voor een vlakdistr. niet beide afgeleiden 0 kunnen zijn. Vgl. overigens voor die kwestie: Klein, Nicht-eucl.: de parametervoorstelling der 6 Plückersche lijncoördinaten.[6]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het intuitief opgebouwde, daarom kan men stellingen zeggen, en wel in den vorm van een uit axioma's opgebouwde theorie, maar niet een analoge eigenschap.. ⟧ *(van de rest der doorhaling zijn slechts woorden en fragmenten leesbaar.)* **VI-20**

. . . .

De homogeniteit der ruimte, is in 't geheel niet apriori: ze blijkt empirisch. Een homogene exterioriteit, als exterioriteit zonder meer, waar Russell van spreekt, is onzin; ze kón apriori best onbestaanbaar zijn. ⟨En we kunnen ons haar best denken als translatie-exterioriteit.⟩ [7]

. . . .

Zoo min als de contradictie van Russell reden is, om de ⟨intuitieve⟩ logica te verwerpen, zoo min is de kromme zonder afgeleide van Weierstrass reden om het intuitieve continuum te verwerpen voor empirische krommen.[8]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Geef ik het intuitieve continuum van 2 dimensies, dan kan ik daar op naar willekeur het cirkelsysteem ⟨en homogene meetkunde⟩ (die schaal) construeeren; zooals ik naar willekeur de schaal op het eendim. continuum kon

construeeren. Je begint b.v. met om een punt gesloten krommen geheel buiten elkaar, uit te laten vloeien, en, aan de hand van de Hilbertsche Grundlagen, maar zonder van Punktmengen gebruik te maken.

(kantlijn:)⟨Dat nog te doen⟩ ⟧

....

Dat ten slotte de werkelijke bewegingen van verschillende rationale schalen
VI-21 zich ⟨met de Hilbertsche axioma's⟩⟨23⟩ ‖ dekken, is even vreemd, ⟨en even weinig a priori,⟩ als dat ⟨op het eendim. cont.⟩ de bewegingen van de eene rationale maatstok zich volgens de juiste *tusschenwetten* blijven bewegen tusschen die van de andere.[9]

....

Voor het fictieve continuum geldt:
1^e Elk element is Hoofdelement.
2^e Bij elke fundamentaalreeks is een grenselement.[10]
Maar kan ik me dat voorstellen?
Een fundam. r. kan ik alleen aangeven [een ⟨bepaalde⟩ oneindige decimaalbreuk *kan* ik ⟨in 't algemeen⟩ niet aangeven; ik kan alleen sommige decim. breuken definieeren als identiek met het, op andere wijze aangegeven, grenselement] door zijn grenselement. Ik kan dus niet spreken van *elke* fundam. reeks, onafh. v. een grenselement. Maar *wel* is een intuitief axioma v.h. intuitief continuum, dat elk punt door een gegeven schaal te benaderen is. (St. 1^e).

....

De eigenschap v.h. intuitieve continuum is, dat bij elke willekeurige schaalconstructie tusschen elke 2 schaalpunten weer een intuitief continuum overblijft.

....

Een 'waarheid' van beroemde mannen is een rust van helderheid, afstekend als tegenstelling tegen de duistere afgeslotenheid der woorden, waarin de waarheid wordt uitgedrukt.

(kantlijn:) ⟨Een stil kristal tusschen de verdoemde *beweging* der anderen.⟩

....

In wiskunde is het schuwe *pleizier* van bouwen, dat toevallig ook practisch nut kan hebben.

....

VI-22 De Euclidische meetkunde is een overzicht *van zekere verschijnselen* ⟨beweging

⟨23⟩ *(I.p.v. onleesbare doorhaling)*

van vaste lichamen⟩ *hier in de buurt.*

. . . .

(doorgehaald:) ⟦In welke betrekking staat de reeks ⟨π⟩ der niet-Archimedische getallen tot het ordetype ϑ van Cantor? Hebben we in π niet Fund. reeksen met hetzelfde grenselement, zonder bijeenbehorend te zijn? Dus in strijd met Cantor, *Begründung* § *10 stelling D 2*[11]

Neem b.v. $x^2 + x$, en de fundam. reeksen: $\begin{cases} x = 0,999999\ldots \quad & x = 1. \\ en : x = 1 & x^2 = 0,99999\ldots \end{cases}$

En is daarom dan ook niet de stelling van § 1 ibid. onderuit? En vervalt daarmee dan ook niet de zin van Hilberts Grundlagen?⟧

. . . .

Een rationale schaal is op het intuitieve eendim. continuum experimenteel te construeeren, b.v. door te trachten telkens het staafje te vinden, dat p maal verschoven, een ander staafje afgelegd heeft.[12]

. . . .

(doorgehaald en aansluitend op de doorhaling hierboven:) ⟦Want ik weet dan niet meer, wat een perfecte Punktmenge is. Want nu ik het intuitief niet meer weet (immers het intuitief contin. blijkt er zich niet mee te dekken), weet ik het logisch ook niet; want ik weet niet, wat *alle* Fundam. reeksen van een ordetype zijn.

(kantlijn, ook doorgehaald:) Toch is het in de Hilbertsche M.A. Grundl. wel in orde. Want daar geldt het Archim. axioma, dus ook de stelling van Cayley § 10⟧

. . . .

Het ⟨materieele⟩ continuiteitsidee ⟨verschijnt ons, als we het wiskundig bekijken, als⟩ beweging van een stukje vast lichaam;[⟨24⟩] dit zien we direct voor ééndim. ruimtecontin.: *) we worden er ons niet van bewust, van de wisseling,[⟨25⟩] die de contin. is, dan door beweging, en daar we ⟨materieel⟩ geen punt in beweging kunnen denken, kunnen we ons alleen een brokje in beweging denken.[13]

*) *(kantlijn:)* ⟨zoo ook voor meerdim. ruimte⟩:

(kantlijn:) ⟨Intusschen het vrije wisk. systeem, dat we 'op de materie toepassen', kent wel degelijk bewegende punten⟩ . Maar hetzelfde geldt voor het tijdscontinuum: ‖ het bewegend staafje is hier een physiek waargenomen verschijnsel, **VI-23**

[⟨24⟩] Het ⟨materieele⟩ continuiteitsidee ⟦onderstelt⟧ beweging van een stukje vast lichaam;

[⟨25⟩] we worden er ons niet van bewust, van de ⟦contin.⟧ wisseling, b.v. een klokslag, een gebrom; dit verschijnselstaafje wordt tevens als de wisseling zelf waargenomen, waarin we ons een ander verschijnsel kunnen geplaatst denken, dat zijn tijd'Ausdehnung' aan de vergelijking met het eerste verschijnsel dankt.⟨26⟩

. . . .

(Russell § 64) Grandeur? We spreken alleen van puntenparen van *gelijke* grootte, geheel willekeurig, alleen beantwoordend aan de wetten der 'Anordnung'. We voeren geen nieuw begrip *grootte* in.[14]

. . . .

Ik kan wel spreken van: '*als* een punt ligt op een lijn', maar niet van: *alle* punten van een lijn (een klasse van eenheden).[15]

. . . .

De slotsom van het leven is: òf retireeren òf rondkijken met groote oogen en maar *doen*, wetend, hier niet op zijn plaats te zijn.

. . . .

De wiskundige beelden zijn intuitieve beelden, zooals de andere; maar ⟨ze te zien ⟨in de wereld⟩ is⟩ de speciale veruiterlijking van de menschen in hun strijd om het bestaan;⟨27⟩ en verder hebben ze de eigenschap, dat de menschen elkaar ten opzichte van die deelziening volkomen begrijpen.

. . . .

De algebra der logica is nooit exact *in haar toepassingen.* Bijv. lees in $a < b$: een roos is rood. Voor een ander mensch kan dat niet waar zijn. Of lees: licht komt niet voor zonder electriciteit; dit is een empirische waarheid, die door
VI-24 wonderen steeds kan worden gelogenstraft. Alleen uit de wis- ‖ kunde, die we zelf opbouwen, kunnen grondoordeelen met volkomen exactheid worden opgesteld.[16]

. . . .

Het analytisch/synthetisch oordeel[17] verbindt twee verstarde eenzijdigheden in 't hoofd in een intuitivum. ⟨Het is niet wezenlijk onderscheiden van een intuitief inzicht b.v. 'een roos is rood' van 'wie liegt, heeft groene oogen'.⟩

⟨26⟩Maar hetzelfde geldt voor het tijdscontinuum: het bewegend staafje is hier een physiek waargenomen ⟦interval⟧ , b.v. ⟦de slingertijd van een klok, maar datzelfde⟧ staafje wordt tevens als de wisseling zelf waargenomen, ⟦d.w.z.⟧ we ⟦kunnen⟧ ons een ander ⟦interval⟧ ⟦in⟧geplaatst denken, dat zijn tijd'Ausdehnung' aan de vergelijking met het eerste verschijnsel dankt.

⟨27⟩maar ⟦zij zijn⟧ de speciale veruiterlijking van de menschen in hun strijd om het bestaan;

Het ⟨dorre⟩ empirisch feit verbindt twee eenzijdigheden met verwondering; de eenheid kan dan alleen gevonden worden (want van de eenzijdige vastheid *) **) in ⟨de beide⟩ elementen wil men geen afstand doen, dus het intuitivum is niet terug te vinden) in een wiskundig systeem [d.i. uit eenheden en continua opgebouwd: de *inhoud* van welke eenheden een of ander intuitivum blijft, maar buiten het wiskundig systeem staat.]

*) *(kantlijn:)* ⟨Vooral van de zonde der meetbaarheid wil men geen afstand doen.⟩
**) *(kantlijn:)* ⟨Men wil geen afstand doen, omdat men die eenzijdigheden in 't leven toepast.⟩

Alleen bij het empirisch feit ⟨behalve bij de wiskunde natuurl., b.v. b tusschen a en c, c buiten a en b⟩, kan men spreken van oordelen $a < b$, die *zin* hebben, ***) ⟨in dien zin, dat ze willen gesteld zijn in een nog onbekend wisk. systeem, waarop ze vooruitloopen.

Ditzelfde vooruitloopen op een wiskundig systeem ('het wereldmechanisme') is noodig, om te Begründen de contradictore negatie (Russell § 35), de 'formal implication' (§ 40 en § 77 p. 79 boven);[18] uit de 'formal implication' komt dan de 'material impl.' door stilzwijgend toe te voegen: 'en als het wereldsysteem zich in den toestand bevindt, die de actueele is onder de vele mogelijke'⟩ .

Er wordt met die oordeelen logisch gewerkt, om te helpen in het vinden der wiskundige hypothese ⟨d.i. het eenvoudigst wiskundig systeem, dat de empirische relaties geeft, zonder verwondering⟩ , die beide moet vereenigen. *(kantlijn.):* ⟨In het wisk. gebouw moeten dan als bijz. conclusies de empirische feitoordeelen optreden.⟩ Hier*(?)* de gebouwen der wiskunde zijn de eigenlijke plaats voor de ⟨exacte⟩ oordelen.
Het eenige werkelijk intuitieve is partieering en ⟨moreele⟩ continuiteit, die beide daarna in de wiskunde worden gebruikt.

***) *(kantlijn:)* ⟨d.i. nog ándren exacten zin, dan hun eigen teekenfiguren⟩,

....

Een praemisse[19] ('bij een empirisch oordeel' wordt bedoeld) is altijd gesteld voor zekere bijzondere gevallen,[⟨28⟩] die men alleen beschouwd wenscht te zien, anders heeft niet alleen haar *ontkenning*, maar ook *zijzelf* welbeschouwd geen zin.

(Men rekent stilzwijgend allerlei dingen vast, b.v. dat de zon morgen zal **VI-25**
opgaan, en wie weet wat al niet). En die bijz. gevallen worden alleen dan vast, m.a.w. de zin der hypothese eerst dàn scherp (men weet eerst *wat* men zegt, al is dat ook waardeloos), wanneer men het bijz. geval heeft aangegeven door eenige entities *) met relaties als punt van uitgang.

[⟨28⟩] Een ⟦hypothese⟧ is altijd gesteld voor zekere bijzondere gevallen, Voor een ontkennende praemisse geldt dat nog veel sterker, b.v.

als er geen electriciteit is, is er geen magnetisme.

Wat denkt men bij die praemisse? Toch steeds een restant, dat *wel* blijft, en ten opzichte van welk encadrement **) het geldt, dat, als *dat* encadrement zonder electriciteit is, dan ook zonder magnetisme. Welk encadrement dan weer alleen dan scherp kan ⟨treden in de taal, dus⟩ tot verstandhouding tusschen 2 menschen,⟨29⟩ wanneer men zich bepaalt tot het wiskundig substraat er van.

M.a.w. het invoeren der negatie (negatie van $a = a'$) in de logische algebra beperkt die logica eerst recht ⟨krachtig⟩ tot toepassing op wiskundige gebouwen.

*) *(bovenaan bladzijde:)* ⟨waarvan het intuitieve wordt vervangen door een dood wiskundig symbool⟩

**) *(kantlijn:)* ⟨bij een positief oordeel kan men nog beter het encadrement in 't vage laten ⟨al is dat ook niet zuiver,⟩ maar bij een negatief is ondersteld, dat het heele encadrement is afgezocht.⟩

. . . .

Wie logisch redeneert, redeneert over wiskundig geabstraheerde aanschouwingen, volgens *geheel* en *deel*. De algebra der logica is niets dan de algebra van *geheel* en *deel*. En de directe aanschouwing van *geheel* en *deel* geeft de algebra der logica. Want haar axioma's zijn uit de directe aanschouwing geabstraheerd.

. . . .

VI-26 *(doorgehaald:)* ⟦Daar opbouwen altijd het beste is: is het niet mogelijk de bewegingsgroep van het intuitief tweedim. continuum (waarvoor we kunnen nemen een willekeurig stuk v.h. platte vlak zonder zijn omtrek) op te bouwen? B.v. eerst de groep om één punt, en dan langzamerhand die om andere punten er bij trekken?⟧

. . . .

Volgens Couturat (R. de Metaph. 14.2. p. 211)[20] geeft Hilbert 18 axioma's voor de arithm. terwijl Peano klaar was met 5, Padoa (1902) met 4.

(kantlijn:) ⟨Maar Peano en Padoa geven de axioma's waaraan een klasse moet voldoen, om te kunnen heeten 'een klasse ω'; Hilbert geeft de axioma's, waaraan een getallensysteem moet voldoen, om te geven de reeks der reëele getallen met haar bewerkingen.⟩

. . . .

Couturat zegt: we houden ons niet op met epistemologie? Maar dan spreken ze ook in de lucht.

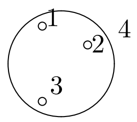
⟨29⟩ Welk encadrement dan weer alleen dan scherp kan ⟦dienen⟧ tot verstandhouding tusschen 2 menschen,

. . . .

Couturat (l.c. p. 213) Hij verdedigt de logistiek toch alleen als werkmethode, niet als middel tot inzicht. ⟨Bij het verdedigen ontneemt hij haar alle bijzonders; ze zal dus nu maar hebben te toonen, wat ze als methode *vermag.*⟩

. . . .

De 'contradictie' van Russell[21] berust op de verwarring van *als* iets het geval is en de *klasse* van ⟨*al*⟩ de dingen, waarbij dat het geval is. Stel je maar eens een eindig getal dingen voor en vorm daaruit alle klassen; er zijn er daaronder, die *niet* zelf een van hun elementen zijn. Wel b.v. de klasse uit



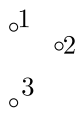
bestaande uit 4 elementen, waarvan een de klasse is van de andere.

Die bedoelt Russell. Vorm nu uit een eindig getal stippen *alle* groepen en groepen van groepen. En de paradox loopt er over, of de kritieke groep, al of niet één element heeft, dat de klasse is van alle andere.

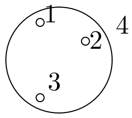
(toevoeging bovenaan bladzijde:) ⟨Bij het opbouwen van telkens groepen van **VI-27**
hooger orde uit die van lager, vormt zich de kritieke groep nooit, en ik kan alleen spreken van groepen, die a priori zijn aan te wijzen, die niet hoeven te wachten, tot *alles* is opgebouwd, wat niet op te bouwen is.⟩

Het criterium der ⟨gevormde⟩ klassen is natuurlijk onafhankelijk van hun vereeniging tot een nieuwe klasse ⟨op dat criterium gegrond⟩ . Vereeniging ⟨tot de nieuwste klasse⟩ is een nieuw concept, dat uit de oude moet worden afgeleid, dan kan ik het *bestaan* van die vereeniging intuitief voelen, anders niet. Daarom mag het criterium van een klasse van klassen niet zijn: ze hoort al of niet tot haar elementen, dan bij een bepaald reeds afgerond geheel van klassen. [die een zekere machtigheid kunnen hebben, maar in elk geval bepaald geduider*(?)* wiskundig voor oogen staan.][22]

⟨Is de opl. misschien de groep



hoort wèl bij de kritieke groep; niet de groep



Neen, dit doet de paradox slechts scherper uitkomen.

Ik moet zeggen: ik kan die groep niet overzien: dus spreekt het criterium niet voor nu; het criterium ontleent zijn kracht aan een overzicht onafhankelijk daarvan, maar kan zijn kracht niet aan zichzelf ontleenen.⟩

. . . .

(Couturat ib. § 236)[23] Hier wil hij zich rechtvaardigen met (!): 'J'en déduis tous les théorèmes de l'Arithmétique classique; vous n'y avez jamais trouvé la moindre contradiction, lorsque vous les faisiez reposer sur de vagues et confuses intuitions; pourquoi voulez-vous qu'il y en ait devantage aujourd'hui?' (sic!)

. . . .

(Russell sic!) 'La définition des nombres comme classes, se recommande pricipalement par le fait qu'elle ne laisse aucun doute touchant le théorème d'existence'. *(kantl.:)* ⟨Maar dat wordt gegeven door gewone inductie.⟩ cf. ook wat volgt bij Couturat pag. 242 en Couturat Princ. p. 58 Russell Princ. ip. 243 en 497.[24]

. . . .

(Russell aan 't slot van zijn boek p. 498) 'Ainsi la chaîne des définitions et des théorèmes d'existence est complète, et la nature purement logique des mathématiques est entièrement établie'. (alsof, wanneer het stel logisch in elkaar zit, het dan ook van uitsluitend logisch karakter is.[25]

(kantlijn:) ⟨Maar verder: Is er nog geen wisk., dan wil Russell zijn prop. functions zeker alleen op zgn. reëele dingen betrekken, dus ook zijn definities. En ten slotte vormt hij zijn Existenzbeweise met wisk. dingen! die hij gewoon inductief opbouwt. Ten slotte houdt alles dus alleen portée niet voor reëele, maar voor wisk. dingen; was hij dan maar direct begonnen, die wisk. op te bouwen.⟩

. . . .

VI-28 Dat praat maar van classen en hun verhoudingen, als je mij nu maar zegt, wat ik bij classe moet denken.

. . . .

De defin. van getal als ‘klas van klassen’, postuleert die niet, dat ik van zoo’n klas kan spreken? M.a.w. dat het mogelijk is die spontane abstractie te doen, die wij doen met het stellen van een getal?

....

(doorgehaald:) ⟦En dan de defin. Cout. p. 243 van N, sluit die niet in (‘bevat $n+1$, zoo gauw ze n bevat’) ⟧

(Cout. p. 244)[26] ‘On peut démontrer que la classe N, comprend tous les nombres qu’on obtient en ajoutant 1 à 0, à 1, à 2,...., à chaque nombre entier déjà obtenu’. Is dat soms geen principe van inductie?

....

(doorgehaald:) ⟦Juist is Couturat Princ. p. 18 noot 3. Is uit die noot niet de Russellsche contradictie te verklaren?⟧ [27]

....

(Poincaré over Hilbert terecht) ‘Les indéteminées qui figurent dans les axiomes (en place du quelconque ou du tous de la logique ordinaire) représentent exclusivement l’ensemble des objets et des combinaisons *qui nous sont déjà aquis* en l’état actuel de la théorie’.[28]

....

En tous cas, entre Hilbert et Russell, la logique est hors d’état de décider.’[29]

....

(Poinc. Rev. 14.1 p. 20. XX) induction complète ⟨van één dimensie⟩ in de **VI-29**
volgorde, waarin ik mijn conclusies zal hebben toegepast.[30]

....

Praktisch zuiver uitgevoerde logistiek zou moeten zijn een eindig aantal regels ⟨van symbolen⟩ onder elkander, zonder tekst. Enz. mag er niet in voorkomen; want zelfs al had men het principe van inductie aangetoond: men mag het niet toepassen op de *handeling van* het symbolisch schrijven, alleen op de teekens, die er worden voorgesteld.[31]

Of zullen we de logistici helpen en nu zeggen: Zoo goed als uw gewone menschelijke begeerte en berekening u leidt bij uw ‘wiskunde doen’, zoo leidt uw gewoon wiskundig de dingen bekijken u bij het opbouwen van uw ‘chimère’;⟨30⟩ dat chimère vóóronderstelt dus het leven èn de wiskunde. (Ik mag dan bij mijn Existenzbeweise alle in zuivere wiskunde, d.i. uit getal, continuum en math.

⟨30⟩ zoo leidt uw gewoon wiskundig de dingen bekijken u ⟦tot⟧ het opbouwen van uw ‘chimère’;

inductie opgebouwde systeem gebruiken, ⟨maar geen voorbeelden uit het leven, want *logica vooronderstelt wiskunde*, (niet omgekeerd).⟩

Bij het *wiskunde doen* zou de logistiek geen zin hebben. Maar in *wiskundige theorieën* abstraheert men van de wiskunde zelf, en alle wiskundige *namen* worden zelf dingen, die een symbool kunnen krijgen, en op de meest eigenaardige wijze relaties met elkaar hebben.

VI-30 Zoo is de volgorde:

1^e praktische wiskunde der eindige getallen

1^e_a praktische logica ⟨rust vinden in wisk. eindige systemen⟩

2^e wiskunde der inductie en van het continuum

3^e gewone logica (de *theorie* van de wiskunde der eindige getallen en der elkaar gedeeltelijk bedekkende gebieden)

4^e mathem. logica: de *theorie* der wiskunde (die haar praktijk vooronderstelt).

....

Omdat de taal der wiskunde handelt over exacte dingen, daarom kan die taal zelf ook exact gemaakt worden ⟨door de logistiek, voor een bestaand beperkt wiskundig geheel *)⟩ (en tòch zoo ⟨allicht⟩ een eenzijdigheid komen, ten opz. v.h. intuitief aangeschouwde.

*) *(kantlijn:)* ⟨Maar breidt de wisk. zich steeds uit, dan moet ook het teekensysteem steeds worden uitgebreid. (zij het ook in het beperkte gebouw, *waarin* alleen telkens nieuwe kleine gebouwen worden gemaakt.⟩

(doorgehaald:) ⟦Die taal over de wiskunde wordt dan een gebouw *in* de wiskunde; het is de vraag, of zij niet kan dienen tot de oplossing van allerlei combinatorische vragen ⟨achteraf⟩ , zooals de theorie van complexen van allerlei bepaalde integralen achteraf.⟧

....

Een begin van bouwen ⟨in 't gebouw⟩ gaat b.v. als ik aan 5 ⟨*gelijke*⟩ stippen de teekens 1, 2, 3, 4, 5 toevoeg, en die ⟨dus zoo⟩ beschouw als nieuwe ⟨*verschillende*⟩ individuen (in de praktische wiskunde beschouw ik ze niet als ⟨verschillende⟩ individuen). Maar dat bouwen zelf is intuitief; ik *voel*, wat ik combineer en abstraheer ⟨intuitief; kijk maar in jezelf⟩ : vaak zal het[⟨31⟩] gebouw voor de verstandhouding niet exact genoeg zijn, en kan het goed zijn de relaties der nieuwe elementen door symbolen vast te leggen. Het existenzbeweis van die symbolen *blijft* in de intuitie. Trouwens, Russell haalt ten slotte ook alles uit de intuitie, maar uit de foutieve klasse-intuitie.[32]

....

[⟨31⟩] ⟦en dan het⟧ ook zal het

Getal als klas van klassen is onzin ⟨die oneindigheid van klassen kan ik niet overzien⟩ ; als *voorwaarde* voor klassen zou beter gaan.[33] **VI-31**

. . . .

(Poincaré)(Rev. 14.1 p. 33) 'La vraie définition serait: 'Le phosphore, c'est ce morceau de matière que je vois là dans tel flacon'. ⟨Maar dat is geen definitie; trouwens definitie is onmogelijk buiten een reeds bestaand wisk. systeem.⟩ [34]

. . . .

(Poinc.) (ib. p. 26) 'Hilbert rechtvaardigt vicieuze cirkels, door een 'Bewijs' zelf alleen door postulaten te definieeren; en er een nieuw dood mathematisch element van te maken. Maar geldt dan voor dit nieuwe symbool niet, dat er een existenzbeweis of afwezigheid van mogelijke contradictie voor moet worden gegeven? En krijgen we zoo niet slechts verplaatsing van de moeilijkheid?[35]

. . . .

Maar dit staat vast: de mathem. logica werkt naar buiten en naar voren, niet in het hart terug.

. . . .

Van ons standpunt is de 'replâtrage' van Hilbert onnoodig.

. . . .

Het is in 't algemeen te verwachten, dat, als ik in de wetten der gewone logica (die voor ⟨reeds opgebouwde⟩⟨32⟩ dingen gelden) mijn ⟨willek. van axioma's voorziene,⟩ *) symbolen ga zetten, ik tot contradicties zal kunnen komen. Zoo die van Burali-Forti en van Russell.[36]

*) *(kantl.:)* ⟨op dwaze analogieën gegronde⟩

. . . .

In zichzelf komt geen enkele eenzijdigheid, mits goed consequent bedreven, tot onheil, nòch de wiskundige, nòch een andre zoogenaamde 'slechtheid'.

⟨Maar men kan een andre kant uitgaan, een tweede emanatie, en dan merken dat ze leidt tot een andre daadswil, dan de eerste. Dan springt de boel. Men kome daaruit tot een Hereeniging, die er uit is te leeren. 2^e kan eenvoudige walging komen, zonden & strijd.⟩

. . . .

Dit staat vast: redeneer ik over mijn symbolen, ⟨om b.v. te zeggen, dat een **VI-32**

⟨32⟩ *I.p.v. onleesb. doorh.*

zekere classe behoort tot de classe der bestaande classen⟩ , dan mag ik mijn gezond verstand gebruiken; aan den anderen kant, mag ik geen van mijn symbolische formules toepassen, om zijn ⟨eigen⟩ rigoreuze afleiding; ⟨alleen om de event. wiskundige rigoreuze afleiding, die hij accepteert.⟩

(kantlijn:) ⟨daarom is ook Couturat's bestaansbewijs Rev. 14.2. p. 244 in orde, hoe brutaal hij hier ook gebruik maakt van het princ. van inductie.⟩ [37]

....

(Poincaré Rev. 13.6 p. 834, 2e) dit wordt ⟨gerechtvaardigd⟩ opgeheven door mijn opvatting.[38]

....

(Couturat Rev. 14.2. p. 249)[39] Het is waar, dat het getal (het *ééne individu*), waar⟨voor⟩[⟨33⟩] alleen de vormingsoperatie wordt gegeven (van n op $n+1$), ⟨indien die⟩ vormingsoperatie[⟨34⟩] tevens een of andre bewijsvoering van n op $n+1$ toelaat, met zijn definitie tegelijk het principe van inductie meesleept. Toch blijven, zooals Poincaré opmerkt,[40] *formeel* defin. en principe v. inductie twee ⟨verschillende⟩ dingen.[⟨35⟩]

De formeele eenheid, die Couturat betoogt, zou alleen juist zijn, indien ik a priori al mijn *dingen* ⟨en ook alle classificeering daarvan naar eigenschappen⟩ , gegeven dacht, en te midden daarvan nu die dingen ging uitzoeken, die den naam *getal* zouden krijgen. *)

*) *(kantlijn:)* ⟨m.a.w. als ze deel uitmaken van een *reeds bestaand* wisk. systeem; maar als ik dat denk als bestaand, is daarbij het princ. v. ind. al toegepast⟩ .

En werkelijk schijnt dat de foute suppositie van de heele klassenlogica van Russell te zijn.

Want we moeten ons heele systeem zelf opbouwen, met eindig getal, inductie en continuum; en dat eenmaal ingezien, heeft Poincaré gelijk.

....

VI-33 Stel de Russellsche contradictie als volgt (*de juiste formuleering*).[⟨36⟩] De propositie (over ⟨gegeven⟩ proposities):[41]

⟨àls⟩ een propositie over ⟨gegeven⟩ proposities niet aan zichzelf voldoet. Stel nu die vraag *over* die propositie zelf. (voeg haar dus aan het gegeven stel

---

⟨33⟩ waar⟦van⟧

⟨34⟩ ⟦welke⟧ vormingsoperatie

⟨35⟩ *formeel* defin. en principe v. inductie twee ⟦gescheiden⟧ dingen.

⟨36⟩ *Deze pagina bevat enkele onleesbaar gemaakte doorgehaalde woorden.*

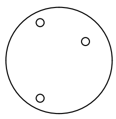
proposities toe.), dan komt een paradox voor het geval, *dat ik een antwoord op die vraag zou geven* (wat absurd is).

Want een propositie over gegeven dingen wil zeggen een scheiding van die dingen, ten opzichte van het *waar* of *valsch zijn* van bij het opbouwen van het systeem mede opgebouwde relaties; het 'àl of niet tot zichzelf behooren' wordt dus ondersteld te zijn om te zetten in symbolen, die heel iets anders uitdrukken, dan de woorden 'tot zichzelf behooren'. Terwijl voor onze kritieke propositie de ⟨redeneering tot de⟩ oplossing niet van iets vroegers kan uitgaan, maar van zichzelf zou moeten uitgaan; wat widersinnig is, en niets te verwonderen, dat hij, van zichzelf uitgaande, tot het tegendeel van zichzelf voert.

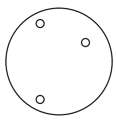
. . . .

En voor de andre interpretatie (die we hier ook eindig houden).

Vorm uit 3 stippen alle klassen en klassen van klassen, tot b.v. de 4de orde. Vorm dan de klasse van alle reeds gevormde klassen, die niet zijn van den vorm



Is *die* klasse dan van den vorm



of niet? In dezen vorm luidt het antwoord duidelijk: *neen.*

. . . .

Van *alle* groepen uit een Menge van zekere machtigheid kan ik niet spreken. Eerst als ik een zekere ordening heb gegeven, b.v. de ordening der punten v.h. platte vlak, kan ik sommige groepen aangeven, maar toch nooit *alle.*

. . . .

Zoo kan ik ook sommige reëele getallen aangeven (volgens de reeks $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2^2} + \cdots$), en zoo veel als ik wil, maar nooit *alle.* ⟨en ook kan ik van 2 bepaalde de rangverhouding aangeven⟩ .[42]

Wel kan ik *ieder* reëel getal aanwijzen (met een eindig aantal gebaren of **VI-34**
klanken n.l.) door gebruik te maken van de continuum–intuitie, en daarop een

punt 'aan te wijzen'.

⟨Maar⟩ kan ik ⟨dan niet⟩ werken met de machtigheid van de reëele getallen,⟨37⟩ door niet te spreken van *alle* beleggingen van *alle* eindige getallen met een eindig aantal b.v. 2, maar van:

⟨Als het waar is dat:⟩ [*als* ik kies een willekeurig ⟨eindig⟩ getal, ⟨kies ik er bij⟩⟨38⟩ een der beide get. *1* en *2*]? Nu, als dat dan eens tweemaal waar is, hoe wil ik van die tweemaal uitmaken, of ze gelijk zijn of verschillend? Wel, zoo goed als ik mathematisch kan bouwen ω kansen, kan ik bouwen ω proeven op gelijkheid of ongelijkheid.

(Op die manier moeten eigenlijk alle hoogere machtigheden worden opgevat⟨39⟩ ⟨niet als klassen, maar⟩ als proposities, die t.o.v. klassen ⟨die alleen uit eindig – en inductie? – bestaan⟩ secundair blijven moeten.)

(dit alles staat tussen enkele onleesbaar gemaakte zinnen in)

[De machtigheid van alle groepen uit ω is natuurlijk $2^{\aleph_0}$; omdat ik van *elk* eindig getal heb te kiezen tusschen 1 en 2, n.l. *al* of *niet* tot de groep behorend.]

⟨Dát de intuitie v.h. cont. bestaat uit *meer*, dan de rat. schaal, volgt wel hieruit, dat je weet, dat je van 0 niet direct op een punt van die schaal, met hoe grooten noemer ook, kunt springen!!

Overigens roep nooit zoo'n logische suggestie te hulp, om je intuitie te verdedigen.⟩

Intusschen nu dat: *als* ik een eindig getal denk, kies ik er 1 of 2 bij is een logische propositie, die alleen zin kan hebben in een of ander mathematisch systeem: *) (*welk* systeem, kan ik dan in 't midden laten; bij de onderhavige prop. gaat het, door het int. contin. te nemen, en een punt daarop aan te wijzen; op die manier, als n.l. het systeem van de prop. er is – zij het onbekende zgn. ⟨nog niet altijd⟩ twee der { } uitmaakbaar gelijk of verschillend zijn; **) is dus de prop. mogelijk, dan zijn ⟨nog niet altijd⟩ de verschillende manieren geindividualiseerd.

N.B. Ik heb het cont. noodig; kan niet zeggen: ik kies ω maal 1 of 2, want de intuitieve inductie is alleen voor gelijke dingen, niet voor wisselende (en ω kansen zijn gelijke dingen).

*) *(kantlijn:)* ⟨Misschien is er geen math. systeem te vinden, en dan is ze onmogelijk.⟩

**) *(kantlijn:)* ⟨bij event. aanwijzing zie je direct, of ze gelijk of verschillend zijn; hier geldt dus dat bezwaar niet meer cf. Noot pag. 35⟩

VI-35 Onze oneindige ⟨materieele⟩ ruimte is niets als een chimeriek raam, dat bevat: alle eindige ruimtestukken, het eenige, wat intuitief ⟨kan worden aangezien⟩⟨40⟩

⟨37⟩ ⟦Toch⟧ kan ik werken met de machtigheid van de reëele getallen,

⟨38⟩ *I.p.v. een ondoorleesbaar gemaakte doorhaling.*

⟨39⟩ (Op die manier moeten eigenlijk ⟦allerlei⟧ alle hoogere machtigheden worden opgevat

⟨40⟩ *I.p.v. onleesbare doorhaling*

van de materieele ruimte.

. . . .

Nog eens: het is nièt waar, dat ik de wiskunde ⟨b.v. der transfinite getallen⟩ kan beschouwen afgeleid uit gegeven logische relaties, omdat logische relaties pas zin krijgen, als ze zijn toegepast op een wiskundig opgebouwd systeem. Soms loopt dus een wiskundig systeem, als het logisch substraat onafh. er van zèlf kan worden opgebouwd als een wisk. systeem, parallel met een ander wiskundig systeem (voorbeeld hiervan ⟨in Hilbert Ens. Math.⟩), maar anders is het systeem van uitgang ook vaak noodig als Existenzbeweis v.h. logisch substraat, dat zelf geen wisk. systeem is.[43]

. . . .

(doorgehaald, moeilijk ontcijferbaar.) ⟦Wat blijft van mijn standpunt van de zgn dualiteit *(?)* van additie en multiplicatie?⟧

. . . .

Want wiskunde is bouwen met elementen; maar dat 'bouwen' is zelf ⟨in het wisk. systeem⟩ geen element, en kan in 't algem. ook niet als zoodanig worden beschouwd.[44]

. . . .

In het intuitieve cont. schrijf ik beter $0,01\not{0}$, dan 0,01, want dat eenmaal de deeling precies op zou gaan, is uitgesloten;[45] alleen kan ik zeggen, dat elke verdere decimaal, hoe ver ook, steeds 0 blijkt te zijn. Bij definitie stel ik dan $0,01\not{0} = 0,00\not{1}$; doe ik dat niet, dan houd ik een Menge, ⟨wel⟩ perfect,⟨41⟩ maar niet zusammenhängend.

Trouwens de vgl. volgt uit de intuitie van het continuum, want ik kan mij geen *verplaatsing* denken, die $0,00\not{1}$ zou voeren op $0.01\not{0}$. Intusschen is ook een Menge, waarbij de st. niet waar zou zijn, reëel in onzen zin, want ze is gelijkvormig met het continuum, waaruit achtereenvolgens zijn weggelicht de aftelbare reeks segmenten 0,|——|1 tot 0,|——|2 (|——| een eindige rij uit de cijfers 0 en 2,⟨42⟩ zie Cantor Grundl. p. 46 noot 11).[46]

(kantlijn:) ⟨*Noot* Al zou ik van 2 elementen niet kunnen uitmaken, of ze gelijk of verschillend zijn, toch kan ik spreken van 'gelijkmachtig'; als ik maar weet, dat, *als* de 'onbekende' elementen gelijk resp. verschillend zijn in de eene Menge, dat daarbij 2 gelijke resp. verschillende elementen in de andere Menge hooren. Zoo kan ik het continuum aequiv. betrekken op de lacunaire Menge hiernaast.⟩[47]

⟨41⟩ ⟦niet⟧ perfect,

⟨42⟩ (|——| een ⟦rij van getallen, eindig⟧ eindige rij uit de cijfers 0 en 2,

VI-36 *(doorgehaald:)* ⟦⟦Toch is de laatste redeneering in zooverre..⟧ Nu schijnt het, dat ik toch niet kan spreken van *alle* elementen dier Menge, *) want ik kan nooit zeker zeggen ⟨binnen eindigen tijd⟩ van een op het contin. aangewezen punt, of het er toe behoort (wel *soms* det het er niet toe behoort).

*) *(kantl.:)* ⟨dus die Menge toch niet reëel is⟩

....

Maar *toch* kan ik spreken van de *realiteit* der Menge, en van *alle* elementen er van.⟧

Je zou zoo zeggen: het cont. is intuitief en de rationale getallen zijn aftelbaar dus intuitief, dus ook het continuum met een rationale schaal er op.

Ja juist, maar als ik een punt op het continuum aanwijs, kan ik niet zeggen of het tot de schaal behoort.

....

Want vooral stelle men zich niet voor, dat bij het benaderen van de tweetallige decimaalbreuk van het op het int. cont. aangewezen punt, de rationale schaal er reeds op aangeteekend staat of zoo (dán zouden natuurlijk de rationale punten ook zijn uit te zonderen; maar dat kunnen we ons niet intuitief voorstellen). Neen, we denken ons een physisch int. principe van benadering, door b.v. te zoeken ⟨benaderen⟩ de verhouding der massa's in de uiteinden, opdat in het gekozen punt evenwicht zij (eerst leg ik in elk der uiteinden één massapunt, dan in 't eene 1 en 't andere 3, dan in 't eene 3, 't andere 5 of in 't eene 1 en 't andere 7 enz.: zoo benader ik, werkend met geheele getallen, wat moet).

(kantlijn:) ⟨Alleen dát continuum is intuitief, waarbij ik, een punt kiezend, nog niets van de benadering weet, dus ook de rationale schaal niet af en geindividualiseerd er op zie staan. Want $\aleph_0$ dingen kan ik niet *af* zien staan, ik kan me alleen denken, dat ze groeien, en dan dát rustig zijn gang laten gaan en mij afwenden; zoo ook met de rationale schaal⟩

....

VI-37 Alle algebraische getallen min de rationale heeft zin.

Alle reeële getallen min de rationale heeft ⟨alleen⟩ zin ⟨als volgt: ik denk mij deze Menge op het cont. afgebeeld; kies dan willekeurig uit het continuum, en heb dan de afbeelding daarvan nemend alleen kans op een punt uit onze Menge.⟩[⟨43⟩] [48]

....

[⟨43⟩] Alle reëele getallen min de rationale heeft ⟦geen⟧ zin.

(Cantor pag. 19 Grundl.)[49] verpflichtet, Definitionen zu geben, wodurch ihnen eine solche Bestimmtheit und eine solche Beziehung zu den älteren Zahlen wird verliehen, *dass sie sich in gegebenen Fällen unter einander bestimmt unterscheiden lassen.* Als je dát wou volhouden, werd de Mengenlehre nog meer beperkt.[50]

....

Ik *kan* niet spreken van ⟨het cardinaalgetal⟩⟨44⟩ van het continuum, (zoo iets ligt niet in de intuitie er van)⟨45⟩; evenmin van die der oneindige decimaalbreuken, omdat op zichzelf het *alle* daarvan geen zin heeft, en via het continuum evenmin, omdat ook het continuum geen '*alle* punten' heeft.

....

De *reductibele* (Cantor Grundl. p. 31; ⟨Schoenflies Ber. p. 68 en 69⟩) Punktmengen zijn zulke, als intuitief uit eindig getal en inductie zijn op te bouwen, ⟨zonder continuumprincipe.⟩⟨46⟩[51]

....

Ik zal dus moeten kunnen aantoonen, dat Cantor's Alef-eins zinloos is.

⟨Neen, zijn hoogere getallen bestaan zeker; alleen: ik ken niet anders, dan bepaalde indiv. er uit, en de enkele bepaalde, die ik kan aanwijzen (zie volg. pag), zijn aftelbaar (een eindige reeks, afw. uit 1 en ω .⟩

(Hierop sluit aan het tweede gedeelte van pag. 38)

....

(doorgehaald:) ⟦Het oneindig aantal der decimalen van het reëele getal kan ik groepeeren volgens elk getal der klasse II, en met elk van die groepeeringen kan ik een verschillend reëel getal verbinden. En omgekeerd kan ik met elk reëel getal een verschillend get. der klasse II verbinden.⟧

....

Behoort $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\text{oneindig maal}}}}}}$ nog tot de tweede getalclasse? **VI-38**

Natuurlijk: het *enzoovoort* (t.o.v. als eenheid een getal of bewerking, die met ⟨reeds bekende dingen uit⟩ de tweede getalclasse zijn te definieeren) is de genereering der tweede classe.

Het geheel van die vormingswijzen noem ik enzoovoort^2; en definieer de 3^e classe als het geheel wat is te krijgen uit reeds gevormde getallen dier classe met behulp van enzoovoort^2.

⟨44⟩ *I.p.v. een onleesbare doorhaling.*

⟨45⟩ (⟦dat⟧ zoo iets ligt niet in de intuitie er van)

⟨46⟩ *I.p.v. een onleesbare doorhaling.*

Een willek. getal van (II) kan ik aftellen 1 voor 1. Het geheel van (II) kan ik aftellen met 1 en ω, en evenzoo elk getal van (III). Het geheel van (III) kan ik aftellen met 1, ω en Ω.[52]

. . . .

(De rest van deze pagina 38 sluit aan op de laatste niet-doorgehaalde § van pag. 37:) (Zie vorige pag.) Het is als met de reëele getallen ⟨als decimaalbreuken⟩ : alle aanwijsbare zijn aftelbaar; maar van *alle* zonder meer kan ik niet spreken.[53]

	aftelbaar, de aanwijsbare	zinloos, om als *alle* saam te vatten ⟨en van een hoogere machtigheid⟩
Reëele getallen	de eindige reeksen van 0 en 1, en de gedefinieerd oneindige: die defin. bestaat uit oneindige afwisseling van 0 en 1	de niet-gedefinieerde, ⟨onbekende⟩ oneindige reeksen
Klasse II	de eindige reeksen uit 1 en ω opgebouwd	de oneindige*) reeksen uit 1 en ω opgebouwd

*) *(onderaan blz.:)* oneindig zonder een bepalende wet, want dan konden we weer vervangen door ω, en hadden *toch* weer een eindige voorstelling.

. . . .

VI-39 Ook bij de willekeurige ⟨stetige⟩ functie, die wordt gezocht bij de var. rekening, is eigenlijk een uit een aftelbare rij [de versch. onbekenden van de tweedemachtigheid zijn m.a.w. niet onafhankelijk], ⟨immers ik denk elke phy- sische gezochte kromme als een uit een zelf opgebouwd mechanisch systeem, en dat vormt een aftelbare Menge, met behulp waarvan ik telkens mathematische beperkingen aan de oplossing kan stellen.⟩

. . . .

(doorgehaald, na een onleesbare doorhaling:) ⟦"Implic. formelle' volgens Cout. een propositie, die voor elke x waar is [maar men laat het = V weg]. ⟧ *(einde doorhaling.)*[54]

. . . .

Het Λ ('toujours faux') van Couturat is een postulaat, dat de intuitie van *niets* moet vervangen, maar geen haar directer of eenvoudiger is.[55]

. . . .

(doorgeh.:) ⟦En de invoering van V is onzin⟧

Want ik kan geen propositioneele functie stellen, als ik haar niet als *waar* kan denken; is ze dus altijd valsch, dan is ze *zinloos.* Men moet dus denken: altijd valsch binnen een zeker zelf opgebouwd gebied van eenheden en relaties.

Nu en dan is Λ het teeken voor de intuitie *niets* ⟨of *onmogelijk.*⟩ De intuitie van twee proposities, dat zijn groepeeringen uit het bouw-werk van mijn systeem, die niet samen kunnen gaan, die elkaar uitsluiten binnen het bouw-werk, en uit hoofde van dat bouw-werk, anders *kunnen* ze elkaar niet uitsluiten. Het blijkt n.l., dat ik zóó kan bouwen 2 prop., dat ze elkaar uitsluiten. Stel ik ze dan toch samen, dan voer ik in de *nulklas* als daaraan bij defin. voldoende, en aan elkander valsche props. Die nulklas is een vrije Schöpfung.

(kantlijn:) ⟨Die nulklas is simpeler, omdat ik haar als zoodanig in vrijheid schep. cf. Russell p. 76 boven.⟩ [56]

....

(Cout. Princ. p. 33) 'On est obligé de postuler, par des axiomes spéciaux, **VI-40**
l'existence de la somme et du produit logiques ainsi définis pour toute une classe de relations.' Maar hoe weet je dat dan? Je postuleert maar, en je negeert de innerlijke zin, die je tot dat postulaat heeft gevoerd. En dat is de begeleiding van een wiskundig systeem.[57]

....

De axioma's van Euclides zijn evident: *voor* het zelf opgebouwde systeem, dat er al was, en dat de beweging der vaste lichamen was. Dat nu later blijkt, dat wij dat systeem, die groep, kunnen *opbouwen*, zoodat er andere analoge groepen logisch ook mogelijk blijken, is iets toevalligs. Wij hebben volledig als een – en ondeelbaar de ruimte-intuitie: zoo zeker, dat wij haar mogen gebruiken als eenheid tot opbouw van andere systemen, die dan ook *logisch mogelijk zijn.* Dat de ruimte kan worden opgebouwd uit andere intuities is een puur toevallig verschijnsel, zoo goed als dat je koolzuur kunt maken uit kool en lucht. (en dan is het toch eigenlijk wat anders, dat andere koolzuur resp. die andere ruimte.)

....

Het vastleggen van *alle* eindige getallen door eindige definities, wat Russell doet, is niets bijzonders, en analoog aan het ω stellen van Cantor.

....

(kantlijn:) ⟨Bij een wiskundig feit, denk ik aan alle eenheden van mijn gebouw.

Bij een empirisch feit denk ik aan een enkel geval, nooit aan meer. (dat is bedrog)

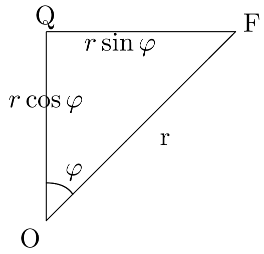
En generaliseer ik, dan loop ik in vertrouwen op een *wisk.* systeem vooruit.⟩

....

....

(Dit zijn enkele losbladige toevoegingen, in dit schrift gevonden)[58] **VI-a**

In hyperbolische maatbepaling



Absoluut oppervl.

$$x^2+y^2+z^2-4k^2h^2=0$$

Voor $z=rh\cos\varphi$ absolute kegelsnede

$$x^2+y^2-(4k^2-r^2\cos^2\varphi)h^2=0$$

Hyperb. lengte van QF: $\frac{2k}{i}\mathrm{bgtg}\frac{ir\sin\varphi}{\sqrt{4k^2-r^2\cos^2\varphi}}$ of $\frac{2k}{i}\mathrm{bgsin}\frac{ir\sin\varphi}{\sqrt{4k^2-r^2}}$

In het vlak door $Q\perp OQ$ sluit nu een middelpuntshoek in Q van $d\vartheta$ een boogje bij F in van:

$$2k\frac{r\sin\varphi d\vartheta}{\sqrt{4k^2-r^2}}$$

Hyperb. lengte α van OF:

$$\frac{2k}{i}\mathrm{bgsin}\frac{ir}{\sqrt{4k^2-r^2}}\left[\frac{\frac{r}{2k}}{\sqrt{1-\frac{r^2}{4k^2}}}-\frac{\sin\frac{i\alpha}{2k}}{i}\right.$$

Verder: $d_{hyperb.}OF=2k\frac{dr}{4k^2-r^2}$

En in het vlak van teekening sluit een middelpuntshoek in O van $d\varphi$ een boogje bij F in van:

$$2k\frac{rd\varphi}{\sqrt{4k^2-r^2}}$$

Het eenvoudigst geven we de coördinaten in de ell. of hyperb. ruimte t.o.v. den oorsprong door den ell. of hyperb. afstand en de sferische coörd. van de verbindingslijn. **VI-b**

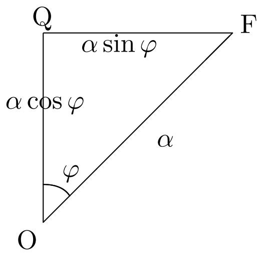
De afstanden op den bol om O met niet-Eucl. straal α zijn dan die op een gewonen Euclidischen bol met straal $\sin\frac{\alpha}{2k}$, resp. $\mathrm{Sh}\frac{\alpha}{2k}$.

VI-c

De Diff. Vgl. van Laplace

In elliptische maatbepaling

$l = K' i \log D$
Geheele r. lijn $= 2K'\pi$
Neem $K' = \frac{1}{2}$



Absoluut oppervl.: $x^2 + y^2 + z^2 + 4k^2h^2 = 0$
Voor $z = \alpha h \cos\varphi$ absolute kegelsnede: $x^2 + y^2 + (4k^2 + \alpha^2\cos^2\varphi)h^2 = 0$
Elliptische lengte van QF:

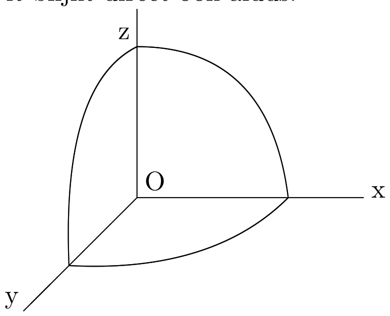
$$\text{bgsin}\frac{\alpha\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\varphi + 4k^2 + \alpha^2\cos^2\varphi}} = \text{bgsin}\frac{\alpha\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}$$

In het vlak door $Q \perp OQ$ sluit nu een middelpuntshoek in Q van $d\vartheta$ een boogje bij F in van:

$$\frac{\alpha\sin\varphi d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}$$

(in een toevoeging, gedeeltelijk tussen de regels en gedeeltelijk onderaan:) Nemen we den straal van een hypersfeer van afbeelding 2k, dan komt er een factor 2k bij.

Dit blijkt direct ook aldus:



Laat het boloppervlak in R_4 wentelen om YZ, dan beschrijft elk punt een cirkel met als straal zijn loodr. afstand in R_3 tot het vlak YOZ, d.i. $\sin\alpha_{ell.}\sin\varphi$

(einde toevoeging)

Elliptische lengte van OF: bgsin$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}$
(kantl:) ⟨Opmerking als boven⟩

Dus $d_{ell.}(OF)$ wordt: $\frac{2k}{\alpha^2+4k^2}d\alpha$

En in het vlak van teekening sluit een middelpuntshoek in O van $d\varphi$ een boogje bij F in van $\frac{\alpha d\varphi}{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}$ *(kantl.)* ⟨opmerking als boven⟩

Zij V de krachtfunctie, dan zijn de krachtontbondenen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial \vartheta}.\frac{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}{\alpha\sin\varphi} \\[2ex] \frac{\partial V}{\partial \alpha}.\frac{\alpha^2+4k^2}{2k} \\[2ex] \frac{\partial V}{\partial \varphi}.\frac{\sqrt{\alpha^2+4k^2}}{\alpha} \end{array}\right\}$$

Op de hypersfeer met straal $2k$ komt hier telkens een factor $2k$ in den noemer.

Krachtstroom naar buiten in de α-richting **VI-d**

$$\left(\text{uit:}d\vartheta d\varphi.\frac{\partial V}{\partial\alpha}.\frac{\alpha^2\sin\varphi}{2k}\right)$$

$$d\alpha d\vartheta d\varphi.\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}.\frac{\alpha^2\sin\varphi}{2k}$$

$$+d\alpha d\vartheta d\varphi.\frac{\partial V}{\partial\alpha}.\frac{\alpha\sin\varphi}{k}$$

Krachtstroom naar buiten in de ϑ–richting

$$\left(\text{uit:}d\varphi d\alpha.\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.\frac{2k}{\sin\varphi(\alpha^2+4k^2)}\right)$$

$$d\alpha d\vartheta d\varphi.\frac{\partial^2 V}{d\vartheta^2}.\frac{2k}{\sin\varphi(\alpha^2+4k^2)}$$

Krachtstroom naar buiten in de φ–richting

$$\left(\text{uit:}d\alpha d\vartheta.\frac{dV}{d\varphi}.\frac{2k\sin\varphi}{\alpha^2+4k^2}\right) \quad \textit{(moet zijn: } \tfrac{\partial V}{\partial\varphi}\textit{)}$$

$$d\alpha d\vartheta d\varphi.\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.\frac{2k\sin\varphi}{\alpha^2+4k^2}$$

$$+d\alpha d\vartheta d\varphi.\frac{\partial V}{\partial\varphi}.\frac{2k\cos\varphi}{\alpha^2+4k^2}$$

Differentiaalvergelijking voor ϑ constant:

$$\alpha\frac{\partial^2(\alpha V)}{\partial\alpha^2}+\frac{4k^2}{\alpha^2+4k^2}.\frac{1}{\sin\varphi}.\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)=0$$

(waaruit de vergelijking voor de Euclidische ruimte volgt, door den factor $\frac{4k^2}{\alpha^2+4k^2}$ = 1 te stellen).

Aan deze vergelijking voldoet:

$$V = \cot \alpha_{ell.} \qquad\qquad V = \frac{1}{\alpha}$$

$$V = \cos\varphi \left\{1 + \cot^2 \alpha_{ell.}\right\} \qquad\qquad V = \cos\varphi \left\{1 + \frac{4k^2}{\alpha^2}\right\}$$

Deze formule: *(bedoeld: de formule links onder)* $V = \cos\varphi \csc^2\alpha_{ell.}$ heeft als agens een dubbelpunt en een magnetische schaal in het poolvlak daarvan,⟨47⟩ met maximumsterkte in het verlengde van de magnetische as van het dubbelpunt.

. . . .

. . . .

⟨47⟩Deze formule: $V = \cos\varphi \csc^2\alpha_{ell.}$ ⟦behoort te worden genomen als grondformule van de potentiaaltheorie der elliptische ruimte⟧ heeft als agens een dubbelpunt en een magnetische schaal in het poolvlak daarvan,

Notes

[1]Het zesde schrift begint met zeventien pagina's potentiaaltheorie.

[2]Opeens, middenin de verhandeling over potentiaaltheorie, deze opmerking over Hilberts Festschrift.
Hilbert bouwt niet op, dat wil zeggen, niet in de zin van Brouwer, die uitgaat van intuïtief gekende gegevens (zoals het tellen en het continuüm) en van daaruit opbouwt. Hilbert daarentegen werkt formalistisch met een systeem van consistente axioma's in vijf axiomagroepen. Hij bewijst vervolgens de consistentie en in feite de uniciteit van een groep in zijn Streckenrechnung.

[3]Over het al dan niet aprioristisch zijn van eendimensionale empirische wiskunde.
– Het continuüm en de (ordinaal)aritmetiek zijn aprioristisch.
– Succesvol kunnen toepassen van de ordinaalaritmetiek op het continuüm is empirisch.

[4]Het continuüm in Dedekindse zin: zie *Stetigkeit und irrationale Zahlen.*

[5]*De rest van deze pagina behandelt potentiaaltheorie.*

[6]Zie Klein, *Nicht–Euklidische Geometrie,* 189, deel II, pag. 8 e.v.

[7]Dit tegen Russells *Fondements de la Géométrie* die de aprioriteit van de homogeniteit der ruimte stelt (hst. III en IV).

[8]Weierstrass construeert een functie zonder afgeleide, maar daarom is een empirische kromme nog wel intuïtief continu.

[9]Er zijn de axioma's 1, 2 en 3 van de bewegingen uit Grundlagen M.A. en er zijn de vijf axioma groepen uit het Festschrift.
Hier lijkt bedoeld te zijn de axioma's uit de Grundlagen M.A.; dat het empirisch klopt is niet vanzelfsprekend.

[10]Het *fictief continuüm:* de rationale schaal, af gedacht en 'fictief nauwkeurig en fijn zonder perk' (V–20)
Hoofdelement (verdichtingspunt of limietpunt, zie Cantor, Begründung § 10) is een element, zodat elke omgeving van dat elment andere elementen van het fictieve continuüm bevat.
Grenselement is een element a, waarbij er een n bestaat, zodat $\forall n' \exists \varepsilon |t_{n'} - a| < \varepsilon, \forall n > n'$, dus limiet van de rij (zie § 10 Cantor Begr.)

[11]Een doorgehaald fragment, geheel over § 10 van Cantors *Begründung. ϑ is het ordetype van het lineaire continuum* $(0, 1)$ *en* π *de rij der niet-Archimedische getallen.*

[12]De constructie van een **Q**-schaal in een p-tallig stelsel op het intuïtieve continuüm.

[13]Het 'materieel continuüm'; vergelijk hiermee het fysisch continuüm van Poincaré.

[14]Russell, § 64 van *Fondements de la Géométrie.* § 60 t/m 65 behandelt de filosofie van Riemanns wiskunde. Russell stelt dat Riemanns begrip *grandeur* alleen van toepassing is op ruimte en nergens anders op. Zie Brouwers kritiek hierop.

[15]'Alle punten op een lijn' kan niet volgens Brouwer, want daar is immers geen algoritme voor.

[16]Over de zelf opgebouwde wiskunde. Hierin alleen kunnen grondoordelen (logische axioma's?) exact worden opgesteld. Zonder opgebouwde mathematische elementen, waarop logica wordt toegepast, is de logica imhoudloos.

[17]In het nu volgende gedeelte wordt gedacht over een polemiek tussen Russell, Poincaré en Couturat, gepubliceerd in de *Revue de Métaphysique et de Morale* (R.M.M.) 1904, 1905 en 1906, naar aanleiding van Russells *Principles of Mathematics,* waar in het nu volgende ook veel naar verwezen wordt.

[18]In hoofdstuk III van zijn *Principles of Mathematics* bespreekt hij Implication en Formal Implication, in § 40 de *formal implication* versus de *material implication.*

[19]Russell, *Principles of Mathematics*, hoofdstuk III.

[20]Het artikel van Couturat *Pour la Logistique* uit R.M.M. 1906 (année 14). Couturat betrekt hier Poincaré en Russell in een grondslagen discussie. Een aantal Fondements worden vergeleken: Peano, Hilbert, Frege.

[21]In het vierde hoofdstuk van *Principles of Mathematics* worden classes behandeld; in § 78 van dit hoofdstuk 'The Contradiction'.
Verder in het tiende hoofdstuk (The Contradiction) in § 104 'The contradiction arises from treating as one a class which is only many'.

[22]Reflecties over de oplossing. Couturat bespreekt Russell ook in *Pour la Logistique,* maar in dezelfde uitgave van R.M.M. (1906, année 14) schrijft Russell *Les Paradoxes de la Logique.*

[23]Merk op dat § 236 moet zijn *pagina* 236.

[24]Het citaat is van Couturat, *Pour la Logistique,* pagina 242.
'Cout. Princ.' is *Les Principes des Mathématiques,* verschenen in R.M.M. 1904, 1905 (année 12 en 13), en ook apart als boek uitgegeven in 1905. Pagina 58 van de boekuitgave behandelt ook getallen als klassen.
'Russell Princ.' is zijn *Principles of Mathematics.*

[25]Pag. 498 van de Engelse editie!

[26]Couturat *Pour la Logistique,* pag. 243, 244.

[27]Couturat *Les Principes des Mathématiques,* pagina 18. Dit komt voor in het eerste hoofdstuk *Principes de la Logique,* § B *Calcul des Classes.*

[28]Dit artikel is het vervolg op het eerste deel uit R.M.M. 1905 (ann. 13) van *Les Mathématiques et la Logique,* van Poincaré, en staat in R.M.M. 1906 (ann. 14). Het citaat staat op pag. 18 hiervan.
Het is een bespreking van de Heidelberg lezing van Hilbert. Hilberts definitie van dingen en toegestane combinaties daarvan wordt uitgelegd. Dan begint (begin § XX) het citaat.

[29]Pag. 20 van genoemd artikel van Poincaré, de laatste zin van § XIX; de inhoud is duidelijk.

[30]Hier, op pag. 20, § XX van hetzelfde artikel wordt op de manier van volledige inductie geredeneerd.

[31]Deze beschouwing van Brouwer over de logica is een reactie op het artikel van Poincaré.

[32]Over het bouwen en de rol van de intuïtie hierbij; er zijn wel symbolen nodig ter duidelijke onderscheiding, maar intuïtie blijft de basis.

[33]Zie Russell; zie ook het Poincaré artikel, pag 21. e.v. (R.M.M. 14), en met name het Couturat-artikel in R.M.M. 14 § IV, pag. 241 e.v., waar Couturat reageert op Russell.

[34]Poincaré in zijn conclusies van het artikel *Les Mathématiques et la Logique,* R.M.M. 14 (ann. 1906), over 'vermomde definities' (het principe van volledige inductie, de postulaten van Euclides en 'de wet, volgens welke fosfor smelt bij 44 graden'.)

[35]§ 25 van bovengenoemd artikel van Poincaré, over de 'replâtrage' van Hilbert.

[36]Contradicties (Russell, Burali-Forti), volgens Brouwer ten gevolge van het ongerechtvaardigd gebruik van de logica, namelijk buiten het reeds opgebouwde.

[37]R.M.M. 14, *Pour la Logistique,* tegen het ongerechtvaardigd gebruik van de logica.

[38]Het eerste deel van het artikel van Poincaré, *Les Mathématiques et la Logique.* Het laatste gedeelte hiervan (pag. 832 e.v.) gaat over rekenkunde, uitgaande van de Peano axioma's: het bezien van de consequenties van het principe van volledige inductie. Hoe weet ik dat een getal, dat aan de axioma's, en in het bijzonder aan de inductie, voldoet, een natuurlijk getal is?

[39]Wederom het artikel *Pour la Logistique* van Couturat.

[40]Zie R.M.M. 13 (ann. 1905) *Les Mathématiques et la Logique* van Poincaré, pag.834.

[41]Zie Russells *Principles of Mathematics,* § 78 (hst. VI) en hst. X, maar ook de artikelenserie uit R.M.M. 13 en 14, die een polemiek bevatten over Russells *Principles of Mathematics.*

[42]Hier ongeveer houdt de polemiek uit de R.M.M. op en komt de vraag van Brouwer aan de orde, die ook in de dissertatie uitvoerig besproken wordt, namelijk welke verzamelingen er op het continuüm te definiëren zijn. De discussie hierover loopt tot het einde van dit schrift.
Sommige reële getallen zijn aan te geven door middel van een reeks, en zijn dus algoritmisch bepaald.
Ieder reëel getal is aan te wijzen, dankzij de continuümintuïtie.
In dit gedeelte zien we al, dat Brouwer ontdekt dat met behulp van een algoritme het continuüm nooit geheel te beschrijven is. Er wordt hier al met het idee van *keuze* geëxperimenteerd.

[43]Dus eerst een wiskundig systeem bouwen van, in dit geval, transfinite getallen, dan pas logische relaties zoeken, en niet omgekeerd.
De verwijzing naar Hilbert in *l'Enseignement Mathématique* betreft het artikel *Sur les Fondements de la Logique et de l'Arithmétique*, de Franse vertaling van Hilberts 'Heidelberg lezing' uit 1904. Het is opvallend dat Brouwer consequent de Franse vertaling van M.P. Boutroux bezigt (ook op vele andere plaatsen in de schriften), hoewel de originele Duitse tekst toch ook beschikbaar was. Hilbert stelt dat logica en rekenkunde tezamen en tegelijkertijd ontwikkeld moeten worden:

> Man bezeichnet wohl die Arithmetik als einen Teil der Logik und setzt meist bei der Begründung der Arithmetik die hergebrachten logischen Grundbegriffe voraus. Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe , z.B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl ins besondere als Anzahl bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich.

In *l'Enseignement* van 1906 werd Hilbert bestreden door Poincaré; zie schrift IX–1.

[44]Dus het 'bouwen' is zelf geen element van het bouwen; dit voorkomt de paradoxen.

[45]Vanaf hier en op de volgende pagina's tot pag 39 volgt een bespreking van Cantors *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre,* kortweg de

Grundlagen. Dit is een deel van een serie die in de M.A. 15, 17, 20, 21 en 23 verscheen onder de titel *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* Het gedeelte *Grundlagen* hieruit verscheen ook separaat als boek en van deze boekvorm maakt Brouwer gebruik, getuige de verwijzing naar pagina nummers.

[46]In deze noot 11 (zu § 10) van de *Anmerkungen des Verfassers* begint Cantor met de opmerking:

> Von den perfekten Mengen läßt sich der Satz beweisen, daß sie die Mächtigkeit von (I) niemals haben.

Vervolgens geeft Cantor een voorbeeld van een perfecte puntverzameling die in geen enkel interval overal dicht is.

> Als ein Beispiel einer perfekten Punktmenge, die in keinem noch so kleinen Intervall überall dicht ist, führe ich den Inbegriff aller reellen Zahlen an, die in der Formel
>
> $$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + ... + \frac{c_\nu}{3^\nu} + ...$$
>
> enthalten sind, wo die Koeffizienten c_ν nach Belieben die beiden Werte 0 und 2 anzunehmen haben und die Reihe aus einer endlichen, wie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern bestehen kann.

[47]Deze kantlijntoevoeging spreekt over de Menge hierboven beschreven. Het gaat om het continuüm versus de lacunaire verzameling (de Cantor verzameling, zie de vorige voetnoot). Gelijkmachtigheid kan dan. Dit is uitgewerkt in de dissertatie.

[48]In deze en de voorgaande paragrafen (pag. 36) is Brouwer bezig met de door Cantor gegeven verzameling ‘het continuüm minus de rationale getallen’. Cantor beschrijft deze mogelijkheid in het eerste artikel van de reeks *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten* en Brouwer neemt deze mogelijkheid over in zijn dissertatie (pag. 66). Op deze pagina van het zesde schrift onderzoekt Brouwer of deze manier van definiëren van een puntverzameling een juiste is. Later, in de Addenda en Corrigenda bij de dissertatie (1917), laat hij deze mogelijkheid achterwege.

[49]Cantor bespreekt in § 8 van de *Grundlagen* de existentie van (gehele) getallen, eindig en oneindig. Volgens Cantor hebben getallen een bestaan in ons verstand op grond van de definities, maar daarnaast ook een bestaan in gebeurtenissen en onderlingen betrekkingen in de buitenwereld, en deze twee gaan altijd samen. Dus wij kunnen ons bij de ontwikkeling van mathematische objecten beperken tot de eerste immanente realiteit en wiskunde als *vrije of zuivere wiskunde* beoefenen. Wiskunde is in zijn ontwikkeling een vrije schepping met als, voor Cantor

logische, beperking dat bij de invoering van nieuwe getallen definities gegeven worden, waardoor ze in overeenstemming zijn met reeds bestaande getallen. Zie het citaat.

[50]Voor Brouwer is er dan geen sprake meer van een *vrije* schepping.

[51]Een *reductibele verzameling* is een verzameling R, waarvoor er een getal n bestaat uit de eerste of de tweede getalklasse, zodat de n^{de} afgeleide van R leeg is, dus $R^{(n)} = \{\}$

[52]Merk op dat Brouwer hier toch bezig is met het idee van derde getalklasse, als het geheel van generering van getallen van de tweede klasse. Dit is dus het Cantorse idee van een 'affe' tweede getalklasse. Zie echter de volgende voetnoot.

[53]Van *alle* getallen kan, in het geval van de reële getallen, niet gesprokem worden. Dit is echter niet in directe tegenspraak met de vorige voetnoot, daar het immers niet vaststaat dat het systeem van de tweede of derde getalklasse overeenstemt met dat van de reële getallen.

[54]'Implication formelle'. Zie Couturat, *Les Principes des Mathématiques*, Introduction, p. 4. Couturat bespreekt in zijn inleiding de benadering van Russell. De 'V' is het symbool van Couturat voor 'altijd waar'.

[55]Zie Couturat *Les Principes des Mathématiques,* pag. 12, waar $\vee$ is 'le vrai' en $\wedge$ is 'le faux'.

[56]Russell, *Principles of Mathematics,* deel I. *The Indefinables of Mathematics,* hiervan hoofdstuk VI *Classes,* § 73, over de nulklasse en de moeilijkheden daarmee.

[57]Zie § C, *Calcul der Relations* van *Les Principes des Mathématiques* van Couturat.

Dus zo'n postulaat hoeft niet gesteld te worden, som en product zijn intuïtief evident en de stellingen daarover bewijsbaar.

[58]De toevoegingen a, b, c en d gaan over maatbepalingen ds in de hyperbolische meetkunde.

Chapter 7

Schrift VII

Die singulariteiten, die wij met onze algebraische krommen krijgen, bewijzen, hoe slecht wij de intuitieve natuur met ons intellectueel bouwen kunnen benaderen. ⟨Althans met de intellectueel eenvoudigste functies gaat het slecht⟩ (wèl op een beperkt gebied, maar willen we het algemeen laten gelden, m.a.w. de inductie toepassen, dan stooten we direct tegen singulariteiten.[1] **VII-1**

....

[Bij de algemeene bepaling van distr. uit zijn tweede afgel. in Niet-Eukl. moet op analoge wijze als in Dictaat pot. theorie de stelling van Green worden gebruikt.[2]

Men bedenke, dat in R_n een V_p en een V_q twee producten hebben:
een V_{p+q} (of als $p+q>n$: V_{2n-p-q})
en een V_{n-p+q} (of als $n-p+q>n$: V_{n+p-q})

....

Bij de stelling van Green wordt gewerkt met $\int_{\cos_\pi}(VV')dk$ voor een ${}^1_0V$. Dit nu eerst te veranderen voor een ${}^1_2V$.

....

Moet ik hier misschien met het $\sin_\pi$ werken? M.a.w. met ⟨het⟩ product van die normaal (uit V_p en V_{n-p}), die integraal heeft langs gesloten R_h?⟨1⟩

....

Waarschijnlijk niet, want het $\cos_\pi$ is niet het prod. van 2 planivectoren, maar van lijn- en planivector.

⟨1⟩M.a.w. met ⟦dit⟧ product van die normaal (uit V_p en V_{n-p}), die integraal heeft langs gesloten R_n rij⟧ ?

. . . .

Hoe werkt de wiskunde op het artiestengemoed? Als een ziekelijk idée fixe, waaraan zeer veel menschen lijden.

Maar ook dat gezicht van den artiest is eenzijdig, want hij ziet als zuiver leven dat van een mensch in zijn vrijen tijd, en niet met den vloek van den arbeid, die drijft tot het zich opsluiten in een idée fixe (waar dan tegen een zwakke plek van het bestaan gestreden wordt.)

. . . .

VII-2 Uit het feit dat we met ⟨'*alle* eindige getallen'⟩ *werken*,⟨2⟩ *) volgt dat we impliciet al het ⟨essentieele⟩ werk der mathem. logica gedaan hebben, n.l. werken met in eenheden afgegrensd gedefinieerde axioma's, waar niets oneindigs meer in voorkomt.

*) *(kantlijn:)* ⟨of überhaupt wiskundig werken met de taal, en haar eindig aantal woorden⟩ ,

. . . .

De hyperb. meetk. is de meetk. op de bol van de punten met zuiver imag. voerstraal vanuit den oorsprong.[3]

. . . .

[Het volgt uit de afbeelding op Eucl. ruimte, dat voor de hyp. R_2 er zooveel vectordistr. zonder *rot.* en *div.* met eindige energie zijn, als je wil. In hoogere hyp. ruimten echter zijn ze er niet.

. . . .

Heb een ^{n}element A en zet in elk punt een snijdend ^{m}element B, dan komt een ${}^{m+n}$element, waarvan de begrenzing bestaat uit

1^e alle elementen B, opgericht in de begrenzing van A (samen een $(m+n-1)$ ruimte).

2^e de $(m+n-1)$-ruimte, waarin men kan voortgaan in een der richtingen van A of langs een begrenzing van een der B's.

. . . .

De beide lijn-afgeleiden van een scalardistr. (en dus ook de 2 soorten van ⟨bijz.⟩ scalardistr., die b.v. in een sferische ruimte duidelijk uitkomen) doen vectoren met negatieve (of aantal $> n$) dimensies aan de hand.]

VII-3 Bij *elke* wetenschap en ook bij *elke* daad kun je vragen: Zoo? En wat dan nog?

⟨2⟩ Uit het feit dat we met ⟦Grondsl. v. Wisk.⟧ *werken*

. . . .

Het mathematisch substraat van de logica is òf van eindige puntenverzamelingen òf ⟨voor de feitelijke toepassing op algemeenheden*(?)*⟩ een anal. sitale lijn of vlak.

. . . .

De 'verbindingslijn' van 2 punten, die de punten van het platte vlak in twee groepen verdeelt, schijnt logisch ook te zijn te krijgen, door de rechte lijn te nemen als een 'relatie der twee punten' of een 'vereeniging der twee punten', ten opzichte waarvan een derde punt links of rechts kan liggen.[4]

. . . .

De lijn is de mysterieuze matrix van al die puntverzamelingen;[⟨3⟩] het oppervlak de mysterieuze matrix van al die krommenstelsels, die zich continu uit elkaar door 'beweging' vormen. *) Maar de matrices zijn primair.

*) *(kantl.:)* ⟨en dan zoo weer het heele oppervl. genereeren⟩

. . . .

Het axioma van Archimedes; wel, voor wat ik zelf heb opgebouwd *) spreekt het van zelf.

Het axioma zegt ⟨van het opbouw-standpunt⟩ iets van den vorm: 'niet nog bovendien dat'; met hetzelfde recht kan ik er aan toevoegen:'niet nog bovendien een koe'.

*) *(kantl.:)* ⟨d.i. de reëele getallen met hun opt. en verm. en uit de eendim. get. de Zahlenraum.⟩

. . . .

Maken jullie van het continuum niets, dan een relatiesysteem tusschen een groep van punten: des te beter voor degeen, die dat heele systeem uit een enkele intuitie afleest.

. . . .

Ik kan de punten van het lineair continuum niet noemen, maar aanwijzen (of althans mij denken, dat ik ze aanwijs);

(volgt nog een slechts gedeeltelijk leesbaar fragment.)

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Bij een intuitieve R_n moet ik ⟨niet⟩ zeggen: ze ontstaat door **VII-4**

⟨3⟩ De ⟦rechte⟧ lijn is de mysterieuze matrix van al die puntverzamelingen;

beweging van een lijn, dan van een vlak enz., want zoo worden niet alle krommen enz. gelijkwaardig: neen; ik abstraheer achteraf uit de intuitie (zooals uit elk ding van de wereld), zijn eigenschappen. ('coupures' van Poincaré; uit dit 'coupure' continuum is volgens Frischauf de meetkunde op te bouwen.)[5]⟧

(kantlijn:) ⟨Het coupure-continuum van 2 of meer dimensies is empirisch, niet intuitief.⟩

. . . .

Ik kan uit de Punktmenge wel zeggen, dat ik het continuum opbouw, alleen kan ik niet spreken van de 'machtigheid' er van, want deze Menge is ⟨in haar opbouw uit individuen gewoon de 2^e getalklasse, en dan 'abzählbar'⟩ en 'nicht fertig'.[6]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het is de vraag, of het 'fertige' intuitieve contin. v. 2 dim. gelijkmachtig is met dat van 1 dim. waarschijnlijk niet. [7] ⟧

. . . .

Intusschen kan ik alleen het eendim. cont. gebruiken om op te bouwen (dat is de intuitie van den *tijd*, die primair is), het meerdim. voel ik, niet zelf te kunnen bouwen (het is de ruimte, het vijandige buiten mij, geen veruiterlijking van mijzelf).[8]

En zoo ook, als ik mijzelf tegen de ruimte veruiterlijk, breng ik er eendim. coördinaten op aan (eendim. continu veranderende verschijnselen, b.v. maat. maar ook b.v. hoek, of temperatuur ⟨of luchtdruk der plaats⟩ , en voer die in als coördinaten.

. . . .

Het geraamte v.h. vlak volgens Mannoury heeft de vrije bewegelijkheid. Volgens Lie, maar niet volgens Hilbert Festschr. als men dat geraamte maar ziet als ag(*g*)lomeraat van alle punten met rationale cordinaten.[⟨4⟩]

. . . .

VII-5 [Kunnen de draaiingen van het planetenstelsel niet het gevolg zijn van de geleidelijke omkeering der indicatrix bij rondgang door de ruimte?

. . . .

De determinantsinhoudsformule van het simplex, d.w.z. de verhouding van den vector (de volgorde der hoekpunten) v.h. simplex tot den vector

---

⟨4⟩ *Deze paragraaf is gelardeerd met onleesbare doorhalingen.*

$X_1X_2X_3 \cdots X_n0$. (als 1 2 3 ... n de volgorde der coördinaten in de determinant-formule is.)]

. . . .

De 'Endenrechnung' der hyperbolische meetkunde van Hilbert en Schur gaat voor het platte vlak goed; omdat de tweedegraadsbegrenzing hier homoform is met de ⟨isodimensionale⟩ eerstegraadsuitbreiding, (cirkel met rechte lijn) dus de projectiviteit op beide een analoge rol speelt. Maar dat gaat voor hoogere ruimten moeilijk meer.[9]

(kantlijn:) ⟨En ⟨het proj. karakter der Endenrechnung, dus haar plaats in den opbouw⟩ , komt bij Hilberts axiomatische behandeling niet te voorschijn.

Men beschouwe echter zulke ontw. als van Hilbert ook als het opgebouwd gebouw vooronderstellend, en een uniciteit bewijzend. Dan is er niets tegen.⟩

. . . .

Wiskunde bedrijven – op zichzelf – leidt minder van het centrum af, dan ⟨kijkende (Faradaysche, d.i. niet afgegrensd*(?)*)⟩ natuurkunde bedrijven – op zichzelf.

. . . .

Je komt vooruit in de wereld:

1^e door de rol van valschheid, kliekgeest en vleierij.

2^e door de rol van naieve royale eerlijkheid (die intusschen alleen kan worden gedragen door een grond – algemeene valschheid, die weer alleen kan bestaan door een domme valschheid tegen zichzelf.)

. . . .

De universiteit dient ⟨naar haarzelf⟩ de band te zijn tusschen de wetenschap **VII-6**
en haar doel voor de menschheid.

. . . .

[*Naar aanl. v.d. veldeigenschap der hyperbolische ruimte*[1] *) Voor eindige energie zou ook nog in uitzonderings-oneindig kleine gedeelten van het bolop-pervlak de potentiaal anders dan 0 kunnen zijn. Maar noemen we die functie ϑ, dan gaat ook voor de ϑ–functies door de stelling der pot.–functies, dat er geen mogelijk is met nergens divergentie.

En die eene mogelijke ϑ-functie voor gegeven veld voor waarden van *(onleesb. doorh.)* *rot*. en *div*. blijkt dan achteraf toch een met de veldeigenschap te zijn.]

*) *(kantl.:)* ⟨voorzoover gesteund op de voorwaarde van minimum energie.⟩

---

[1] Eén paragraaf potentiaaltheorie.

. . . .

Mijn beweringen niet te leren in het dagel. leven; daar storen ze.

. . . .

Tot de veruiterlijking van jezelf door rechtlijnige daden, hoort het lichtzinnig postuleeren van 'gewoonten' in de natuur (en zich dan in zijn attentie tot dié dingen van de natuur *) te beperken, en toekennen aan die gewoonten van wetten volgens je eigen veruiterlijking **) (evenwichtsvoorwaarde, mechanische verklaring), om ze op grond van die wetten te kunnen bestrijden of behandelen.

*) *(kantl.:)* ⟨die, daar je ze wilt zien, er natuurlijk zijn⟩
**) *(kantlijn:)* ⟨zooals MichelAngelo in een stuk marmer een beeld 'vooruitziet', wat niets is dan een medium tot eigen daad; zoo ziet een mensch het rechtlijnige substraat in de natuur, om dat te versterken tot zijn eigen rechtlijnige veruiterlijking.⟩

. . . .

VII-7 De functies der natuur postuleeren we alleen *continu* en dat is zuivere menschenveruiterlijking.
Maar dat na-bouwen uit onze eigen schepping: de 'analytische' functies, is (⟨Faraday⟩-physisch) zonder waarde.

. . . .

Dat wij *merken*, dat in de natuur in 't oneindig kleine de continuiteit niet blijft, doet er niet toe. Onze veruiterlijking is nu eenmaal, ons geen plotselinge sprongen te kunnen denken, maar continue segmenten van verandering en dimensielooze punten *zonder* verandering. De oneindig kleine deeltjes geven wij toch weer opnieuw kleine afmetingen, die continu verloopen.

. . . .

Een axiomatisch systeem is een wiskundig systeem van kombinatoriek. Maar het intuitieve meetkundige systeem is veel eenvoudiger.[10]

. . . .

(Hilbert Festschr. § 3) Het *bestaan* van het 3de punt moet toch eerst nog worden bewezen.

. . . .

Er is een bewegingsgroep der rationale punten: neem maar die lineaire bewegingstransformaties, die reëele coëfficienten hebben.

. . . .

Beschouw de moleculairhypothese als middel om uit niet-eenvoudige relaties door de wet der groote getallen, eenvoudige af te leiden.

. . . .

Een *niet*-Desarguessche *ruimtegeometrie*, waar alle lijnen elkaar in hoogstens één punt snijden, krijgen we door de meetk. v. Hilbert Festschr. p. 51 te zetten in elk vlak, dat de X-richting bevat.[11] **VII-8**

. . . .

[In het betoog van het krachtveld der hyperbolische ruimte ontbreekt een schakel, n.l.:[12] Heeft een $X_{rot.}$ de veldeigenschap, dan heeft ook haar $\int \nabla . F_2(r)$ de veldeigenschap. (Immers anders kon het door de rotatie eenduidig bepaalde veld, wel iets anders zijn dan de $\int \nabla . F_2(r)$, die er door een inwendige bolfunctie van zou verschillen. *(onleesbare doorhaling)*

Die schakel is waarschijnlijk licht aan te vullen (zie 4 pag. verder)

(kantlijn, doorgehaald:) ⟦Immers $F_2(r)$ geeft werklelijk de functie van minimum energie⟧

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Want een inwendige bolfunctie heeft waarschijnlijk steeds oneindige energie. En een ‘veld’ heeft eindige energie. Tenminste als we als veldvoorwaarde voor $n > 3$ stellen: alle krachtontbondenen van lager orde dan e^{-r}.⟧

Om de consequentie van *rot.* en *div.* voor de inw. bolf. der Euclidische ruimte te trekken, wordt ze het best beschouwd als limiet van een hypersfeer.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦We gaan daartoe na vectordistr. in ’t oneindige ⟨d.w.z. beginnend vanaf een zeer groote r, met de veldeigenschap⟩ voor Eucl. en hyp. ruimte, gesplitst in de distr. volgens de voerstraal, en loodr. op de voerstraal, en kijken, in hoeverre elk dier distr. iets geeft als $\int \nabla . F$ **VII-9**

Geven ze niets, ⟨dat niet de veldeigenschap heeft⟩ , dan is de ontbrekende schakel bewezen.

. . . .

Maar gesteld eens dat dit zoo was, dat dus $\int \nabla V . F(r)$ minder oneindig klein werd, dan V. Dan zou dus $\int \nabla V . F(r) \equiv V'$ zijn te schrijven als $\int \nabla . F$, maar dan toch zeker ook wel de nog erger oneindig klein wordende V. Maar dan is ook $V = \int \nabla V . F(r)$. ⟧

. . . .

[Je kunt altijd twee bollen in hyperb. ruimte met hun oppervlak tegen elkaar gezet denken, en zoo een gesloten ruimte vormen. De limiet hiervan wordt twee volledige hyperb. ruimten tegen elkaar aan.]

. . . .

VII-10 Het onderzoek van bolbeleggingen door inw. bolfuncties, is hierin gewettigd, dat de willekeurige vectordistr. wordt veroorzaakt door:

1^e agens in 't eindige
2^e rotatie in 't eindige
3^e bolbelegging in 't oneindige.

Een distr. zonder een van drieën bestaat niet.
Valt 3^e weg, dan hebben we zgn. 'veld'

. . . .

[Van een distr. met alleen ⟨rotatie (dus geen agens in 't eindige of bolbelegging in 't oneindige)⟩ zijn alle krachtbuizen in 't eindige gesloten, ook al is er ⟨oneindig⟩[⟨5⟩] ver ⟨nog⟩ rotatie: om de distr. bij die ⟨oneindig verre⟩ rotatie te volgen, moet ik krachtbuizen nóg weer oneindig maal zoo ver volgen, maar den bol in 't oneindige bereik ik nooit.]

. . . .

(doorgehaald, t/m de gehele volgende pagina:) ⟦Wil ik dus voor Eucl. of hyp. ruimte een formule opstellen, onafhankelijk van de veldeigenschap, dan moet ik drie termen nemen. Het is nu maar de vraag, of ook de term onder 3^e is te
VII-11 splitsen in elementair- ‖ velden. In elk geval gaat het door ontwikkeling naar bolfuncties.[⟨6⟩]

Stel ik heb een $V_{rot.}$, dus zonder agens en zonder bolbelegging in 't oneind., (die zich in 't eindige zou kunnen doen gevoelen), dan heeft de som van al de geisoleerde vectoren daarvan ook geen bolbelegging in 't oneindige; dus ook ⟨niet⟩ de som van de uit de geisoleerde vectoren afgeleide rotatiedistributie (immers niet de er uit afgeleide agensdistr.) *)

*) *(kantlijn, eveneens doorgehaald:)* ⟨volgens de gewone potentiaaltheorie op grond van veldeigenschap; immers daaruit is deze agensdistr. gelijk aan de gedeelten 1^e en 3^e samen, en niet de vectordistr. zelf.⟩

Deze laatste kan dus niet door een inw. bolfunctie van de $V_{rot.}$ verschillen, moet dus zijn $= V_{rot.}$.

Hiermee is de schakel, bedoeld 3 pagina's vroeger, aangevuld.

. . . .

⟨5⟩ I.p.v. onleesb. doorh.)

⟨6⟩ *Deze gehele bladzijde is doorgehhald*

Maar tevens is gebleken, dat we ten opzichte onzer $V_{rot.}$ alleen gerust kunnen zijn, als we een veldeigenschap stellen, die uitwerkt, dat er geen bolbelegging in 't oneindige mogelijk is, die in 't eindige invloed heeft. *)

*) *(kantl.:)* ⟨Anders moeten we maar een nieuwe voorwaarde stellen, die veldeig. en deze laatste eigenschap samen insluit. Overigens is dat waar: het volgt er uit volgens het theorema van Green. Alleen voor R_2 niet: daar brengen de elem. velden zelf agens in 't oneindige aan.⟩

Voor hoogere hyperb. ruimten is hieraan waarschijnlijk voldaan. Niet voor de hyperbolische R_2.⟧ *(einde doorhaling)*

[De elementairvelden voor hoogere ⟨hyp.⟩ ruimten dan R_2, hebben geen agens in 't oneindige. Die van R_2 wel.] ⟧

. . . .

[Intusschen is ook de volgende redeneering juist: **VII-12**
Hyp. R_n voor $n \geq 3$. Een vectorveld = som van zijn geisol. vectoren = som van zijn elementairvelden van *div.* + som van zijn elem. velden van *rot.*

$=\nabla\int\nabla.F_1$ (waar onder het agens ook dat in 't oneindige moet worden geteld)
$+\nabla\int\nabla.F_2$ (waar onder de rotatie ook die in 't oneindige moet worden geteld);

(de rest van de pagina is doorgehaald)

⟦maar die kunnen we ook weglaten, want velden met alleen *rot.* in 't oneindige zonder *div.* in 't oneindige zijn er niet; de velden van *rot.* in 't oneind. worden dus reeds bij de velden met *div.* in 't oneindige meegeteld.) Alleen voor R_2 moet de stoornis, dat het gevonden elementairveld zelf oneindigheidsverhoudingen invoert, die op zichzelf invloed in 't eindige kunnen hebben.

. . . .

Noem oneindigheidsafgeleiden met werking in 't eindige F. Stel dan V is vrij van F. ⟨Dit is 't geval als in 't oneindige te klein voor binnenbolfuncties⟩ De gevonden afgeleiden in 't eindige A_1, zijn samen met de complementaire A_2 in 't oneindige de volledige A. Maar stel nu een veldeigenschap ⟨van te klein voor binnenbolfuncties⟩ . Dat bewijst, dat ⟨we een⟩ A_2 ⟨hebben, die⟩ geen veld kan veroorzaken.

Maar dan is ook het veld van A_1 het werkelijke.

Stellen we dus de veldeigenschap van te klein voor binnenbolfuncties *), dan is het niet mogelijk, dat A_2 van invloed is, dus dan sluit de theorie.

*) *(kantlijn:)* ⟨en dat doet onze veldeigenschap bewijzen volgens theorie, dat geen binnenbolfunctie met veldeig. mogelijk is.⟩

. . . .

Heeft de volgens de $\nabla\int\nabla.F$ uit de afgel. in 't oneind. ⟨van een veldfunctie⟩ geconstrueerde functie werkelijk geen *div.* en *rot.* in 't eindige?

div. zeker niet, maar *rot*.? Ook niet, want elke binnenbolfunctie is gelijk aan zijn $\nabla \int \nabla.F$ Of wordt die geconstrueerde functie in 't eindige oneindig klein?⟧

. . . .

VII-13 (De *rot*. in 't oneind. van de vectorontbondene $\perp$ voerstraal wordt ⟨natuurlijk⟩ een stroomelement in 't oneindige loodrecht op die vectorontbondene.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het allergemakkelijkst zou de theorie worden, als we als voorwaarde stelden: 1^e de veldeigenschap 2^e alleen in 't eindige ⟨is er⟩ afgeleide⟧

(kantlijn:) ⟨Is de volgens $\nabla \int \nabla.F$ uit de afgeleide in 't oneind. van een veldfunctie geconstrueerde kracht in 't eindige oneindig klein?⟩

Ja, en hiermee is de zaak afgedaan. *) **)

*) *(kantlijn:)* ⟨Voor R_2 in de 2^{de} opvatting (zie stuk Versl.)[13] zou dat niet doorgaan, maar daar wordt uit den aard der zaak de eventueele afgeleide in 't oneind. van zelf meegeteld.⟩

**) *(kantlijn:)* ⟨De bedoeling van deze bewerking is, om uit eindformule de potentiaal, veroorzakt door de afgel. in 't oneind. weg te kunnen laten.⟩

Immers	agens	in 't oneind.	p. opp. eenh.	v. orde	$< \frac{1}{r}$
	rot	,,	,,	,,	$< e^{-r}$

Totaal	agens	in 't oneind.	v. orde	$< r^{-1}.e^{(n-1)}r$
Totale	rot.	,,	,,	$< e^{(n-2)}r$

Maar demping agens v. orde $e^{-(n-1)}r$, dus werking v.h. agens in 't oneind. van orde $< r^{-1}$ ⟨voor pot., van orde $< r^{-2}$ voor kracht⟩ . Dus is die werking 0.

Demping *rot*. v. orde $re^{-(n-2)}r$, dus werking ⟨v.d. *rot*.⟩ in 't oneind.⟨7⟩ van orde $< r$ voor vectorpot.; van orde 0 voor kracht.

. . . .

Intusschen blijkt nu meteen, dat *) voor veldeig. het voldoende is voor ontb. volgens voerstr., dat zij $< r$ wordt. Dus de potentiaal mag zelfs ∞ worden (in

⟨7⟩dus werking ⟦v.h. agens⟧ in 't oneind.

Eucl. ⟨ook, maar < orde r⟩), als maar < orde r^2. Dus juiste veldeigenschap:

$$\begin{cases} \text{ontb.} \quad \text{volgens} \quad \text{voerstr.} \quad < r. \\ \quad ,, \qquad\quad \perp \qquad \text{voerstr.} \quad < \frac{1}{e^r} \end{cases}$$

*) *(kantlijn:)* ⟨Tenminste als ook kan worden aangetoond, dat geen inw. bolf. mogelijk is, in 't oneind. van orde $< r$, hetgeen misschien wel ergens onder een uitgebreide discussie v.d. vgl. van Laplace is te vinden.⟩

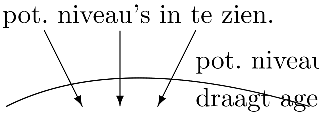
. . . .

Het is wel waar, dat de wiskundige logica niet veel anders is, dan dof-redeneeren op grond van enkele axioma's als pure symbolen; maar de wiskundige intuitie heeft daarmee niets te maken.

. . . .

Ik moet nu ook kunnen aantoonen, dat de Euclidische pot. formule ⟨in R_3 b.v.⟩ doorgaat voor elke pot. functie, die in 't oneind. wordt < orde r. Ten minste, als ⟨het waar is,⟩[⟨8⟩] dat er ook geen inwbolfunctie mogelijk is, waarvan de pot. in 't oneindige < orde r wordt. Het laatste is waarschijnlijk waar. *) Maar dan moet ook het eerste met Green zijn aan te toonen, en daaruit kunnen we dan weer het laatste streng bewijzen.

*) *(kantlijn:)* ⟨Het is meetkundig met van ∞ naar ∞ loopende vectordraden en pot. niveau's in te zien.



pot. niveau
draagt agens
v. orde $< r^2$

geeft een pot, in ∞ v. orde r⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Door een intuitieve continue lijn is niet heen te glippen, wèl **VII-14**
door een fictieve.[14]

. . . .

Zooals het leven de wiskunde tot vanitas maakt, zoo de logistiek de wiskunde.⟧

⟨8⟩ I.p.v. een onleesbare doorhaling.

(kantlijn:) ⟨2^ω is het ord. get., volgend op àlle getallen 2^p; het heeft als card. get. $\aleph_0$. Maar $2^{\aleph_0}$ is zelf een cardin. get., en volgt niet direct op de cardin. getallen 2^p.⟩

. . . .

(kantl.:) ⟨we spreken physica of meteorologie⟩

(Naar aanl. van Zermelo's bewijs) Het is niet waar, dat er een natuurwet mogelijk is, die in elke Teilmenge een element uitkiest. Je zou toch zeggen: ⟨*als* ik⟩ een levend individu een Teilmenge voorleg, en ik vraag hem er een element uit te kiezen, dan noemt hij er een (volgend uit zijn hersenstructuur), maar 1^e geldt dit alleen voor de definieerbare Teilmengen, en 2^e is het niet zeker, dat hij hetzelfde voorbeeld zou noemen, als ik hem dezelfde Teilmenge in 2 verschillende talen voorlei.[15]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦[Alle Cantorsche getallen der tweede getalklasse kan ik opschrijven met een eindig aantal teekens. Maar die teekens zijn de nieuw te vormen symbolen met behulp van het 'èn dat en zoovoorts' zoo b.v. stel $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \omega_1$; en het algemeene te vormen symbool bestaat uit een oneindige reeks van te vormen keuzen achter elkaar. (Immers hebben we een fundamentaalreeks van symboolvormingen, dan hoort ook het grenselement van die reeks tot onze symboolvormingen; nu hebben al die grens–symboolvormingen tezamen de tweede machtigheid. Dus ook de met een eindig aantal van zulke symbolen geschreven getallen der tweede getalclasse.]⟧[16]

. . . .

VII-15 *(Deze pagina is geheel doorgehaald:)*

Geef ik van het fictieve continuum het grenselement–axioma, dan volgt daaruit, dat het niet aftelbaar is.[17]

[Geef het cont. volgens 2-tallig stelsel.

De ⟨symbolen der⟩ 2^{de} getalclasse volgens de 2 voortbrengende operaties.

Dan kan ik beide op elkaar afbeelden, en het continuum raakt zóó 'wohlgeordnet' ('loopend geordend').

Zoo moet dan ook zijn op te geven het kleinste getal van :

$$\begin{array}{l} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,001 \\ 0,0001 \\ \textit{enz.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{0 wordt } +1 \\ \text{1 wordt ver-}\omega\text{-en} \\ \text{en herhalen} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega+1 \\ \omega+2 \\ \omega+3 \\ \omega+4 \\ \textit{enz.} \end{array}$$

en van:

$$\begin{array}{l} 0,1 \\ 0,11 \\ 0,111 \\ 0,1111 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega+1 \\ \omega^{\omega}+1 \\ \omega^{\omega^{\omega}}+1 \\ \omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}+1 \end{array}$$

Maar hier heb ik niet veel aan: ik beeld van beide zoo maar een klein deel af, en al wat ik van de beide hoeveelheden zoo kan krijgen, blijft aftelbaar.]

. . . .

[Beide (cont. en 2^e classe) bestaan uit de veelheid van ⟨recht tot⟩ 'prendre au hasard' (en elk 'prendre à hasard' is weer iets verschillends), en het bouwen op elk genomen element van een aftelbaar getallen lichaam. (bij 1^e bijvoorb. een rationaal systeem, bij 2^e een systeem volgens de Cantorsche normaalform)[18]

Maar nadre aanduiding van het 'prendre au hasard' is niet mogelijk, anders zou het vallen in een oud aftelbaar getallen lichaam. De ordening van de verschillende 'hasards' op het continuum, die ik achteraf empirisch merk volgens de oneindige decimaalbreuk mag ik bij mijn gelijktijdig of analoog 'hasard' bij de 2^e getalclasse willekeurig nét zoo, als bij zijn partner in het continuum postuleeren. Daarmee is dan alles quitt(*e?*)] ⟧

(Op de laatste paragraaf na is de hele pagina doorgehaald:) ⟦[Immers ik weet bij **VII-16**
ondervinding, dat de ω-voudige vrije keuze zich laat uitbreiden tot het 'prendre au hasard'. (bij het continuum). Dus moet het dat ook verdragen bij de 2^e getalclasse] ⟧

. . . .

De *wetenschap* is een vage aanvoeling van de natuur, waarop we onze veruiterlijking,[⟨9⟩] die toepassend op deelen der natuur, waaruit we een geheele natuur trachten op te bouwen, toepassen, en zoo krijgen we valsche illusore beelden, die alleen onze hoovaardij laat bestaan.

(kantlijn:) ⟨en de *wiskunde* is de rechtlijnige veruiterlijking, afgegrensd in 't hoofd.⟩[19]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦[De Wohlordnung der 2^e getalklasse bestaat in een Wohlordnung der verschillende lichamen er van; nu, en deze is bij het continuum ook direct aanwezig.]

. . . .

[Wordt het 'prendre au hasard' geprojecteerd op een aftelbare hoeveelheid, dan kán het niet anders dan door een (empirische) oneindige decimaalbreuk. [Eindige kan nooit, want dan zou het hasard weg zijn, en hadden we onze eigen ⟨gedefinieerde⟩ vrije schepping.][20]

. . . .

(Cantor, Begründung § 12A) Is fout: de Menge F' bestaat niet.[21] Ik kan daar niet spreken van *alle* elementen van F' en dan het daarop volgende nemen; ik moet dat volgende dan telkens opnieuw postuleren, als ik n.l. al het voorgaande al heb. Dus is ook fout § 13 O. *(volgt nog een onleesbare zin; einde doorhaling.)*

(kantlijn, eveneens doorgehaald:) Immers de Teilmenge kan 'onbekend' zijn en de ondergrens *(?)* van boven af benaderd worden.⟧

. . . .

T is niet op ω af te beelden door een eindige wet; maar T komt ook niet klaar door een eindig werk; maar, T vormende in oneindigen tijd, blijft zij onder haar vorming steeds op ω afbeeldbaar. En dat is het eenige wat ik kan zeggen. T is uit dien aard der zaak onaf;

VII-17 ω is af (door de math. inductie, die in ons is).

Het bewijs (Cantor Begründung § 16D) spreekt van *affe* ⟨fertige⟩ Fund. reeksen: die alleen hebben grenselementen, die ook tot T hooren (§ 15,c).

Hij bewijst alleen: de àffe T kan niet door een àffe fund. reeks worden voorgesteld.

Maar T is niet af, de kwestie zou dus over niet-affe Fund. reeksen moeten loopen, maar die kennen wij niet, die staan buiten onze veruiterlijking.[22]

[⟨9⟩] De *wetenschap* is een vage aanvoeling van de natuur, ⟦(hierbij ook het continu),⟧ waarop we onze veruiterlijking, *(kantlijn:)* ⟨Was c met de 2^e klasse aequivalent, dan zouden we dus c moeten kunnen zien, als aftelbaar onaf opgebouwd (wat Bernstein in Jahresber. 1906 beloofd heeft),[23] maar dat gaat niet, want ik construeer zoo alleen 'bekende' punten, kan dus alleen van 'bekende' punten ⟨eventueel⟩ bewijzen, dat ze komen; de 'onbekende', daar kom ik nooit aan, en ik kan er niets van zeggen; ze zitten in de c-intuitie en kunnen nergens mee in verband worden gebracht.⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦[Intusschen kan ik mij T af denken, als ik de probabiliteitszaak postuleer, dat ik een getal van T kan benaderen, door achtereenvolgens zijn deelen van rechts naar links te bepalen, te weten eerst het deel tusschen 1 en ε_0, dan tusschen ε_0 en de ε_0 van de machtigheid der ε-getallen. enz..

Zoo krijg ik achtereenvolgens T benaderingstermen.

Maar nu is deze T niet meer loopend geordend, en gaat ook haar machtigheidsbewijs niet meer door.] ⟧

. . . .

Wij hebben intuitief het 'neben einander' van eindige getallen in de intellectueele ⟨eendim. continue⟩ ruimte, en de ⟨zelfgebouwde⟩ 'wet' of ω ⟨voor vorming⟩ in den tijd.

. . . .

(Hilbert, Ueber den Zahlbegriff, Jahresber. 1900) **VII-18**

Van het volledigheidsaxioma geeft hij geen bestaansbewijs ⟨en kan ook niet worden gegeven⟩ , dat al niet reeds op de cont. intuitie is gegrond.

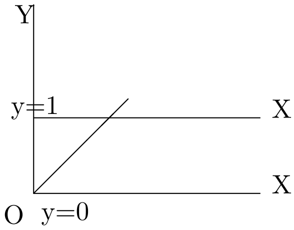
(kantlijn:) ⟨Vooreerst bedenkt Hilbert niet, dat Wid.spr.l.k. *alleen* kan blijken uit een Existenzbeweis.⟩

(kantlijn:) ⟨wat wij arithmetisch (d.i. zonder cont. idee) kunnen scheppen, kunnen wij *wèl* bewijzen, dat *niet* volledig is; maar daaruit valt niet tot de mogelijkheid van het volledige te besluiten.

Vgl. overigens Hilbert in Ens. Math. 7. Hij schijnt daar werkelijk vrij te komen van de cont. intuitie; *niet* van de inductie.⟩[24]

. . . .

De cont. int. is primair een meetkundige, daarom moet de meetk. analysis situs de grond zijn. We leiden dan uit I 1-6, III 1-4, II 1,2 af de meetkundige groep van (anl. sit.) 3 bundels: 2 parallel en een uit een punt, ⟨die de lijnen van een 4^{de} bundel op elkaar afbeelden.⟩[25]



1^o lijnen // Y–as, verplaatsen het X–systeem op parallelle lijnen. (de lijnen // X–as.)

2^o lijnen // $x = y$, die het X–systeem op parallelle lijnen verplaatsen na optelling van een constante.

3^o ⟨kromme⟩ lijnen door het punt O, die het X–systeem op parallelle lij- nen verplaatsen na vermenigvuldiging met een constante ⟨deze bundel heeft krommen, die zich alleen in O snijden.⟩

(kantlijn:) ⟨ik denk dit stel heelemaal slechts anal. sit. gegeven, maar noem y dus x, waarin op die hoogte de O–x is overgegaan.⟩

(doorgehaald:) ⟦Tusschen de maat op X en Y bestaat voorloopig geen verband, maar uit $f(x).y = f(y).x$ en $f(x) + y = f(y) + x$ volgt $f(y) = y$

En verder volgen nu de verdere Hilbertsche axioma's als stellingen. B.v. $a(bc) = (ab)c$ moet worden gelezen als $\frac{a}{1}.(\frac{b}{1}.c) = (\frac{a}{1}.b).c$ en spreekt zoo vanzelf.⟧

(kantlijn, verbetering op het doorgehaalde:) ⟨*Kortere manier*. Defin. eerst de opl. sitaal, daaruit afb. op de getallen. Dan volgt uit de distr. eig., dat prod.(xy) voor const. x evenr. met y en voor const. y evenr. met x, dus prod.(xy) = xy.⟩

. . . .

Zorg dan vooreerst, dat $a(b+c) = ab+ac.$⟨10⟩ Hieruit volgt, dat de productfunctie is van den vorm $f(y).x$. Uit de commut. eig. volgt dan: $f(y) = c.y$, *) en als we axioom I,6 laten gelden, wordt prod. $(x, y) = x.y$⟨11⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨en nu is tevens de assoc. eig. verzekerd.⟩ ,

. . . .

VII-19 Ik kan de punten v.h. continuum niet als grenzen definieeren, want het zijn maar enkele bepaalde, die ik zoo kan krijgen. (want een grens denk ik mij alleen bij een *bepaalde*, reeds gegeven reeks)

. . . .

⟨10⟩ ⟦Vanzelf is dan⟧ $a(b + c) = ab + ac$. ⟦Maar niet⟧

⟨11⟩ en als we ⟦het punt van optelling en van verm. laten samenvallen is deze .. *(onleesb.)*⟧ = 1 en prod. $(x, y) = x.y$

De mengmeetkunde werkt in coörd. en coëff. met intuitieve continua, is dus de zuivere intuitieve grond voor de meetkunde.

. . . .

Bewijs, dat elke ⟨gedef.⟩ deelverz. v.h. cont. is òf aftelbaar, òf v.d. machtigheid c.[26] Wat ik opbouw is aftelbaar. Ga ik nu het continuum alterneeren in segmenten van wèl en niet, dan moet ik een van die segmenten reeksen, b.v. A, opbouwen. B is dan de rest. 1^e *geval.* A is loopend geordend opgebouwd. Dan hebben A en B de machtigh. $\aleph_0$ of c, naarmate ze geen of wel inhoud hebben.⟨12⟩

2^e *geval* A is überall dicht ⟨of volgens een type, dat ontstaat door splitsing van elementen der üb. d. Menge⟩ opgebouwd. Dan is ook B überall dicht. Wie inhoud heeft, is zeker van machtigheid c. Maar wie geen inhoud heeft, is als A van machtigheid $\aleph_0$,⟨13⟩ maar als B van machtigh. c. (Immers aan B blijven de segmenten,⟨14⟩ die eerst bij de ω^{de} decimaal geraakt worden bij opbouw van de rationale schaal; al zijn dus die segmenten slechts punten, hun machtigheid blijft c; terwijl aan A alleen die segmenten komen, die bij een eindige decimaaltrap worden afgezonderd.

. . . .

Intusschen kan ik het op tweeërlei manier opvatten. Feitelijk vat ik in 't bovenstaande op: A zijn de segmenten, die bij een eindige decimaal bereikt worden; B zijn de segmenten, die bij een oneindige decimaal *'niet bereikt'* (als een positieve term gelezen) worden. Immers die⟨15⟩ toevoeging van de oneindige decimaal is het postulaat voor c. Maar de punten, die bij oneind. dec. *'niet bereikt'* of *'wel bereikt'* worden zijn dezelfde. En ik kan ze bij postulaat even goed bij A voegen. En dan wordt B van machtigheid ω *of 0* (naarmate ik de grenspunten van de segmenten bij B tel of niet.

(kantlijn:) ⟨Behalve in het continuum met zijn schaal van punten kan ik natuurlijk ook bouwen in de ω-rij van de kansdecimalen, die ik ook weer überall dicht kan ordenen. Maar dan is het maar de vraag: hoeveel van die decimalen laat ik over voor de vrije keus? Zijn het eindig aantal, dan machtigheid eindig. Zijn het er ω, dan machtigheid c.⟩

. . . .

⟨12⟩ Ga ik nu het continuum alterneeren in segmenten van wèl en niet, dan moet ik een van die segmenten reeksen, b.v. A, opbouwen. B is dan de rest. ⟦Hebben A en B beide een inhoud, dan hebben ze de machtigh. c. Maar heeft A een inhoud 0,⟧ 1^e *geval.* A is loopend geordend opgebouwd. Dan hebben A en B de machtigh. $\aleph_0$ of c, naarmate ze geen of wel inhoud hebben.

⟨13⟩ Maar wie geen inhoud heeft, ⟦kan zijn⟧ is als A van machtigheid $\aleph_0$,

⟨14⟩ (Immers aan B blijven de ⟦punten, die⟧ segmenten,

⟨15⟩ Immers ⟦het⟧

VII-20 [Cantor in zijn afleiding van: machtigheid cont. $= 2^{\aleph_0}$ vergeet, dat je niet *alle* rationale getallen mag aftrekken van *alle* reëele getallen. Het zijn ongelijksoortige dingen: de eerste bouw ik op, de laatste zijn kansen in de natuur. En in den zin, waarin ik zonder verand. der machtigheid bij de groep der rationale getallen plus iets nog wel eens alle rationale getallen mag optellen zonder verandering der machtigheid: in dien zin kan ik mij niet een machtigheid van cont. denken.]

. . . .

[Dat een rechthoekig coörd. stelsel niet in elke Mannigfaltigkeit mogelijk is, blijkt b.v. uit Minding M.A. 55.][27]

. . . .

(Poincaré Enseignement 6 p. 270) de optelling is niet te definieeren, wel de aftrekking uit de optelling.[28]

. . . .

Hilbert klaagt (Ens. 7 p. 90) over de paradoxe gevolgen van Freges opvatting van gedefinieerdheid (die overigens op een vage intuitieve critiek van ons wil beslag leggen). Hij zegt: de logica is zeker nog niet ver genoeg. De fout hiervan is : De logica moet rusten op de wiskunde; niet omgekeerd.[29]

. . . .

(ib. p. 92) De definitie van = werkt met gelijk hersenbeweeg, als de gewone begeleiding van een formule met = is. Het is dus zinloos.[30]

. . . .

Voor het bewijs van de proj. grondstelling is noodig òf het ax. van Archimedes (Klein, Zur ersten Verteilung der Lob. Pr.) òf de axioma's der congruentie (Schur, M.A. 51); maar in elk geval één van beide. (Hilbert Festschr.)[31]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Axioma's kunnen afhankelijk zijn (d.w.z. er is geen Existenz van het eene zonder het andere), en toch beide noodig zijn voor den axiomatis-
VII-21 chen opbouw om- ‖ dat men over het ding, *waarvoor* de axioma's gelden, niet spreken wil. Zoo wordt hiervan Hilbert beschuldigd door Schur M.A. 55⟧ [32]

. . . .

Onafhankelijkheid van axioma's is te bewijzen, door opstellen van geometrieën, waarvoor een deel niet geldt. Afhankelijkheid is te bewijzen, door het eene deel uit het andere te bewijzen.

Maar *dat* van een gegeven axiomastel niet nog een deel kan vervallen (dit is iets anders, dan 'niet een bepaald deel kan vervallen'), kan men ⟨daarmee niet⟩

als bewezen beschouwen.⟨16⟩ *) Daartoe zou men eerst alle axioma's in hun elementen moeten ontleden, die in 't algemeen oneindig in aantal zijn, en is men dat gaan doen, dan is men dus teruggekomen op den *opbouw* der meetkunde; waarbij men dan gewoonlijk niet den eenvoudigsten opbouw heeft gekregen; en verder heeft dien 'axiomatischen' opbouw niets bijzonders, wat haar van andere opbouwingen onderscheidt; elke opbouw heeft bij iedere nieuwe stap de eigenschap, dat men *ook andere wegen zou kunnen uitgaan.*

En overigens als Existenzbeweis is de *opbouw* toch noodzakelijk.

Geheel hiernaast ⟨en er van gescheiden⟩ staat de steeds eindige opbouw van het gebouw uit axioma's en stellingen (dat even weinig wenschelijk is, als de *zelf*beschouwing van het intellect; onze bouw–eigenschap *moet* zich niet daarop werpen). Dat is dan een opbouw, steunend op de axioma's der logische wetten; en de logische wetten zijn weer een axiomatisch gebouw, steunend weer op logische wetten, en zoovoort u.a. infinitum.

*) *(kantlijn:)* ⟨b.v. de twee vlakke axioma's van Peano⟩ .

. . . .

Dat ik algemeen-filosofische opvattingen aan 't hoofd van het wiskundig systeem stel, komt niet om in dien zin een stelsel op te bouwen, maar is alleen een hulp, om de moreele grondstellingen vast te houden, ook bij den opbouw der wiskunde; waar ze anders licht zouden worden vergeten, maar *niet mogen worden vergeten.*

. . . .

Het zuiver wiskundige werk is niet parasitair, want kan betrokken worden **VII-22**
op den strijd; de logistiek wel. De eerste kan dus bloeien bij een gezond ras, de laatste alleen bij een gedegenereerd.

. . . .

Schur (M.A. 55) onderscheidt 3 phasen: 1. Desarguess. 2. Pappus ⟨en de opbouw der proj. meetkunde⟩ 3. De overgang van projectiviteit naar metriek. Hij gebruikt geheel geen Archim, axioma; en houdt in tegenst. met Hilbert's Festschrift steeds de hyperb. meetk. mee omsloten.[33]

Voor de phase 2 gebruikt hij de congr. axioma's. (Het Archimedische was ook mogelijk geweest.) onder uitsluiting van de omkeerbaarheid der Strecke; Dehn had het gedaan onder uitsluiting v. ruimte-axioma's van congruentie. (Schur gebruikt dat ruimte-axioma in den vorm van omkeerbaarheid van den hoek.) Voor 3 moet hij nu nog de omkeerbaarheid van de Strecke er bij nemen. (Maar hij meent, dat misschien dat axioma nog wel uit de andere kan zijn af te leiden.)

. . . .

⟨16⟩kan men ⟦nooit⟧ als bewezen beschouwen.

Overigens is het een leelijke Begründung der congruentie van Peano-Schur-Hilbert; en springt het probleem–Lie over; immers postuleert maar dat bij de bewegingsgroep *rechte lijnen* in elkaar overgaan.

. . . .

$\sqrt{2}$ onmeetbaar? Hij staat in de verm. groep tusschen 1 en 2, als in de optelgroep $\frac{1}{2}$ tusschen 0 en 1. Hij is dus even weinig onmeetbaar als $\frac{1}{2}$. Hij halveert (voor de ⟨eenledige⟩ groep zelfs geheel willekeurig is die halveering te kiezen) eenvoudig een enkele uit de groep aangenomen operatie.

. . . .

In Hamilton–Whewell is niet waar, dat ⟨wiskunde⟩ logica is; ⟨het is⟩ bouwen. (zij leeft niet in de wisk. der log., maar in haar eigen wisk.)

. . . .

VII-23 De meting, ω maal achtereen, vertegenwoordigt één transformatie uit de groep. De reëele groep kan door deeling van de maat nog iets worden voortgezet; als wiskundig instrument, om er mee te werken, gebruiken we de continue eenledige groep, d.i. de optelling.[34]

. . . .

De *groep* uit ω is discontinu; en onbepaald, omdat ω zich voor de groep nog op allerlei andere manieren ordenen laat. Men bouwt de groep op; door een willek. element 1 te stellen; 2 het beeld van 1; 3 van 2 enz..

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Bekijken we de eendim. continue groep, dan is die, als we het gebied tusschen 2 opvolgende constante punten voor de infin. transformatie beschouwen, zeker eenduidig.⟧

De optelgroep is de een–eenduidige groep.

Denk nu een meerduidige groep; waar de inf. transform. zou moeten zijn gaat over in , dan heeft die groep ⟨ook⟩ den vorm:[⟨17⟩]

gaat over in of gaat over in ,

m.a.w. het gebied |———| heeft een eenduidige groep, die gedeeltelijk uit het gebied wegschuift. Zoo is b.v. de groep $\log(e^x - b)$. Hierop is ook wel een schaal te construeeren, maar onder *de* optelgroep verstaan we die van het aan beide zijden open continuum geheel in zichzelf, dus de een–eenduidige groep.

. . . .

[⟨17⟩] dan heeft die ⟦ongekende⟧ groep den vorm

(Cantor) ‘Von jedem beliebigen Object muss man angeben können, ob es seiner Definition zufolge der Menge angehört oder nicht’. *) Larie. De wiskunde kent geen beliebige Objecte, dan de zelf opgebouwde; en de *definitie* mag alleen zijn een bouw-beperking, waarna de *intrinsieke* opbouw weer mogelijk moet worden *(onleesb. doorhaling)* uit combinaties van 1, ω en c. Alleen is door de definitie de bouw beperkt.

**) (kantl.:)* ⟨In zoo’n gedachte zit ook de grondfout van Russell⟩ .

. . . .

[Schoenflies Bericht p. 13 St. IV]

Alle aangeefbare reëele getallen zijn aftelbaar onaf.[35]

. . . .

De beste manier om de praktische onmeetbare getallen op het cont. in te voeren, is misschien aldus, steunend op het int. cont.: Er zijn allerlei stetige afbeeldingen van c in zichzelf, die we kennen, die voor een stuk van c een–eenduidig zijn,⟨18⟩ en nu zien we direct, dat aan elk punt van c ook een punt van de Abbildung moet beantwoorden.

Zoo leer ik uit één schaal, dat is teekenstel ⟨v. cijferteekens⟩ , nieuwe teekens definieeren, d.i. aan punten op c beantwoorden laten.

. . . .

De wiskundige systemen ⟨en redeneeringen, dat is bouw-pogingen⟩ , zijn werkingen van onszelf naar buiten; daarom herinneren we ons die volkomen exact *); in tegenstelling met de ondergane inwerkingen van de buitenwereld op ons.

*) *(kantlijn:)* ⟨of als door zwakte van geheugen niet exact, dan *fout*; terwijl bij andere dingen de overgang vloeiend is.⟩

. . . .

Dat zoogen. syllogisme (op wisk. ⟨te bouwen⟩ systemen heeft het uitsluitend betrekking), is een uitvloeisel van het wiskundig bekijken van de wiskundige redeneeringen van een ander *) De laatste is gewoon aan ’t bouwen, maar springt gewoon (steunend op zijn herinnering) een reeds vroeger ondervonden ‘redeneerschakeling’⟨19⟩ (d.i. bewerking van een ‘bouwdwang’ door telkens herhaald ‘verwezen worden’) over; hij weet reeds dat uit zekere eischen (die nu ook aan zijn opgegeven gebouw gesteld zijn) een zekere bouwdwang volgt, en gaat dat **VII-24**

⟨18⟩ die we kennen, ⟦en nu zien we direct⟧ die voor een stuk van c een–eenduidig zijn,

⟨19⟩ een ⟦redenering⟧ reeds vroeger ondervonden ‘redeneerschakeling’ nu direct ter harte nemen. M.a.w. hij bekort de taal, en dat feit neemt een derde van hem waar en *ziet* een syllogisme.

*) *(kantl:)* ⟨maar de wiskundige of bouwer denkt er zelf niet aan, laat staan past het toe.⟩

. . . .

Wanneer men nu een symbolisch gebouw optrekt met operatieregels, dan kan het zijn, dat men kan aantoonen *nooit* te kunnen komen tot twee formules, die slechts verschillen door het ontkenningsteeken (*een* der teekens uit de groep). Men gebruikt daarbij alle wetten der logica en wiskunde (d.i. van bouwen); deze zijn dus bij zoo'n systeem verondersteld. In 't algemeen zal zoo'n systeem geen waarde hebben, dan op zichzelf; soms echter kunnen de symbolen zich min of meer dekken *) met de *woorden* der verstandhouding over wiskunde, en de afleidingen in het symbolensysteem, met de woorden der verstandhouding,⟨20⟩ die de verwijzingen tot bouw-dwang begeleiden. Het ontkenningsteeken loopt dan parallel met de verandering van *moet* in *mag niet*⟨21⟩ (beide gedacht in bouw-dwang). Voor een symbool, dat een *wiskundig bestaand ding* begeleidt is dan zeker niet mogelijk, de symbolische 'contradictie' af te leiden; immers dan zou contradictore bouw-dwang bij het bouwen zijn geweest, en het ding had niet kunnen bestaan. Aan den anderen kant, kúnnen we voor een *wiskundig te bouwen ding* aantoonen, dat geen symbolische contradictie is af te leiden in het symbolisch systeem, **) dan is het ding bestaanbaar. Immers dan ⟨blijken⟩ de klassen, ***) (dit woord heeft hier *in* een wisk. systeem zin, niet bij Russell) waartoe volgens de versch. voorwaarden het te bouwen ding moet hooren, iets gemeenschappelijks ⟨te⟩ hebben, want anders was aan te toonen, dat uit 'behooren tot $n-1$ der klassen' volgt: 'niet behooren tot de n^{de} klasse'. ****)

*) *(in de kantlijn:)* ⟨als het zijn symbolen van wiskundig bekijken van wiskundig bouwen; als zoodanig kunnen dan ook de symbolische axioma's 'volledig' zijn.

**) *(in de kantlijn:)* ⟨Zoo iets zal intusschen niet altijd uit te maken *(zijn)* , want $Z_2(\aleph_1)$ is niet door inductie te beheerschen; men staat aan verrassingen, ⟨eieren van Columbus⟩ (vernuft) steeds bloot. Evenzoo is niet uit te maken (wegens $\aleph_1$) of voor een contradictievrij symbolensysteem een wiskunde is. ⟩

***) *(in de kantlijn:)* ⟨deze klassen, wiskundig gedefinieerd, zijn steeds eindig, of van a of van c, nooit van $\aleph_1$.⟩

****) *(in de kantlijn:)* ⟨Want òf welgedefinieerde klassen iets gemeen hebben, is *vast*, dus af te leiden; ook al moet die afleiding uit $\aleph_1$ worden gekozen, zoodat ze ook theoretisch niet machinaal is uit te voeren maar *vernuft* vereischt. Overigens kan ik de klasse aftelbaar zoo nauwkeurig ik wil, aangeven, b.v. teekenen uit enkele individuen, en zoo, bij de grenzen steunend op berekeningen, kijken

---

⟨20⟩met de ⟦verwijzingen⟧ woorden der verstandhouding,

⟨21⟩Het ontkenningsteeken loopt dan parallel met ⟦het verschil tot *??* de verandering van *moet* in *mag niet* of er iets gemeen is met een andere klasse. En dit alles zijn mathematische en ⟨ook⟩ logische redeneeringen.⟩

. . . .

We spraken boven van *moet* $\longrightarrow$ *mag niet*. Nu is er nog *moet niet*. Dit bekijkt wiskundig wat? Niet het wisk. systeem (zooals 'mag niet'), maar de fantazie van den wiskunde–bedrijver, die allerlei halfgebouwde wenschen voor zich ziet zweven. Het nadert dus tot wiskundig bekijken van het leven, zooals de dwaze philosophen doen.

. . . .

Als je het syllogisme als wet wou opstellen, dan heb je daar nog niets aan,⟨22⟩ zonder dat je toch *ook* nog *onbewust* het syll. toepast. Immers zoo:

maior :	*het syllogisme geldt.*
minor :	$a0b; b0c.$
concl.	$a0c$

Het beste is dus maar, het direct onbewust toe te passen

. . . .

Zoo ook moet je niet invoeren: 'a is waar', maar stil blijven bij 'a', en dat altijd waar denken. Want onbewust pas je nu toch weer toe,⟨23⟩ dat 'a is waar' waar is. Maar bovendien is 'is waar' geen wiskundige gedachte, zit alleen *in* de passie tot wiskunde doen.

. . . .

Klassen op het cont. worden alleen bepaald t.o.v. een op c bepaalde üb. dichte *) schaal, (als het niet bepaalde eindige of ω–rijen zijn.), want al mijn constructies en bewerkingen (d.i. transformatiegroepen) geven mij niets anders, d.w.z. we kunnen nemen de punten op die schaal zelf, of een of andere *wet* (empirisch blijken vervalt hier), die we vervuld willen hebben voor de benadering t.o.v. die schaal. Heb ik de klasse nog niet in een dier vormen voor me, dan weet ik nog niet, of ze bestaat.

*) *(kantl.:)* ⟨of samengesteld met intervallen, maar dan toch van machtigh. a_0,⟩

⟨22⟩ Als je het syllogisme als wet wou opstellen, dan ⟦kun je daar achter neerzetten het syllogisme (dat je eigenlijk dán toch weer toepast)⟧ heb je daar nog niets aan,

⟨23⟩ Want ⟦andersom⟧ onbewust pas je nu toch weer toe,

. . . .

. . . .

Notes

[1]Brouwer wil zeggen: onze intuïtieve natuur kent geen singulariteiten; de wiskundige functies wel.

[2]Enkele paragrafen potentiaaltheorie.

[3]De rest van pagina 2 behandelt potentiaaltheorie.

[4]Deze en de volgende pagina geven ideeën over het lijn- en vlakcontinuüm; voorlopig is niet te traceren of dit bij een bepaald boek of bij een bepaalde persoon hoort.

[5]V.w.b. Poincaré, zie *La Valeur de la Science*, hoofdstuk III, § 3, pag 72, 73.

[6]De opbouw van het continuüm uit de Punktmenge zou kunnen. Bedoeld is waarschijnlijk in Cantorse zin, maar niet de perfecte Menge, want deze is nooit af.

[7]Volgens Cantor wel, volgens de latere Brouwer niet.

[8]De tijdsintuïtie als de meest primaire voor het continuüm. Dit wordt op deze plaats voor het eerst in deze bewoordingen gesteld.

[9]Hilbert, Anhang III bij het Festschrift: *Neue Begründung der Boluai-Lobatschefskischen Geometrie,* § 2, 3.
Schur, *Über die Grundlagen der Geometrie,* M.A. 55, § 3: *Ueber das Rechnen mit projectiven Strecken.*

[10]Naar aanleiding van Hilberts Festschrift (*Grundlagen der Geometrie*) met al zijn axioma groepen (5 groepen) tegenover de meer intuïtieve fundering van Brouwer. Het 'derde punt' betreft het bestaan van nog een punt naast de twee, die de lijn definiëren.

[11]Hilberts Festschrift pagina 51; het betreft hier § 16 *Die Proportionen und Ähnlichkeitssätze,* (de gelijkvormigheids regels).

[12]Volgt een aantal pagina's potentiaaltheorie tot en met pag. 13.

[13]Brouwer publiceerde in 1906 over vectoranalyse en potentiaaltheorie in de Verslagen van de KNAW.

[14]Dit duidt aan dat het continuüm nooit volledig is te definiëren. De 'definieerbare' punten vormen het fictieve continuüm en er zullen uit de definieerbare punten altijd nieuwe te vormen zijn. Het continuüm is 'onaf'.

[15]In M.A. 65 is een verbeterde versie te vinden, maar dat was na 1907. Hier is het bezwaar tegen het keuze axioma, dat er geen natuurwet of functie hiervoor kan zijn. In de dissertatie komt Brouwer hier niet op terug, daar wordt de

stelling van Zermelo (het welordenings theorema) gelijkgesteld met het keuze axioma; Brouwer stemt hier in met Borel.

[16]Een doorgehaald fragment. Zie *Begründung,* M.A. 46 en 49 (en het boek *Grundlagen*). Het gaat hier over de mogelijkheid om de tweede getalklasse in een eindig aantal tekens weer te geven. Een nieuw teken is het 'en zovoort' In feite zijn er oneindig veel symbolen, want het grenselement van de reeks hoort er bij.
Hier staat vermeld: *een oneindige reeks van te vormen keuzen achter elkaar.* Voor het eerst wordt de oneindig maal vrije keuze in deze termen gesteld.

[17]Het *grenselement axioma* (d.w.z. het grenselement van een rij hoort bij de rij); dan is, mèt dit axioma, het fictieve continuüm niet aftelbaar.

[18]De term 'prendre au hasard' stamt van E. Borel.

[19]Dat wil zeggen: niet alles in de natuur laat zich met behulp van de wetenschap wiskundig beschrijven; ofwel de nattur laat zich niet als *totaal* beschrijven.

[20]D.w.z. de keuzerij moet oneindig zijn.

[21]Zie M.A. 49: F' bestaat niet.
F_1 is een willekeurige deelverzameling van van een oneindige welgeordende verzameling F. '12A' zegt dat elke deelverzameling F_1 van F een eerste element heeft. Cantor bewijst dit met behulp van de verzameling F', dat is het totaal van alle elementen van F die vóór alle elementen van F_1 komem.

[22]De vorming van T, dat is de tweede getalklasse. Deze is onaf volgens Brouwer. T blijft tijdens de vorming steeds aftelbaar, maar Cantor behandelt deze verzameling als *af.* Dit vormt een belangrijke kritiek op Cantors *Begründung.*

[23]'Bernstein (Jahresber. 1906': moet mogelijkerwijs zijn 'M.A. 1906'. Het kan namelijk heel goed slaan op M.A. 61 *Untersuchungen aus der Mengenlehre,* hoofdstuk II.

[24]In *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1900' staat een kort artikel van Hilbert, waarin hij een aantal axioma's voor **N** geeft. Brouwers kritiek is, dat deze te formalistisch zijn. Getallen en rekenkunde zijn gegrondvest op de continuüminuïtie. En deze continuümintuïtie is weer gebaseerd op de tijdsintuïtie.
In *l'Enseignement Mathématique* 7 uit 1905 staat de Franse vertaling van Hilberts 'Heidelberg lezing'

[25]Dit lijkt te slaan op de axiomagroepen uit Hilberts Festschrift, maar dan klopt de nummering niet. Het klopt beter met het bovengenoemde artikel uit de Jahresbericht. Zie ook wat hieronder volgt.

[26]Brouwers oplossing van Hilberts eerste probleem uit 1900. Kritiek op dit

bewijs:
– het geldt alleen voor Brouwers benadering van een 'fertig' continuüm, dat opgebouwd is. Dit is niet de continuüm hypothese, die stelt dat $2^{\aleph_0} = \aleph_1 = c$.
– verder is het een puur constructivistisch bewijs.

[27]Een in het Latijn gesteld artikel van Minding: *De formae, in quam geometra brittanicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina.*

[28]In *l'Enseignements mathématiques* 6 (1904) publiceerde Poincaré het artikel *Les Définitions Générales en Mathématiques.* Op pag. 269 – 272 worden begrippen en definities uit de rekenkunde behandeld.

[29]In *l'Enseignements Mathématiques* 7 (1905), verscheen de Franse vertaling van Hilberts 'Heidelberg lezing' uit 1904 over de mogelijke logische fundering van de rekenkunde. Indien dit succesvol kon geschieden, dan was de hele wiskunde opbouwbaar uit de logica. In de inleiding beschouwt Hilbert in een kort historisch exposé de verschillende pogingen hiertoe, en hij behandelt hierbij in het kort Freges project.

[30]Vanaf pag. 92 van Hilberts genoemde artikel worden de elementaire rekenkundige begrippen gegeven: de 'objecten', waaronder het object '='.

[31]Axioma's voor de projectieve meetkunde: òf het axioma van Archimedes, òf dat der congruentie is nodig.
Zie het artikel van F. Klein *Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewski-Preises* in de Mathematische Annalen 50 over de herkomst van de axioma's; zie i.h.b. pag 594.
Zie ook Fr. Schur *Ueber den Fundamentalsatz der projectiven Geometrie* in de Math. Annalen 51, pag 401.
' Hilberts *Festschrift* ' is zijn *Grundlagen der Geometrie* uit 1899.

[32]Over de axioma's van de meetkunde; zie Schur: (M.A. 55) *Über die Grundlagen der Geometrie,* de inleiding voorafgaande aan de eerste paragraaf.

[33]Schur (M.A. 55) Über die Grundlagen der Geometrie, 1900.

[34]Transformatiegroepen. In het eerste hoofdstuk van Brouwers dissertatie wordt met de opbouw der wiskunde begonnen d.m.v. groepsdefinities voor optelling en vermenigvuldiging. Dit is mogelijk een voorbereiding daarop.

[35]Voor het eerst wordt hier de term *aftelbaar onaf* gebruikt. Schoenflies gebruikt overigens alleen maar de term *abzählbar.*

Chapter 8

Schrift VIII

Als men een combinatie van teekens bij defin. door een nieuw teeken vervangt (in de logistiek), kan men ook net zoo goed 1+1+1 = 3 stellen, en dit is een even primitief, dus gerechtvaardigd symbool, als die van Peano. **VIII-1**

(kantlijn:) ⟨Terwijl teekens voor iets willekeurigs, b.v. voor 'willekeurig eindig getal', alleen hooren in het teekensysteem, begeleidend iets van de bouwpassie, niet van het bouwwerk zelf.⟩ [1]

. . . .

De reëele ruimte is intuitief, maar de mathematische ruimte, die ook intuitief is, is opgebouwd uit de eendimensionale tijdsintuitie.[2]

. . . .

Men kan alleen spreken van *alle* *) t.o.v. de reeds ingevoerde eenheden, en zoo komt men nooit boven een aftelbare reeks: men kan er een lijst van maken. Want *verschillende* dingen kan ik maar een eindig aantal nemen.[3]

*) *(kantl.:)* ⟨dus van machtigheid in gewone zin (want in de defin. daarvan komt 'alle' voor)⟩ ,

. . . .

(volgt een vrijwel onleesbaar doorgehaald fragment, met in de kantlijn de toevoeging:)

⟨Aftelbare ordening is mijn eenig middel tot individualiseering. Van het cont. kan ik ook zóó alleen een bepaald punt aangeven; (immers heb daar tot mijn besch. een eindig aantal teekens en aftelbaar aantal cijfers); en zonder dat kan ik alleen werken met 'een willekeurig punt' er van. ⟩

. . . .

Al kan ik me nog niet een materieele operatie denken, die de 'grandeur' x in x^2 overvoert, ik kan een widerspruchsfreie transformatiegroep v.h. continuum zoo opstellen.

VIII-2

(doorgehaald:) ⟦*Verschillende* puntrijen (de punten van één rij gelijk, van versch. ⟨kan ook⟩ versch.) kunnen voor het bouwen als uitgang worden genomen; naast verschillende continua (met schalen er op). In zulke systemen gaat men bouwen, en krijgt zoo relaties tusschen elementen (want een relatie anders dan van groepeering, b.v. van kleur of ander reëel ding, heeft mathematisch geen zin).⟧

....

[Ook Lobatch. en Bolyai schijnen bij de meetkunde van den bol uit te gaan, niet van pl. vlak en r. lijn.]

....

(Coutur.) Je ontkent de intuitie? En toch zeg je dat de 4-axiom. rekenk. van Padoa dezelfde is als ⟨rekenk. v. Russell⟨1⟩;⟩ wat is dan *datzelfde*, dat je toch voelt?[4]

....

$7+5=12$ wil zeggen: *(doorgeh. en moeilijk leesbaar:)* ⟦De som van een clas 7 en een clas 5, d.w.z. een ... van de klas van klassen 5 ... tot de klassen 12.⟧ $7+5=10+2$⟨2⟩

....

(Couturat p. 54) 'Sans l'ordre nous n'avons pas en l'occasion de distinguer les nombres finis et infinis'. Alsof ⟨er zonder orde überhaupt getallen *waren*, (d.w.z. konden worden gebouwd)?⟩[5]

(volgt onderaan de pagina nog een onleesbare doorhaling)

....

VIII-3

En opbouw sluit in 'orde', dus trots Couturat p. 61 is de ordinaaltheorie vóór de cardinaaltheorie.[6]

....

Couturat neemt eigenlijk als entities vage physische dingen, en bouwt, ⟨die

---

⟨1⟩En toch zeg je dat de 4-axiom. rekenk. van Padoa dezelfde is als ⟦de 5-axioma rekenk. v. Peano;

⟨2⟩ *Een moeilijk leesbaar fragment; het voorbeeld staat op pag. 52 van Couturat.*

bekijkend, axioma's, en daaruit⟩ een logisch systeem:⟨3⟩ dan vind je het getal door abstractie, als nieuwe *entity*.

Maar ik bouw het getal op, als eerste opbouwing: heb ik er 3, dat noem ik *drie* (moment van mijn bouwen), dan is het getal dus primair. ⟨En van andere classen kan ik dan zeggen, dat ze met mijn primair getal 3 aequivalent zijn.⟩[7] *)

Die mathem. logica is te verklaren als de domme waarnemingen van een persoon A, ⟨die zelf niet kan bouwen maar⟩ die B, die naief zit te bouwen, gadeslaat.[8]

*) *(kantl.:)* ⟨dan heb ik *geteld* en 3 gevonden.⟩

. . . .

Twee aequivalente klassen; als de klassen gegeven zijn, hoe maak ik uit of de bi-uniforme relatie bestaat? Ik kan soms uitmaken, dat hij bestaat *) als hij in mijn systeem gegeven is, maar ⟨soms (als beide klassen niet geteld zijn) is niet uit te maken of zij⟩ bestaat.⟨4⟩ [Er zijn bekende klassen m.a.w., die nog niet *geteld* zijn, b.v. de aantallen r. lijnen op een 4^{de} grds–oppervl.]

Is zoo'n ⟨bi-uniforme⟩ relatie niet gegeven, dan is de wijze,⟨5⟩ waarop wij haar zelf leggen voor eindige getallen het *tellen*, d.w.z. een er af nemen, en laten corresp. met *1*, dan de rest tellen, maar bij het eerst afgenomen getal zetten *2* enz.[9]

Bijv. als ik merk, dat aan zeker meetkundig probleem ‖ *vier* punten voldoen, **VIII-4**
dan wist ik vooraf nog niet eens, of ik een eindig of oneindig getal zou krijgen, maar ik kom b.v. op een 4^{de} machts vergelijking, en *tellende*, (door een voor een door een factor te deelen), heb ik gemerkt, dat daaraan 4 wortels voldoen. **)

(Volgt nog een onleesbaar doorgehaalde korte zin)

*) *(kantl.:)* ⟨soms ⟨ook⟩ bij reëele physische klassen, b.v. de menschen en hun neuzen⟩

**) *(kantl.:)* ⟨Tellen ⟨in wisk.⟩ is opbouw van een bi-un. relatie, dus van een gebouw in het gebouw.⟩

. . . .

Het ⟨willen⟩ *stellen* van gelijke dingen ⟨tot machtiger beheer in 't intellect er van⟩ hoort tot de veruiterlijking van den mensch (is een geestelijk beeld daarvan), en ook in de verwerkelijking er van: (bouwen van huizen) zetten ze gelijke dingen naast elkaar.[10]

⟨3⟩ Couturat neemt eigenlijk als entities vage physische dingen, en bouwt ⟦daarna⟧ een logisch systeem:

⟨4⟩ als hij in mijn systeem gegeven is, maar ⟦niet dat hij niet⟧ bestaat.

⟨5⟩ ⟦En in werkelijkheid⟧ is zoo'n relatie ⟦nooit⟧ gegeven, ⟦soms⟧ is de wijze,

. . . .

Het woord R in de logica is op te vatten als *relatie* zonder meer (is geen physisch gekleurde relatie).

. . . .

[Bij een ⟨punt⟩ indicatrix op een convexe kromme R_p in R_n hoort een vectorindicatrix $u_1 \cdots u_{p+1}$ voor het R_{p+1}–element binnen R_p, waar $u_1 \cdots u_{p+1}$ de positieve zinnen der kromme–coörd. in R_{p+1} zijn.[11] De ⟨punt⟩ indicatrix is dan op het gedeelte van R_p, dat voor alle coörd. u aan den pos. kant is:

$$u_1 \cdots u_{p+1}]$$

. . . .

VIII-5 [*Bij het krachtveld in* R_n. De $^{n-2}$ wervelbolletjes⟨6⟩ zijn samen te stellen, want daar zit de substantie op het oppervlak; de vlakke wervels (plani–vectoren) niet: daar zit de substantie in het middelpunt. ⟨Wil hij optelbaar worden, dan moet hij worden vervangen door zijn potentiaallijnvector langs den omtrek.⟩

. . . .

Al deze onderzoekingen voeren dus tot het resultaat, dat de wiskunde in het leven optreedt als eerste fase van zonde. (je kunt er de natuur alleen mee knoeien als 'hindernis'); dat ze alleen nog te verdedigen is als het lichtzinnig vertier van *bouwen*, maar dat het een jodenstreek is, om dàt in het volle beweeg van het leven te plaatsen.

Aan lichtzinnigheden ⟨en puzzles⟩ doet nu een wijs mensch niet mee, en aan jodenstreeken nog minder. Maar dan weer voelt hij, dat zoolang de poorten naar betere werelden niet voor hem worden opengezet, hij te leeren heeft, aan al het aardsche ellendig bedrijf mee te doen, dankbaar voor zijn zwakte en onvermogen in dat bedrijf, en zonder gebondenheid.⟨7⟩

. . . .

De theoretische physica tracht de natuur na te *bouwen*, en ook de grondslagen zoekende wiskundige; hij gaat niet philosophisch dazen, zooals Russell in zijn Foundations *) en zooals alle philosophen, die je dus liefst hier niet bij moet halen. Philosophisch geredeneer mag alleen on-streng begeleiden mystieke intuitie.

⟨6⟩De R^{n-2} wervelbolletjes

⟨7⟩Maar dan weer voelt hij, dat zoolang de poorten naar betere werelden niet voor hem worden opengezet, hij te leeren heeft, ⟦de ellende van alle aardsch b..⟧ aan al het aardsche ellendig bedrijf mee te doen, ⟦niet te verlangen⟧ dankbaar voor zijn zwakte en onvermogen in dat bedrijf, en zonder gebondenheid.

*) *Tussen de regels in:* ⟨waar hij spreekt over 'onmogelijkheid van ondervinding zonder een relatiesysteem van exterior' § 191; alsof wij het systeem van mogelijkheid van ondervinding hadden op te bouwen, (want dán alleen geldt logica er over); ook wil hij buiten den tijd nog een exterior., om het ik er bij op te bouwen; stel je voor, dat je het 'ik' moet of kan bouwen.

....

[*Het* ^pV*-veld in ell.* R_n *aldus te vinden*: ⟨d.w.z. het elementairveld: **VIII-6**

$$\left.\begin{array}{ccc} p & \cdots & (I) \\ \downarrow & & \\ (p+1) & \cdots & (II) \\ \downarrow & & \\ p & \cdots & (III) \end{array}\right)$$

Stel een onbekende ⟨scalar⟩ functie, *) die een enkele ^pV in den oorsprong verplaatst ⟨voortgeplant⟩ volgens zijn eigen stelling⟨8⟩ (,d.w.z. in overeenk. stand t.o.v. voerstraal en de R_{p+1} door voerstraal en ^pV). Integreer die ⟨distributies⟩ volgens een elementairbolletje ⟨B_z⟩ om den oorsprong van die bepaalde ^pV's. **) Dan komt een distributie, waarin de onbekende scalarfunctie nog optreedt, en waarvan we nu in vergelijking uitdrukken, dat de tweede ⟨totale⟩ afgeleide 0 is.

[De oorsprong is dan een uitzonderingspunt, maar daarmee hebben we in de analitische vergelijking niet te maken.]

⟨De eerste ⟨methode⟩ was voor scalar en lijnvectoren in R_2
De tweede was ,, ,, ,, R_n
De derde is in 't algemeen voor p-vectoren in R_n⟩

*) *(kantl.:)* ⟨van één variabele n.l. den afstand⟩
**) *(kantl.:)* ⟨Voor een willekeurig punt gebruiken we dan maar de ontbondene van B_z volgens een R_{p+1} door dat punt.⟩

....

N.B. Dat we voor de vectorvoortplanting in ell. R_3 iets anders vinden, dan voor de scalarvoortplanting, toont zich ook reeds hierin:

Stel $x\ y\ z$ de Riemannsche normaalcoördinaten en $2a$ de ruimteconstante, dan is in den oorsprong de tweede afgeleide van een scalar: $-\left[\frac{d^2}{dx^2}\right]u$.
maar van een vector:

⟨8⟩ ⟨voortgeplant⟩ volgens zijn eigen ⟦richting⟧

(voor de X-ontbondene): $-\frac{X}{a^2} - \left[\frac{d^2}{dx^2}\right] X$

Overigens is dit toch een scalar-operatie, en dat blijft zoo voor ${}^pV$-distributies in R_n. Hieruit (dat de operatie scalair is) volgt, dat een distr. door haar tweede afgeleide bepaald is.

⟨probeer nu eens van een scalar distr. ergens eens iets van de u af te nemen, en dat bij de ∇^2 in te doen, dat het toch juist blijft. Dat blijkt onmogelijk.⟩

....

VIII-7

(n.b. deze § sluit aan op de eerste }S van pg. 6)

$$\begin{array}{cc} 0 & (I) \\ \downarrow & \\ 1 & (II) \\ \downarrow & \\ 0 & (III) \end{array}$$

Toepassing: In de ell. R_3 het veld: 1 (II)

Eerste Gedeelte. Het zoeken van het elementairveld (I), behoorend bij (III), die een B_z is.

We vinden: $\cos\varphi \times F(\alpha)$. De eerste afgeleide is een (p+1)-vector, waarvan p-richtingen liggen homothetisch met B_z, de laatste in het meridiaanvlak.

In ons geval dus een lijnvector in het meridiaanvlak. *(onleesb. doorh.)*

Ontbondenen: $\cos\varphi F'$ en $-\sin\varphi\frac{F}{\sin\alpha}$

Hiervan de tweede afgeleide, een scalar, wordt:

$\sin^2\alpha F' + 2\sin\alpha\cos\alpha F' - 2F$. Dit wordt =0 gesteld.

En de particul. oplossing, die voldoet voor de ell. ruimte (niet hypersfeer), is $\frac{\beta}{\cos^2\beta} + \mathrm{tg}\beta$ (De andere partic. opl. is $\csc^2\alpha$, d.i. die geldt voor hypersfeer, met in antipodische punten tegengest. lading.)

Tweede gedeelte. Het zoeken van de voortplantingscoëff. ⟨$f(\alpha)$,⟩ die van III naar I voert.⟨9⟩

Daar B_z een eenvoudig dubbelpunt is, vinden we bij integreeren van f over B_z: $\frac{df}{d\alpha}$.⟨10⟩ Dus wordt f gevonden uit:

$$\frac{df}{d\alpha} = F$$

⟨9⟩Het zoeken van de voortplantingscoëff. die ⟦een stuk volgens⟧ van III naar I voert.

⟨10⟩Daar B_z een eenvoudig dubbelpunt is, ⟦want we hebben $\frac{df}{d\alpha} = F$. Hieruit wordt f gevon.⟧ vinden we bij integreeren van f over B_z: $\frac{df}{d\alpha}$.

$$\begin{array}{ll} 1 & (I) \\ \downarrow & \\ 2 & (II) \\ \downarrow & \\ 1 & (III) \end{array}$$

Toepassing 2 In ell. R_3 het veld: 2 (II)

Eerste Gedeelte. Het zoeken van het elem. veld (I), veroorzaakt door (III), die een B_z is.

We vinden: $\sin\varphi \times F_1(\alpha)$. De eerste afgeleide is een planivector, die we voorstellen, door zijn in 't meridiaanvlak gelegen normaal. De ontbondenen van die normaal worden:

$$-\frac{\partial\left\{F_1 \sin\alpha \sin^2\varphi\right\}}{\sin^2\alpha \sin\varphi d\varphi} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial\left\{F_1 \sin\alpha \sin^2\varphi\right\}}{\sin\alpha \sin\varphi d\alpha}$$

We drukken uit, dat de tweede afgel. van den planivector, dus de eerste afgel. van den lijnvector 0 wordt. Stellen we dan nog $F_1 \sin\alpha = F$, dan $\|$ geeft de **VIII-8**
komende vergelijking:

$$-2F + \sin^2\alpha F' + 0$$

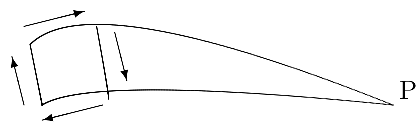
met algem. opl. $c_1\mathrm{tg}\beta + c_2\left\{1 + \beta\mathrm{tg}\beta\right\}$

Twee onafh. particuliere oplossingen gelden voor hypersfeer en ell. ruimte. Voor ell. ruimte komt: $1 + \beta\mathrm{tg}\beta$.

Dus $F_1 = \frac{1+\beta\mathrm{tg}\beta}{\cos\beta}$

Tweede Gedeelte. Het zoeken van de voortpl. coëff. $f(\alpha)$, die van (III) naar (I) voert.

B_z is een cirkeltje: we kunnen echter ook integreeren over een bolvierkantje vanuit het Anfpunkt P.[11]



[11] Anfangspunkt P

Dan vinden we: (op beide manieren:)

$$-f + \frac{d}{d\alpha}(f \sin\alpha) = F_1 \sin\alpha = F = 1 + \beta \mathrm{tg}\beta$$

$$f = -\frac{\beta}{\cos\beta} - \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{1 + \sin\beta}$$

....

Onderzoek de congruentie van een vectordistr. om een bepaald punt; op welke wijze kan ik nu een begrenzing van opp. elementen $\langle \perp$ de vectoren$\rangle$ daar definieeren? Een oppervlak is in 't algem. onmogelijk.

....

VIII-9 Ik kan ook in R_n langzamerhand opschuiven, als ik van lijnvectoren uitga. Stel ik heb gevonden

elem. B_z van ${}^{p}_{p+1}V$ → veroorzaakte ${}^{p+1}_{p}V$ → potentiaal ${}^{p}_{p+1}V$ (1)
en dan daaruit:
enkele ${}^{p}_{p+1}V$ → veroorzaakte ${}^{p+1}_{p}V\{= H\}$ → voortgeplante ${}^{p}_{p+1}V$
dan volgt daaruit:

elem. B_y van ${}^{p}_{p+1}V$ (eerste afgeleide van de geïsoleerde ${}^{p}_{p+1}V$) $\rightarrow \boxed{} \rightarrow$ H=vectorpotentiaal van de elem. B_z van ${}^{p+1}_{p}V$

Dus is nu bekend:
elem. B_y van ${}^{p+1}_{p}V$ → veroorzaakte ${}^{p}_{p+1}V$ → potentiaal ${}^{p+1}_{p}V$.
maar nu ook:
elem. B_z van ${}^{p-1}_{p}V$ → veroorzaakte ${}^{p}_{p-1}V$ → potentiaal ${}^{p-1}_{p}V$ (2)
⟨uit zijn afgeleide licht te vinden⟩
Zoo verschilt (2) t.o.v. (1) alleen doordat de p een is afgenomen.
De $n - p$ is dus een toegenomen, en dat moeten we hebben.]

....

Hoe weinig *aantal* en *omvang* waren zin hebben, blijkt ook hieruit, dat de moreele impuls tot het stelen van een cent en een gulden dezelfde is. De dienaren van het gouden kalf trachten dan ook maar alleen handig te manœvreeren zóó, dat de groote omvang telkens daar is, waar de schaal naar hen overslaat. Ze stelen in 't groote, en laten zich plukken in 't kleine. Maar ze vergeten, dat ze offeren aan een waan, en daardoor in het *werkelijk* groote verliezen.

....

Alles is vlak bij elkaar: kan onverschillig zonder moeite van de eene tegenstelling in de andre vallen. *) Alleen 'hindernissen', verstarringen, verhinderen dat. Het is schijn, dat die hindernissen er zijn; het meten der materieele hindernissen is de geometrie.

*) *(kantlijn:)* ⟨zoo ligt Europa vlak bij Chicago.⟩

. . . .

(doorgehaald, enkele fragmenten hiervan zijn onleesbaar doorgehaald:) ⟦In het stuk Verslagen Mei 1906 had vóór ⟨de formule vóór ⟩ ∇ nog een −teeken gezet moeten worden; en dán had van de formule ... *(volgt een onleesbaar fragment)* ∇^2 **VIII-10**
moet worden: $-\Sigma \frac{d^2}{dx^2}$
en *hieruit* volgt: $V = \nabla \int \frac{\nabla V.dv}{k_n \pi r^{n-2}}$
Dan verder, alsof het er zoo gestaan had.⟧

. . . .

Een scalardistr. heeft ⟨in Eucl. ruimte van n afm.⟩ een afgeleide, n.l. een lijnvector; *(onleesbaar fragment)* de bijbehoorende ${}^nV$–distr. heeft als afgeleide de R_{n-1}, loodrecht op dien lijnvevtor.

. . . .

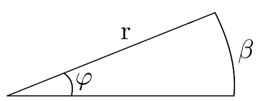
(doorgehaald, aansluitend op het hierboven doorgehaalde:) ⟦Dat −teeken wordt bereikt, door ⟨steeds⟩ achter de indices van een vector nog een 0 te zetten (de oorsprong vertegenwoordigend, zoodat elke ^{p} − vector (p+1) indices heeft, wat eigenlijk ook noodig is, om hem te bepalen.⟧

. . . .

We hebben voor niet-Eucl. ruimte als boogelement ten opz. van Eucl. is:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - k^2\,(x^2 + \beta^2)}$$

Voor ell.: $2k\beta = \sin(2kr)d\varphi$
voor hyp.: $2k\beta = \mathrm{sh}(2kr)d\varphi$



De functieleer houdt zich slechts met zeer bijzondere functies bezig, de analytische; maar dat hindert niet: het is streng, d.w.z. een vrij zelfgeschapen bouw-werk, dat een gedeelte van de natuur wil nabouwen, om er vat op te **VIII-11** hebben, waarbij men echter wel eens te ver gaat in zooverre, dat men zich in absoluutheid van de ‘feiten’, onafhankelijk van een doel, waarvoor, verstrikt.

. . . .

[Couturat p. 52 onderaan] ‘classes disjointes’, maar kan ik bij elk paar cardinaalgetallen volgens *zijn* definitie gescheiden klassen vinden? Neen, zoek dan maar eens b.v. de som van het cardinaalgetallen van alle sterren,[⟨12⟩] en van alle sterren, heeter dan 1000^0?[12] Het cardinaalgetal daarvan zou je niet kunnen definieeren.

Je kunt het alleen, als je van de getallen volgens Cantor een ‘freie Schöpfung des Geistes’ maakt: dan kan ik ze naar willekeur gescheiden buiten elkaar plaatsen.[13]

. . . .

Zoo min als wij de natuur kunnen nabouwen, zoo min kunnen wij ⟨logistisch⟩ het intuitieve continuum nabouwen: alleen kunnen we – natuurlijk – van beide nabouwen dát, wat we er zelf mee doen.

. . . .

(Naar aanl. v. Couturat p. 74 midden) Verdedig liever met: *asymmetrische relatie zonder meer* is symmetrisch: immers aan beide termen er van kan dan nog de voorkeur worden gegeven.[14]

. . . .

VIII-12 [Is op het oppervlak van een stuk R_{n+1} een indicatrix geteekend, dan heeft ook de R_{n+1} zijn indicatrix.[15]

Immers beweeg de opp. indic. naar de pos. assenindicatrix*(?)*, en wordt ze dan $X_1, X_2, \cdots X_n$, dan wordt de $n+1$ indicatrix:

$X_1, X_2, \cdots X_n, 0$; beschouwen we de R_{n+1} als vector, dan kunnen we de *0* op het eind stilzwijgend weglaten.

Onder ⟨$(1, 2, ...n, 0)$⟩ inhoud van een simplex ⟨met een indicatrix⟩ verstaan

---

[⟨12⟩] *(moet zijn):* de som van *de* cardinaalgetallen van alle sterren, we:[13]

$$\begin{vmatrix} (x_1)_1 & (x_2)_1 & \cdots & (x_n)_1 & 1 \\ (x_1)_2 & (x_2)_2 & \cdots & (x_n)_2 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ (x_1)_n & (x_2)_n & \cdots & (x_n)_n & 1 \\ (x_1)_{n+1} & (x_2)_{n+1} & \cdots & (x_n)_{n+1} & 1 \end{vmatrix},$$

of als we het $(n+1)^{de}$ punt in den oorsprong zetten:

$$\begin{vmatrix} (x_1)_1 & (x_2)_1 & \cdots & (x_n)_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ (x_1)_n & (x_2)_n & \cdots & (x_n)_n \end{vmatrix}$$

. . . .

Vectordistr. in de punten; zoo ook in de lijnelementen

. . . .

(doorgehaald, en waarin reeds eerdere en thans onleesbare doorhalingen:) ⟦In het stuk Verslagen Mei (Eng.) beduidt $X_1 : X_{10}$

en in het stuk Verslagen Juni (Holl.) beduidt $X_2 : X_{01}$[16]

. . . .

In het stuk Verslagen Juni (Eng.) beduidt X_1 ook X_{01} (het gewone gebruik n.l.), maar bij het vertaalde stuk zullen we daarop in een noot wijzen ⟨wegens de tegenstelling met Verslagen Mei (Eng.) ⟧

. . . .

(in aansluiting op de vorige pagina, het gedeelte vóór de doorhaling:) **VIII-13**

Natuurlijk kan men ook onder X_{pqr} verstaan X_{0pqr}, en dan uit een opp.-^{n}indicatrix (1, 2,... n) den inhouds–$^{n+1}$indicatrix afleiden door de 0 er vóór te

---

⟨13⟩ Onder inhoud van een simplex $[\![-1, ..., -(n+1)]\!]$ verstaan we:

zetten, dus (0, 1, 2, ... n); en dan gebruiken den (0, 1, 2,..n)-inhoud:

$$\begin{vmatrix} 1 & (x_1)_{n+1} & \cdots & (x_n)_{n+1} \\ 1 & (x_1)_1 & \cdots & (x_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (x_1)_n & \cdots & (x_n)_n \end{vmatrix}$$

of, als we het $(n+1)$ ⟨geïndiceerde⟩ punt in den oorsprong zetten:

$$\begin{vmatrix} (x_1)_1 & \cdots & (x_n)_1 \\ \vdots & & \\ (x_1)_n & \cdots & (x_n)_n \end{vmatrix}$$

Dit is de methode van Verslagen Mei (Holl.); alleen had daar voor de uitdrukking van Z nog een –teeken moeten staan.

....

Naar aanl. van de afleiding der elementair velden.

Verdeel de R_n in n kubusjes, en zet in elk kubusje overal den vector van het middelpunt. Deze geven de elementairvelden. Maar nu heb ik in elk kubusje als correctie een lineaire vectordistr. Maar de afgeleide daarvan bestaat uit gelijke en tegengestelde paren:⟨14⟩ hetgeen dus een oneindig kleine potentiaal geeft (t.o.v. het elementairveld n.l.).]

....

Te 'begründen' is de intuitie van continu niet dan:

1^e te bekijken als tegenhanger van de discontinuiteit, die onze veruiterlijking is.

2^e als de waarschijnlijkheid⟨sstelling,⟩ die *steeds* weer bij elke volgende decimaal voor elk cijfer gelijke kansen geeft. Maar het stelsel, dat dat geeft, staren wij aan als natuurverschijnsel, kunnen het niet opbouwen met onze discontinuiteitsveruiterlijking.[17]

....

VIII-14 *(doorgehaald:)* ⟦Gesteld al, ik had een ding met al de eigenschappen van

⟨14⟩Maar de afgeleide daarvan bestaat uit gelijke en tegengestelde paren ⟦van antipodische punten:⟧

het intuitieve continuum geconstrueerd; dat resultaat zou ik met verwondering aanstaren, dus ik zou niet de minste reden hebben, aan te nemen, dat dat geconstrueerde continuum iets met het intuitieve te maken had. [18]⟧

. . . .

[Zijn bij een willekeurig mechanisme de arbeidscoëff. niet te splitsen in een gradient en een flux?]

. . . .

De variatierekening streng maken? Och, beschouw de wiskundige oplossing van vraagstukken toch niet als iets op zichzelf (dat streng gemaakt zou moeten worden), maar als een hulpmiddel, dat een aanwijzing moet opleveren voor de oplossing van physische vraagstukken?

. . . .

Zegt iemand: het intuitieve continuum is een aangeleerde waan, dan zeg ik: *elke* zoogenaamde 'grondvoorstelling' is een aangeleerde waan.

. . . .

In het proefschrift wordt het dessous, dat anders slechts even terloops wordt besproken (Bakhuis), op den voorgrond gebracht.

. . . .

De wiskunde is het centralizeeren van een werken op iets anders, het mysterieuze 'andere', de buitenwereld, ⟨de 'objecten', die ontstaan, door het afgegrensd wiskundig zien.[⟨15⟩] **VIII-15**

. . . .

Als wij spreken van een 'graad van nauwkeurigheid' van waarnemingen, volgt daaruit, dat wij de intuitie van volkomen nauwkeurigheid in ons hebben (dus van het mathem. continuum, onafh. van het fictieve continuum).[19]

En als Klein het postulaat van oneindig voortgezette graad van nauwkeurigheid, nader wil gaan vastleggen door het fictieve continuum op te bouwen, is dat onzin. Het postulaat ⟨zou dan zijn⟩ een stelling van waarschijnlijkheidsrekening over de natuur:[⟨16⟩] doorgaande met meten kan ik steeds een nieuwe decimaal vinden, en alle decimalen hebben gelijke kansen; ⟨maar een inductiepostulaat over de natuur *) is geen wiskunde, maar physica. En ik moet mijn cont. hebben

---

⟨15⟩ De wiskunde is het centralizeeren van een werken op iets anders, het mysterieuze 'andere', de buitenwereld, ⟦De mysterieuze axioma's zijn de terugkaatsing terugstoting van dat 'andere'. Zoo de mathematische inductie en ook het construeeren.⟧ *(Het doorgehaalde gedeelte is moeilijk leesbaar)*

⟨16⟩ Het postulaat ⟦is⟧ een stelling van waarschijnlijkheidsrekening over de natuur:

onafh. van iets buiten mij.⟩ Maar waar haal ik die stelling vandaan? Uit de intuitie van continuum.[20]

*) *(kantlijn:)* ⟨zij het een fictieve⟩

. . . .

Het is een intuitieve handelensdrang, die wordt begeleid door de voorstelling, dat er medemenschen van je zijn.

. . . .

Dat de exacte wiskunde niet is te veruiterlijken, zegt niets; dat is geen enkele droom of fantazie, hoe zuiver ook. Maar het exacte is het onze; we kunnen over het inexacte niet eens spreken in termen, dan die het exacte vooronderstellen.

. . . .

VIII-16 Wij zelf kunnen ⟨in ons intellect⟩ niet anders dan aftelbare hoeveelheden scheppen (overeenk. onze eigen levenstijd, en ⟨het discontinue in⟩ het daarin gedefinieerde.)[⟨17⟩]

(doorgehaald:) ⟦Maar we kunnen in empirische dingen (van de continue wereld, die we aanstaren) axioma's van waarschijnlijkheidsrekening plaatsen; een eigen intuitief continuum hoort ook ⟨tot⟩ die buitenwereld.⟧

De tweede machtigheid T van Cantor, kunnen we daarom ook niet scheppen.

(doorgehaald:) ⟦We kunnen alleen als *empirisch* verschijnsel postuleeren, dat bij elke fundam. reeks een grenselement hoort; elk element door een fundam. reeks is te benaderen, waarvan zij de eerstvolgende is.⟧ [21]

Want alles, wat wij *wiskundig* kunnen scheppen, is aftelbaar; willen we T gaan scheppen, dan merken we, dat ons scheppen nooit klaar komt met het geven van geisoleerde *daden*; en *wetten*, dat zijn aftelbaar oneindige feitenreeksen; maar daarom mogen we niet postuleeren, dat er nog dingen zijn *buiten* hetgeen wij scheppen kunnen.

. . . .

Voor Punktmengen ⟨in c⟩ zijn maar 2 manieren van bestaan:

1^e de wiskundige vrije schepping (1^{ste} machtigheid.)

2^e de onbepaald voortloopende physische benaderingsmogelijkheid (2^{de} machtigheid)

Er *bestaan* dus maar 2 ⟨machtigheden⟩ van Punktmengen.[⟨18⟩][22]

⟨17⟩ (overeenk. onze eigen levenstijd, en ⟦de beperking van⟧ het daarin gedefinieerde.)

⟨18⟩ Er *bestaan* dus maar 2 ⟦soorten⟧ van Punktmengen.

. . . .

[Alle te vormen *nieuwe* symbolen in T zijn het aantal groepen van een aftelbare oneindigheid A. **VIII-17**

Hierin komen ze dus overeen met de elementen van de fictieve c. Alleen komt er nu voor *elk* nieuw symbool van T nog een ⟨eindig aantal⟩ elementen van den normaalvorm bij.]⟨19⟩

R de überall dichte aftelbare Punktmenge ⟨der ration. getallen⟩ *) neem er alle bekende grenzen bij ($\sqrt{2}$, π enz.), dan blijft het dezelfde Menge; pas er weer en weer en ω maal die toevoeging op toe; we houden dezelfde Menge. De 'perfecte' Menge is dus niet op te bouwen,⟨20⟩ *bestaat* dus niet: alleen in de physica der intuitie zien we haar, en we kunnen er axioma's van stellen ⟨van⟩⟨21⟩ waarschijnlijkheidsrek. We postuleeren dus de 'perfecte' of 'vollständige' (Hilbert) Menge, maar omdat ze ⟨niet individueel kan worden opgebouwd,⟩⟨22⟩ kunnen we niet van haar *machtigheid* spreken.

En nu T. Bij het opbouwen van T merken we, dat we nooit klaar komen, ook niet na ω operaties.

We moeten dus rekenen, dat het klaar komen, m.a.w. de Menge T *niet bestaat*. Want een ⟨intuitieve grond,⟩⟨23⟩ om de Fertigkeit er van te postuleeren, zooals bij c, is er niet.[23]

(doorgehaald in de kantlijn:) ⟦Intusschen kunnen we weer postuleeren een benaderingswaarschijnlijkheid voor een hoofdterm, ⟨een nieuw hoofdsymbool⟩ en dan nog *(?)* eindig aantal bijtermen; zoo krijgen we het *bestaan*; maar blijft dan nog de 'loopende orde' (Wohlordnung)? (en voor het Cantorsche bewijs van de eerstvolgende machtigheid?)⟧

*) *(kantl.:)* ⟨d.w.z. de 'overal dichte' Menge v.d. eerste machtigheid⟩ ;

. . . .

[Zijn de direct op te bouwen hoofdsymbolen van T niet overal dicht te ordenen?] **VIII-18**

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Als ik achter elk punt van het fictieve continuum de rij van

⟨19⟩ Alleen komt er nu voor *elk* nieuw symbool van T nog een ⟦aftelbaar aantal ⟧ elementen van den normaalvorm bij.

⟨20⟩ ⟦Het fictieve perfecte⟧ De 'perfecte' Menge is dus niet op te bouwen,

⟨21⟩ *I.p.v. onleesbare doorhaling.*

⟨22⟩ *I.p.v. onleesbare doorhaling.*

⟨23⟩ Want een ⟦physische⟧ grond,

T invoeg, behoud ik dezelfde machtigheid; ik krijg dan een *bijna* overal Wohlgeordnete Menge. Zoo is het ook met de rij T van Cantor zelf.⟧

....

[De *op te bouwen* ⟨ω⟩ hoofdsymbolen van T moeten nu systematisch worden onderzocht.]

....

De materie zou alleen uit punten bestaan? Waarom blijven dan die punten gescheiden? Door de spanning van 'iets' er tusschen: maar dat 'iets' is dan toch continu. En was een gas alleen vliegende punten, hoe zouden die dan als vast lichaam toch op elkaar werken, als er *niets* tusschen was? Trouwens de theorie van Maxwell verklaarde direct de Fernwirkungs theorie.

⟨Ook denken wij bij 'werking' aan onderlinge doordringing, dus geleidelijke overgang.⟩

(doorgehaald, in de kantlijn:) ⟦En toch...en toch... Misschien is ons contin. een paradox, die bij benadering bruikbaar is als resultaat van wetten van groote getallen in de physica.

En is onze 'intuitie' van lijn niets, dan de relatie van scheiding tusschen 2 punten.[24]⟧

....

We postuleeren in de natuur exactheid en regulariteit van de functies en differentiaalquotienten; onze waarneming echter is inexact; en onze wiskundige nabootsing lijdt aan singulariteiten, *) wordt dus t.o.v. de natuur altijd inexact.[25]

*) *(kantlijn:)* ⟨Waarom willen we die niet in de natuur? Omdat we het 'moeilijk kunnen denken', slecht vinden passen in onze veruiterlijking.

Komt in de natuur dan geen oneindige $\frac{dy}{dx}$ voor? Jawel, maar die y en x zijn door óns ingevoerde coördinaten, behooren dus bij de nabootsing.⟩

....

In de dissertatie is meer afbreken, dan opbouwen; maar afbreken is in de wereld het naaste.

....

VIII-19 *(doorgehaald:)* ⟦De intuitieve krommen voor de verbeterde Hilbertsche grondslagen onderstellen voor een kromme lijn niets, dan iets, waarlangs een (voor het heele vlak dezelfde) eendimensionale maat lengte gelijk is.⟧

....

Omdat ik niet kan spreken van *alle* punten v.h. continuum, zeg ik voor

Stetigkeit niet: *alle* tusschenwaarden worden bereikt, maar: *als* ik een tusschenwaarde geef, wordt hij bereikt (de plaats waar, is door opvolgende benaderingsmeting te vinden.)

. . . .

De 'Satz vom Widerspruch' laat men alleen gelden omtrent het 'zélf opgebouwde'.

. . . .

en evenzoo alle logische wetten. Alleen hoort dan continuiteit tot hetgeen men bij die opbouwing gebruikt.

. . . .

De wiskunde is het vermogen tot valsche ondermijnende aanvallen, door het bestudeeren van de natuurwetten van den tegenstander. (Om een boom te vellen, een ring van zijn schors te villen). De listigheid en valschheid van wilde volken is het primitieve stadium hiervan.

. . . .

Een fundamentaalreeks kan ik 'af' denken; eveneens ⟨de waarde van⟩ een convergente reeks (de eerste geeft de vastigheid van de gelijkheid der termen; de tweede die van een limietwaarde); maar niet een hoogere machtigheid, of een divergente reeks. (de laatste echter weer wel, als ik van de 'waarde' afzie: dan is er niets anders dan een wet van voortschrijding.[⟨24⟩] [26] **VIII-20**

. . . .

Het continuum[27] kan gezet worden in de intuitie of ⟨daarna⟩ in de aanschouwingswereld ⟨en als phenomeen van de benadering worden bekeken⟩ ; maar in geen geval in het gebouw der logica.

. . . .

Primair is het onbegrensde open continuum.[28] *) (zooals de tijd, maar niet de tijd zelf.) Het is iets anders, als zijn punten: **) maar ik kan er punten opzetten, er bij voegen als grenzen. Een grenspunt geeft mogelijkheid tot verdeeling van het continuum in tweeën: de grens hoort dan bij beide helften. Zoo komt het begrensde continuum: de grenzen, die daarop mogelijk zijn, daar kan ik het begrenzende punt bij rekenen of niet. In het eene geval krijg ik de afgesloten verzameling van grenspunten (vooraf kan ik mij een schaal in het tweetallig stelsel construeeren), in het andere de open verzameling.

Het gesloten continuum krijg ik door een begin-, en eindgrens samen te

---

[⟨24⟩] dan is ⟦alles bepaald⟧ er niets anders dan een wet van voortschrijding.

⟨koppelen⟩[⟨25⟩] (zooals ik ook doe, als ik een verbroken continuum weer samenlijm.)[29]

*) *(onderaan de pagina:)* ⟨Dit staat al vóór de wiskunde: maar in de wiskunde komt het alleen naar buiten, als genetrix van grenspunten.⟩
**) *(in de kantlijn:)* ⟨n.l. puntenmatrix⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De axioma's in Hilbert's Grundlagen in Mathem. Annalen zijn niet aanschouwelijk, dus zonder waarde; worden ze vervangen door aequivalente aanschouwelijke, dan kan bovendien § 1-22 ongeveer geheel vervallen.⟧ [30]

. . . .

VIII-21 (Naar aanl. v. Hilbert Grundl. M. Ann. § 35-37) Ik construeer eerst een rationale puntenreeks, en zeg dan: Onder 'Wahre Gerade' versta ik een zekere *(onleesb. doorh.)* kromme, die de eigenschap moet hebben, dat hij de geheele rationale schaal bevat.[⟨26⟩]

De coördinaten van de punten dier kromme zijn dus bepaald voor rationale waarden van het argument, ⟨en die waarden voldoen aan de eig. van § 35.⟩

Geef ik nu verder nog als voorwaarde, dat de kromme 'stetig' is, dan is ze bepaald. Immers benader ik een waarde van het argument, dan tegelijkertijd een coördinatenstel van de kromme, en de zoo komende kromme is werkelijk stetig.[31]

(doorgehaald in de kantlijn:) ⟨De methode zal nu zoo moeten worden omgewerkt, dat ik onder de verb. lijn van A en B versta een intuitieve kromme met de eigenschap, dat het midden van elke 2 punten op de lijn ligt ook op de lijn.⟩

. . . .

[De Zahlenebene, die Hilbert l.c. ten gronde ligt, is die in anal. sit. (opgebouwd b.v. volgens Mannoury als een rationale driehoeksschaal); eventueele rechte lijnen, die bij de mengmeetkunde direct aanwezig zijn, bestaan hierop niet. Men kan ze echter gauw er op leggen (uit de coördinaten), en zoo de bewegingsgroepen afleiden. Volgens Hilbert blijken dit dan de *eenige* ⟨soorten van⟩ groepen te zijn.]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Het continuum is loopend te ordenen als rij van alle geheele getallen met eindig of ω aantal cijfers. (Het eerstvolgende getal wordt benaderd
VIII-22 tegelijk met het getal zelf.) Evenzoo ‖ is T te ordenen als rij van ω willekeurige

---

[⟨25⟩] Het gesloten continuum krijg ik door een begin-, en eindgrens samen te ⟦laten vloeien⟧

[⟨26⟩] Onder 'Wahre Gerade' versta ik een zekere *(onleesb. doorh.)* kromme, die de eigenschap moet hebben, dat hij de geheele rationale schaal bevat. ⟦Nu moet dus eerst worden bewezen, dat die rationale schaal geen beletsel voor de 'Vernünftigkeiten' is⟧

getallen der eerste machtigheid. Hieruit bepaal ik n.l. de exponenten van de normaalvorm achtereenvolgens van rechts naar links (want naar links is de rij oneindig). En wel neem ik als e_p (p^{de} exponent): $e_{p-1}+t_p$ (als t_p het p^{de} gekozen getal der 2^{de} machtigheid is); die sommeering doe ik door e_{p-1} en t_p beide in den normaalvorm te schrijven,⟨27⟩ en dan de gezamenlijke termen naar volgorde van grootte achter elkaar te zetten.

Zoo blijkt dan T van zeker grooter machtigheid, dan c. 't Is nu de vraag, of in de nieuwe vorm van T en c doorgaat, dat een *deel* aequivalent is met een Abschnitt.[32]

Gaat dit voor alle loopend geordende rijen door? (Zie Cantor) Dan natuurlijk ook voor c.⟧

....

Er is niets te zeggen van het continuum, dan met behulp van een er op geconstrueerde überall dichte schaal. (Die schaal drukt het heele wezen van het c. uit). Dus ook elke deelverz. moet ten slotte met zoo'n schaal zijn uit te drukken. En dat kan dan maar zijn op 2 manieren;

1^e direct gedefinieerd. Dan is de verz. aftelbaar.

2^e met behulp van een oneindige kansenreeks. Dan is de verz. van de machtigheid van c.[33]

....

(doorgehaald:) ⟦De machtigh. v.h contin. moet zijn te bewijzen uit:

1^e) De splitsbaarh. ⟨van F ⟩ in 1^e door afleiding afbrokkelen 2^e perfecte Menge.

2^e) Abgeschlossene Menge is òf van de machtigh. c òf $\aleph_0$.⟧

....

Bij de benadering van de Teilmengen van c.[34] **VIII-23**

Achtereenvolgens wordt elke decimaal in ⟨tweet. stelsel⟩ benaderd, al of niet met vrije keuze.

(Opmerking hierover bovenaan bladzijde:) ⟨Denk als voorbeeld de voorwaarde, dat het getal achter de komma, bij elke decimaal afgebroken een ondeelbaar getal moet zijn.⟩

(doorgehaald:) ⟦1^e *geval* Het aantal decimalen met vrije keuze is eindig.

Eindige machtigheid.

2^e *geval* Het aantal decimalen met vrije keuze is oneindig. Dan wordt het aantal ⟨mogelijke⟩ punten A_p bij de p^{de} decimaal met p oneindig. Stel nu eerst, dat het aantal ⟨van deze A_p⟩ , dat nog weer keuzen zal toelaten bij een der volgende decimalen Z_p eindig blijft (een bovenste grens heeft).

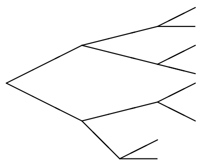
Dan hebben we de machtigheid $\aleph_0$.

⟨27⟩ *(doorhaling binnen de doorhaling:)* die sommeering doe ik door ⟦de termen⟧ e_{p-1} en t_p beide in den normaalvorm te schrijven,

3^e *geval.* Niet alleen A_p, maar ook Z_p kan ten slotte boven elke grens stijgen (dan stijgt het ook zooveel maal boven de grens als ik maar wil, immers stel de eerste maal, dat het boven g_1 stijgt, is het γ_1 , dan komt ook een maal, dat het boven γ_1 stijgt, b.v. γ_2 enz.)

Stel het stijgt eerst boven γ_1, dan later ook nog eens boven $2\gamma_1$, dan zeker nog eens boven $2^2\gamma_1$ ⟧

We krijgen dan een telkens herhaalde tweevoudige vertakking:



We breken nu echter elke tak die doodloopt, of zich nooit meer vertakt, af; er blijft dan ten slotte over: òf *niets*, òf *een volledige oneindig voortloopende twee-vertakking.* Het laatste geval geeft zeker de machtigheid c ⟨voor de grenspunten.⟩ Denk voor het eerste geval, dat we alleen de doodloopende takken afbreken; dan kan overblijven:

a) *niets*; dan hadden we eindige machtigheid.

b) *een boom met een eindig aantal oneindig lange takken*: dan hadden we machtigheid $\aleph_0$ voor de Menge en eindig voor de grenspunten.

(kantl.:) ⟨Is élke Menge niet een grens–Menge; want kan ik haar niet in 't tweetallig stelsel als Grensmenge benaderen?⟩

. . . .

VIII-24 De opbouw van het *andere* oneindige, dan ω, van c dus, is onafscheidelijk verbonden aan de 'overal dichte' schaal.[35]

. . . .

Als ik alle rationale getallen of alle getallen der überall dichte reeks zou definieeren door de benaderingsreeks *), dan zouden er 'evenveel' zijn, als alle reëele getallen, dus c. (Immers al benaderende – en dat is de eenige manier om 'al de reele getallen' te denken – kan ik beide groepen een–eenduidig op elkaar afbeelden.)[36]

We spreken echter af, dat, zoo nog een andere definitie mogelijk is, dan die door de benaderingsreeks, **) dat dan die ándere definitie ten grondslag zal liggen aan de machtigheidsbepaling. Die ándere definitie moet dus een directe definitie zijn, geeft dus altijd een eindige of aftelbare machtigheid.

*) *(kantlijn:)* We kunnen zóó zeggen: Ik mag hier niet ω maal kiezen, maar een 'beliebig groot' eindig aantal. De machine, die de kanskeuzen uitspeelt, is zoo ingericht, dat hij vroeg of laat moet stoppen.

**) *(kantlijn:)* eventueel ook gedeeltelijk; denk b.v. de Menge, waar achter de komma eerst een eindig getal en dan een eindig of oneindig met de ondeelbaarheidsvoorwaarde.

....

Als goed en slecht nu eens berustte op bewegingen en deeltjes, nog veel kleiner dan electronen?

....

De ruimte-intuitie is een van exactheid en continuiteit; wij beheerschen haar echter door er 'schalen', dat is exacte discontinuiteit op te appliceeren.[37]

....

[Men bedenke steeds, dat ω alleen zin heeft, zoolang het leeft, als de groeiende, bewegende inductie; als stilstaand abstract iets is het zinloos; *(onleesbare doorhaling tussen de regels)* zoo mag ω nooit àf gedacht worden, om met behulp van het *geheel* als nieuwe eenheid te werken: wel mag je het àf denken in den zin, van je er van af te keeren, tewijl het doorloopt, en iets nieuws te gaan denken.]

....

In elk geval is een zeker bestaande Menge: $C^{\aleph_0}$, waar op elke volgende decimaal in plaats van een cijfer, een willekeurig punt v.h. continuum valt. Maar de machtigheid daarvan is c. **VIII-25**

Daarentegen de machtigheid $F = C^c$, die van alle functies, bestaat niet.

....

Wil ik alle mogelijke 'Mengen van grenselementen' zoeken, die uit ω zijn te vormen, dan moet ik alle mogelijke oneindige groepen er uit vormen, of hiertoe maar alle mogelijke groepen; en dit geschiedt door de benadering in het tweetallig stelsel, die als soorten van groepen dus alleen geeft, van machtigheid E (eindig), A ($\aleph_0$) en C.[38]

....

Het bewijs van de 2-vertakkingen, gaat ook door voor 3-, 4-vertakkingen, zelfs voor ω-vertakkingen. De eisch wordt dan echter, dat elke tak zich altijd door moet splitsen, nu niet in tweeën, maar in hetzij ω, hetzij een willekeurig eindig getal vertakkingen.

....

Wil ik ω aftellen, dan kan ik dat doen òf gewoon, òf gebruik makend van het eindige getal, dat ik telkens al heb; het eerste geval geeft de loopende ordening, het tweede de überall dichte. Beide wijzen kunnen worden vermengd.[39]

. . . .

VIII-26 [Heb ik de machtigheid A, dan heb ik afwisselend overal dichte en welgeordende stukken; die stukken als punten nemend, heb ik dan weer overal dichte en welgeordende stukken; die stukken als punten nemend weer, enz. (een aantal malen van de ⟨eerste of⟩ tweede getalklasse.)⟨28⟩ De zoo komende ⟨mogelijke⟩ machtigheden van grenspunten blijven dezelfde als voor de enkele überall dichte Menge.][40]

(tussen de regels en bovenaan de bladzijde:) ⟨Immers we hebben $\aleph_0$ geconstrueerde deelpunten; dus $\aleph_0^2 = \aleph_0$ eindige segmenten; en nu hebben we àl of niet op minstens één dier segmenten de volledige boomtak met machtigheid c. We moeten *alle* intervallen der üb. dichte schaal onderzoeken; denk b.v. aan de duaalbreuken, die beginnen met een willekeurig eindig getal, en daarna een beperkte benadering.⟩

(kantl.:) ⟨Wil ik het 'alle grenspunten' beperken, dan kan dat alleen door beperking der genereerende in sich dichte aftelbare (waarin we elk interval tot een punt denken saamgetrokken); en dat kan volgens boomtak bewijs maar op 3 manieren.

cf. ook Bernstein Math. Ann. 61 p. 144⟩ [41]

. . . .

Wij denken in de natuur niet-oneindig vaak wisselende functies, omdat wij op een zoo ingerichte natuur geen vat zouden hebben. Om op de natuur te kunnen werken wagen wij de generalizatie van continuiteit, en van differentieerbaarheid, ⟨immers interpoleerbaarheid⟩ . Discontinuiteit is geen sprake van, want daartoe zouden wij in de natuur 'punten' moeten zien, tewijl we heel goed merken, dat die alleen onze eigen veruiterlijking zijn. We kunnen ze echter als rekenmiddel invoeren. (Moleculaire- of electronentheorieën.) Van oneindig vaak wisselende functies, die ⟨niet mathematisch (in andere variabelen)⟩ door andere zonden zijn te vervangen 'willen we echter niets weten'.

. . . .

[Als we bolfuncties of cirkelfuncties willen zoeken, evenredig met een gebroken macht van r, vinden we een meerwaardige functie van de richting.]

. . . .

VIII-27 (Klein Prinzipien[42] p. 209) 'De analytische meetkunde steunt (op grond der meetkundige axioma's) explicite op het getalbegrip; de synthetische (op grond van dezelfde axioma's) opereert aan de figuren zelf.[43]

. . . .

⟨28⟩ ⟦Ten slotte⟧ (een aantal malen van de ⟨eerste of⟩ tweede getalklasse.)

(doorgehaald, slecht leesbaar:) ⟦(ib. p. 212) 'De lineaire inhoud*(?)* der verzameling is de limietsom van de oneindig kleine segmenten, die om elk punt worden gelegd (zóó, dat het punt het middelpunt v.h. segment is'.)[44] ⟧

....

[Bij inversie rekent het oneindige als enkel punt.][45]

....

Er is geen wiskunde mogelijk, dan op grond van bepaalde definities: de oorspr. termen hiervan moeten intuities zijn, 'waaromtrent geen misverstand mogelijk is'; verder onderstelt elke wiskunde een 'wiskundig gebied', en hoewel zoo'n gebied steeds voor uitbreiding vatbaar zou zijn, is het bij de beoefening der wiskunde vast. Elke uitbreiding is een uitdrukkelijk te vermelden feit, en daarna is het weer vast. De wiskunde werkt dus met een *eindig* aantal woorden (zoo alleen kan men elkaar verstaan), ook al zou dat eindige getal zoo groot kunnen worden genomen, als ik wil.

....

Bij de gewone meetkunde nu is het gebied, dat alle punten v.h. cont. postuleert onafh. v. de gewone meetkunde, die alleen de punten v.h. Hilbertsche getallenlichaam (Festschr.) postuleert. Het 'Axiom der Vollständigkeit' is een hol woord, dat de twee moet lijmen.[46]

....

Het ⟨onbekende⟩ irrationale punt is meer de limiet van een Strecke ('het intuitieve continuum' of 'het *andere* van het punt in het cont.' of de *relatie* van 2 punten in het continuum), dan van een punt. ⟨Maar het bekende irrationale punt, bv. $\sqrt{2}$ is wel degelijk een punt.⟩ **VIII-28**

....

(doorgehaald:) ⟦Als Punktmenge opgevat, is er voor een kromme niet de minste grond, om differentieerbaar te zijn. Maar een kromme, die ik gemakkelijk ..⟧

De differentieerbaarheid ener kromme onderstelt 2 gelijk gestemde 'überall dichte' schalen op de 2 variabelen; en dan komt als ik functies geef voor eindige schaalstukken het constante diff. quotient voor ten opzichte van de beschouwde oneindig kleine schaalstukken.

....

(Klein Prinz. p. 262)[47] Hij wil hebben, dat de psychologen de kwestie zullen gaan onderzoeken. Alsof dat iets aan de zaak kan afdoen![48]

....

(ib. p. 264 bovenaan) Er zijn natuurlijk ⟨nog⟩ wel heel andere groepen van krommen,[⟨29⟩] waar het kleinste stuk het geheel bepaalt.[49]

. . . .

(ib. p. 275) ‘Wil men bij de meetkunde geen gebruik maken van de getallen, dan moet men als axioma nemen: Een oneindig klein wordend stuk van een oppervl. of een (ideaal)kromme definieert een punt.[50]

. . . .

VIII-29 In de wiskunde is vaak de limiet van een analytische ⟨functie⟩ een niet-analytische.[⟨30⟩] (De niet-analytische blijken dus bij het bouwen secundair. ⟨Immers de analytische zijn door een eindig aantal teekens te bepalen⟩ . Daarom kan vaak in de physica zoo’n limiet-functie dienst doen, b.v. bij electronenbeweging. Maar haar in de natuur als werkelijk aannemen, dat kunnen we ons niet denken. ⟨Niet eens een discontinuiteit willen we ons denken⟩ . Ons heele maatidee verzet er zich tegen. Zoo goed, als we echter met discontinue functies werken, kunnen we met niet-anal. functies werken.

. . . .

(Frege[51] Jahresber. XII cf. vooral p. 370, 374).[52] Hij heeft tegen Hilbert in zooverre gelijk, dat die axiomatische onderzoekingen alleen mogen worden opgevat als onderordening van een intuitief gebouw in een meer algemeen intuitief gebouw. En Schopenhauer heeft hierin gelijk, dat elke nieuwe stelling niets is dan een nieuw ‘gebouw in een gebouw’.[53]

. . . .

Dat er zoo’n ‘symmetrische relatie’ of ‘asymmetrische relatie’ een–eenduidig, of een–tweeduidig, *bestaat* is een primair wonder, een intuitie bij de bouwactiviteit.

. . . .

Frege heeft tegen Hilbert gelijk, waar werkelijk bij Hilbert de axioma’s geen Grundzüge ⟨Gesetze⟩ der Anschauung kunnen worden genoemd.[54]

. . . .

Een gedachte is het begin van een daad.

Een begrip is het begin van een voorstelling van een voorwerp, (doch alleen de projectie van dat voorwerp op een bepaalde wilsuiting) en wel meestal een van de samenleving, want begrip en woord scheelt niet veel.)

⟨29⟩ ⟦Waarschijnlijk zullen er nog⟧ Er zijn natuurlijk ⟨nog⟩ wel heel andere groepen van krommen,

⟨30⟩ In de wiskunde is vaak de limiet van een analytische ⟦kromme⟧ een niet-analytische.

....

Het is nog zoo kwaad(?)[⟨31⟩] niet, dat de menschen op zoo'n gepartieerd terrein leven. Daarop is ten minste wederzijdsche omgang mogelijk, zonder dat de onderlinge vijandschap manifest hoeft te worden. Het publieke verkeer slaagt er hoe langer hoe meer in, die onnatuurlijk latent te houden. Op het wiskundig gebied is die latentie volkomen.

....

Het spel van Bolland bestaat in 1^e het elkaar verstaan met andere woorden, **VIII-30**
of met dezelfde woorden in andere beteekenis, dan gewoonlijk 2^e het elkaar exact verstaan.

Het eerste is een onschuldig spelletje, waardeloos; het laatste gebeurt reeds lang in de wiskunde, en daar de wiskunde van Bolland geen praktische toepassing heeft, is ook dat een onschuldig spelletje. Het geheele spel is intellectueel, niet wijsgeerig.[55]

....

(Frege Jahresber. 12 p. 371 onder) 'Dies soll als logische Urerscheinung angesehen werden'. Wijsgeerig heb ik er echter nog wel een ondergrond voor uitgesproken.[56]

....

(ib. p. 372) Men kan net zoo goed zeggen dat eigenlijk alleen het praedicaat echte directe beteekenis heeft (immers werking op den wil), en dat een subjekt alleen zin heeft, doordat we er in stilte een of meer praedicaten aan denken, die meestal reeds in het naamwoord v.h. subject liggen opgesloten. De vastlegging van een praedicaat, d.i. een werking op onze wil ⟨met andere praedicaten,⟩ tot een subject d.i. een ding, waaraan buiten ons zelfstandig bestaan wordt toegekend, en waarop door ons kan worden gewerkt, is de grond-zondeval in ons hoofd, onderhouden door de verstandhouding.[57]

....

De 'maioren', waarvan bij de wiskundige syllogismen wordt gebr. gemaakt, **VIII-31**
mogen niet anders zijn dan tautologieën, d.i. ⟨twee⟩ verschillende verklankingen (samenbouwsels van partieele gezichtspunten) van eenzelfde mathematisch intuitief gebouw.

Zoo ook de axioma's. De wiskundige stellingen zijn dan samenbouwsels uit het groote gebouw, waarvan de ver van elkaar verwijderde deelen niet zoo direct intuitief zouden zijn te overzien; zijn dus zelfgebouwde wegwijzers in dat gebouw.

[⟨31⟩] *Dit vraagteken is origineel.*

Daar we nu voelen wegwijzers noodig te hebben, willen we gaan redeneeren, en maken een begin, dat zijn de axioma's. We lezen die dus eerst eenigszins willekeurig uit ons gebouw af.

(kantl:) ⟨'Unabhängigkeit'⟩ [58]

Nu kunnen die axioma's volledig zijn of niet, d.w.z. het kan zijn, dat er nog andere gebouwen mogelijk zijn, die aan dezelfde axioma's voldoen, of niet. Het laatste is het geval, als ik met de axioma's trouw het bouwen zelf ⟨geheel⟩ heb gevolgd. (onder ⟨b.v.⟩ 'tusschen' versta ik dan het *wiskundige*, d.i. geen misverstand kunnende geven 'tusschen', de relatie zonder meer). Heb ik dat niet gedaan, dan kan ik nooit merken of het stel volledig is (ook al zie ik het bouwwerk en het axiomastel naast elkaar; *) het *moet* een open vraag blijven; de volledigheid postuleeren ware natuurlijk geheel ongeoorloofd); wel kan ik soms merken, dat het ⟨*niet* volledig⟩ is,⟨32⟩ doordat ik een ander gebouw aanwijs, d.w.z. een gebouw, dat duidelijke verschillen heeft met het gegevene (zie ik zoo'n verschil helder, dan kan ik meteen een aanvullend axioma formuleeren), en toch aan de axioma's voldoet.

*) *(kantlijnnoot:)* ⟨wèl natuurlijk kan, uitgaande van een gegeven intuitief gebouw de uniciteit van een gebouw ìn dat gebouw worden bewezen. Maar alleen als ik ìn een gebouw werk, is er bouw-dwang.

cf. Couturat Princ. p. 113 r. 20 'Ou du moins on n'en connaît qu'une', en het continuum dat niet uit kleinere individuen is op te bouwen, kan niet door postulaten worden gedekt. Wel het onaffe cont.; als zoodanig bouwt B.-Forti⟨33⟩ zuiver na, hebben we dus ook uniciteit.⟩ [59]

VIII-32 *(kantl.:)* 'Widerspruchslosigkeit'[60]

Nooit mogen dus axioma's de grond zijn van een wetenschap, want nooit kan hun Widerspruchslosigkeit worden aangetoond, anders dan door het gebouw te wijzen, waaruit ze zijn afgelezen.

Frege heeft dus (l.c. p. 375) volkomen gelijk hierin, dat de axiomatische onderzoekingen niet eens ⟨iets nieuws aan het⟩⟨34⟩ Existenzbeweis kunnen geven, dus niets omtrent de 'Grondslagen' leeren.[61]

Het bouwen zelf moet daartoe n.l. worden nagegaan. Maar niet waar is het, dat de Widerspruchslosigkeit en Unabhängigkeit ⟨door⟩ Hilbert⟨35⟩ niet afdoende is bewezen. Hilbert had alleen zijn noemen van voorbeelden van

---

⟨32⟩wel kan ik soms merken, dat het ⟦ongeoorloofd⟧ is,

⟨33⟩Burali-Forti

⟨34⟩*I.p.v. een onleesbare doorhaling.*

⟨35⟩dat de Widerspruchslosigkeit en Unabhängigkeit ⟦van⟧ Hilbert

'Zahlensysteme' moeten ⟨aanvullen⟩ nog door den *opbouw*,[⟨36⟩] en daarmee het Existenzbeweis van die Zahlensysteme. Freilich is dat weinige ontbrekende het eenige, wat iets omtrent de 'Grondslagen' kan leeren.

. . . .

Als Engeland zoo stom is als Russell, hoe kan het dan zoo machtig zijn? Wel, voor macht is immers slechts noodig het *worden* van anderen op een of andere uithoek, en dat kunnen dwazen en dommen en eenzijdigen wellicht het best. De zuiveren althans zeker niet.

. . . .

Het komt soms voor, dat ik uit axioma's twee tegengestelde dingen kan **VIII-33**
aflezen, dan waren de axioma's niet uit een bouw–werk afgelezen, dus *zinloos*.

. . . .

Of ze wiskundigen, theosofen of socialisten worden, het is maar te doen om een warm hoekje van anderen menschen, om zich door te laten steunen en vooruit brengen.

. . . .

De bedoeling van het bouwen is het vormen van een ⟨constante⟩ gebouw-toestand in ons intellect,[⟨37⟩] waarop zich de werkelijkheid projecteert, in welke projectie de werkelijkheid kwetsbaar is, dus ons den waan kan geven, haar te beheerschen.[⟨38⟩]

(kantlijn:) ⟨En de verstandhouding daarin steunt op den gemeensch. zin, de natuur te willen kwetsen. (zooals in 't algem. eenheid alleen door strijd tegen derden bestaan kan.)⟩

. . . .

(Korselt Jahresber. X p. 403) 'Enthält ein Axiom ein bis dahin unbekanntes Zeichen, so ist eben dies Axiom eine Regel, ein Bestimmungssatz über den Gebrauch dieses Zeichens'.[62] Dit is ook de Hilbertsche opvatting, die hij in Ens. 7 wil grondvesten.[63]

. . . .

[⟨36⟩] Hilbert had alleen zijn noemen van voorbeelden van 'Zahlensysteme' moeten ⟦vervangen⟧ nog door den *opbouw*,

[⟨37⟩] De bedoeling van het bouwen is het vormen van een ⟦actieve⟧ gebouw-toestand in ons intellect,

[⟨38⟩] ⟦dus we⟧ in welke projectie de werkelijkheid kwetsbaar is, dus ons ⟦kan⟧ den waan kan geven, haar te beheerschen.

(doorgehaald, tot halverwege de volgende bladzijde:) ⟦Ja, maar hoe wil ik zoo'n axioma ooit dan kunnen opwerpen? Uit het praktische leven? Dan kan ik er nooit zeker van zijn, dat het juist is; *nooit* is misschien te sterk, maar er zijn zoo weinig vaste gedragsregels in het reine leven – en die dan nog zoo flottant,
VIII-34 en ongeschikt ‖ voor samenwerking en verstandhouding, dat ook niemand er licht een systeem, ⟨levensopvatting, menschenbeschouwing of levenstactiek b.v.⟩ op zou bouwen of zoo ja niet een, geschikt voor anderen dan hun zelf, m.a.w. voor samenwerking, of zoo ja, dan toch niet een systeem van zoo groote uitbreibaarheid (door zijn vaste gronden), dat die uitbreiding ter wegwijzing een wetenschap noodig zou maken.

In elk geval heeft voorloopig alleen het wiskundig systeem, het 'bouw-systeem' zich op die wijze ontwikkeld. Het is ook eigenlijk die 'regelmatigheid', die het verst van de verwerkelijking afstaat.⟧

. . . .

Tegenover de andere regelmatigheden is ⟨de wiskunde⟩ eigenlijk meer de *methode* der menschelijke veruiterlijking ⟨tegen de natuur⟩ , die zoo al toepassing in 't wilde, dan toch nog niet de den menschen geluk-brengende toepassing heeft gevonden. Zoo niet haar toepassing, dan toch haar zuivere toepassing is zij onnatuurlijk ver vooruit.

. . . .

De wiskunde lijkt een gevecht tegen windmolens, of althans een keurig spiegelgevecht zonder vijand.

. . . .

De mathematische wetenschappen vormen exacte logische banden ter voorspelling. Maar het eindpunt der logische keten mist de 'begeerenswaardheid';‖
VIII-35 die is door het telkens herhaalde richtingsversprong ⟨in afgegrensdheid⟩ reeds lang illusoor geworden.

. . . .

Men kan 'kennis' niet anders bezien, dan als ⟨afgegrensd, dus⟩ sleurgewoonte van den geest, dus als in alle opzichten uit den booze.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De zgn. 'Wohlordnung' van het continuum van mij (zie boven), is toch geen Wohlordnung in den zin van Cantor.⟧

. . . .

Bij het ⟨individueel⟩ opbouwen van het ⟨meetkundige n-dim.⟩ continuum bouwen we eigenlijk slechts een steeds aangroeiende aftelbare Punktmenge in dat continuum op. Maar intuitief is het ook niet individueel.

. . . .

Bij het bewijs, dat T van hooger dan de machtigheid ω is – in tegenst. met het bewijs, dat ω van hooger dan eindige machtigh. is – geeft de suppositie, die ongerijmd blijkt, dat de groep zou zijn af te tellen, geen reëel beeld van een rangschikking volgens ω aan; men supponeert de rangschikking van *alle*, maar men kan dat *alle* niet denken.[64]

. . . .

[Blumental in Mathem. Ann. 61[65] ⟨vindt⟩ waarsch. ⟨afwezigheid van⟩ velden zonder *rot*. en *div*. in 't eindige,[⟨39⟩] niet alleen voor pot. 0 in 't oneind., maar voor nóg ruimer voorwaarden. (dan is dus ook een veld door zijn *rot*. en *div*. in 't eindige bepaald.)

(Maar volgt ze daaruit door de gewone formules $\int \frac{\text{div}}{r}$ en $\int \frac{\text{rot}}{r}$?)]

. . . .

De vraag: 'Kan de tweede getalklasse worden afgeteld?' moet waarschijnlijk **VIII-36**
geen 'ja' of 'neen' als antwoord hebben, maar als zinloos worden beschouwd.[66]

. . . .

En de stelling: 'Ze kan niet worden afgeteld' moet aldus worden gelezen:

[*Niet* is waar: 'De aftelbaarheid der tweede getalklasse is 1^e denkbaar en 2^e waar'.]

(Ze is n.l. niet eens denkbaar; want de tweede getalklasse is als geheel niet te denken.)

. . . .

Analoog de stelling: $\overline{\overline{a^p}} > \overline{\overline{p}}$ (als $\overline{\overline{a}} > 1$), moet aldus worden gelezen:

1^e [*Niet* is waar: De beleggingsgroep is *af* te denken, en zóó, dat aan elk element van p een enkele van de beleggingsgroep correspondeert.]

2^e [*Wel* is waar: Met elk element van p is een bepaalde eenduidige beleggingsgroep in correspondentie te brengen.]

. . . .

Bernstein in Mathem. Annalen 61 gaat ten onrechte weer van het bestaan van $\aleph_1$ uit.[67]

. . . .

Opbouwen kunnen we slechts de 'welgeordende' groep, maar onwillekeurig **VIII-37**
ontstaat daarbij de orde-relaties van 'volgen op', die vanzelf een ordeplaats in

---

⟨39⟩ [Blumental in Mathem. Ann. 61 ⟦beperkt⟧ waarsch. ⟦tot⟧ velden zonder *rot*. en *div*. in 't eindige, de ‘enkelvoudig geordende’ groep vinden. *) We kunnen dus opbouwen ten eerste de welgeordende groep (d.i. een willekeurig getal der tweede getalklasse), en dan kunnen we daarin toepassen het proces τ, vooreerst in een bepaald interval, dan in een welgeordende rij van intervallen, en dan kunnen we het in een bepaald interval zich in zichzelf ω maal laten herhalen, waardoor het overal dichte interval wordt gevormd.**) Maar zoo vinden we ook *alle* bestaanbare ⟨individueel geordende⟩ groepen, d.i. ook alle bestaanbare ⟨individueele⟩ groepen, want alleen in een ordening kunnen ons de groepen gegeven worden.[⟨40⟩]

(volgt nog een grotendeels onleesbare doorhaling.)

*) *(kantlijn:)* ⟨het proces τ⟩

**) *(doorgehaalde kantlijn-noot)* ⟦of ook a maal (a van de tweede getalclasse). Dit geeft decimaalbreuken met a decimalen, wat zeer goed denkbaar is (... dim. cont. uitgebreid.)⟧

....

De perfecte kromme van Klein (prinz. p. 312) is dat slechts in schijn: hij bouwt alleen de überall dichte kromme op ⟨en de aftelbare hoeveelheid daaruit door *wetten* te construeeren⟩ .[68]

....

Proj. meetkunde. Men begint met tusschen 3 punten de überall dichte schalen te construeeren; de versch. punten worden verhoudingen van 3 rationale getallen. Tusschen 2 punten stellen we dezelfde ‘relatie’ als tusschen een der punten en $\lambda x + \mu y$. De voorwaarde dat dus 2 puntenparen dez. relatie hebben, is:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

voor beide paren gelijk; die verhouding noem ik de coörd. v.d. lijn.

....

VIII-38 Of ook: Ik stel 2 onafh. ruimten op; noem de elementen van de een *punt*, van de andere *lijn*; zeg dat een punt v.d. ene ruimte en een lijn v.d. andere in elkaar liggen, als $\Sigma x_1\xi_1 = 0$. En noem lijn van de eerste ruimte alle punten dier ruimte, die in een lijn der tweede ruimte liggen.

....

Het beste bewijs, dat het continuum intuitief is, is wel, dat een kind over al

⟨40⟩ want alleen in een ordening kunnen ons de groepen ⟦verschijnen⟧ gegeven worden.

de er op betrekking hebbende redeneeringen heen hoort, maar ze toch zonder aarzelen direct zuiver toepast.

⟨Dit argument wordt niemand opgedrongen, maar wie het aannemen wil, neme het.⟩

. . . .

Men heeft de rationale schaal, en enkele ⟨daarin⟩ stetige bewerkingen daarin. (b.v. *(onleesb. doorh.)* worteltrekking). Men definieert nu ⟨op grond van die bewerkingen⟩ , de *bekende* irrationale getallen (op grond van uitbreiding ⟨tot een⟩[⟨41⟩] stetigkeits'postulaat') als limieten van bekende reeksen (aan welke limieten dan de bekende orderelatie wordt toegekend).

Of ook men definieert de *onbekende* irrationale getallen als limieten van onbekende reeksen. Men kent er de bekende orderelatie aan toe, en behoeft eerst achteraf, om *bewerkingen* met deze irrationalen te kunnen uitvoeren, het stetigkeitspostulaat in te voeren.[69]

. . . .

Men kan functies ⟨met eindig aantal max. en min.⟩ ook aldus definieeren:[⟨42⟩] **VIII-39**
Om ⟨of aan⟩ elk punt is een eindig segment aan te wijzen, waarin de orderelaties van functie en argument gelijk zijn.

. . . .

Het ⟨mechanisch⟩ postulaat der ⟨anal.⟩ diff. vgl. der tweede orde ⟨onze veruiterlijking⟩ beperkt de natuurlijke continue wisselingen tot enkele weinige functies.[70]

Daarbij komen dan nog de statische functies der evenwichtsfiguren. Deze berusten op een variatieprobleem van een integraal. Dat zulke variatieproblemen voor de natuur werkelijk zin hebben – wat zou zijn te betwijfelen, omdat ze alleen een keus uit ⟨een zekere groep van⟩ 'vernünftige' functies leeren doen – zou ⟨soms moeten⟩ zijn te verklaren:[⟨43⟩]

1^o Op grond van wrijvings (thermodynamische)-wetten ⟨nivelleerende werkingen⟩ , die maken, dat de in de varieerende integraal optredende diff. quotienten werkelijk moeten bestaan.

Ook zal men dikwijls als verklarende hypothese invoeren:

2^o Op grond, dat er invariabele kleinste deeltjes zijn, zoodat elk probleem de limiet is van een discontinuiteitsprobleem. (functies, die in bepaalde argumentpunten alleen waarden hebben, die in het vraagstuk optreden naast hun Differenzen van verschillende orde.) (*Voorbeeld* Het vloeistofoppervlak, dat bij eindige moleculen zoo klein mogelijk tracht te zijn; of de distributie van electriciteit met eindig volume op een geleider.)

[⟨41⟩] *I.p.v. een onleesbare doorhaling. De kantlijn bevat een eveneens onleesbare doorhaling.*

[⟨42⟩] Men kan ⟦stetige⟧ functies ⟨met eindig aantal max. en min.⟩ ook aldus definieeren:

[⟨43⟩] – zou ⟦alleen⟧ zijn te verklaren:

. . . .

VIII-40 ⟨Het bewijs⟩ , dat de limiet van zoo'n discontinuiteitsoplossing, althans onder zekere aan te geven ⟨verdere⟩ voorwaarden, die in de natuur vervuld zijn, is een 'vernünftige' functie, ⟨zal dan in 't algemeen nog vrij lastig zijn.⟩[⟨44⟩]

(Welke functie we echter nooit zullen zoeken als limiet van de discontinue, maar direct door de variatierek.; zooals we ook de vgl. v. Lagrange in de mechanica direct opschrijven, niet uit de massapunten.)

Intusschen zegt S. Bernstein in Math. Ann. 60 p. 434, bewezen te hebben, dat alle oplossingen van variatievraagstukken analytisch zijn. Dat na te zoeken.[71]

(kantlijn:) ⟨Men bedenke ook steeds: *elk* variatievraagstuk is een *physisch* vraagstuk, en men beginne het niet, voor het mathematische raam der physische hypothese te hebben opgesteld.⟩

. . . .

Soms kan ik aan *bekende irrationalen* bepaalde irregulaire (unstetige) waarden ⟨voor⟩ een functie geven, de waarden der *onbekende irrationalen* blijven dan echter altijd nog bepaald door het stetigkeitspostulaat.

. . . .

(Couturat, princ. p. 91) 'L'irrationnel ne peut donc être qu' à priori, et indépendant de toute intuition'.[72]

. . . .

Men bouwt, geheel onafhankelijk van elkaar op, de üb. dichte schaal en de
VIII-41 *onbekende* irrationale punten. Men kan tusschen deze beide groepen geen ‖ verband brengen, nooit van een element van de tweede groep etwa uitmaken, dat het tot de eerste groep behoort.[73]

. . . .

(Couturat princ. p. 94) Zie regel 13 - 20.[74]

. . . .

De intrinseque definitie van perfecte enz. Mengen (Couturat l.c. p. 93 onder

---

[⟨44⟩] ⟦Allicht is aan te toonen,⟧ dat de limiet van zoo'n discontinuiteitsoplossing, althans onder zekere aan te geven ⟨verdere⟩ voorwaarden, die in de natuur vervuld zijn, ⟦en natuurlijk indien zij een limiet heeft.*)⟧ is een 'vernünftige' functie, ⟨zal dan in 't algemeen nog vrij lastig zijn.⟩

*) *(doorgehaalde kantlijn-noot hierbij:)* ⟦immers, het zou kunnen zijn, dat hoe dicht de eindige puntverzameling ook wordt, het vraagstuk in elk geval als een eindig vraagstuk moet worden beschouwd.⟧

en p. 94 boven)[75] gaat niet op. Ik kan niet zeggen: '*Elke* fundamentaalreeks heeft een limiet; immers ik kan niet een ⟨algemeene⟩ fundamentaalreeks beschouwen, want hij is nooit af; ik kan het alleen beweeren van de enkele *bekende* fundamentaalreeksen, die ik op een vooraf geconstrueerde schaal (welgeordend of overal dicht) kan bouwen.

En ook kan ik niet zeggen: '*Elke* *) term A heeft tusschen zich en een andere term B nog minstens één term;⟨45⟩ anders dan in de zin voor een gedefinieerd ensemble, b.v. de üb. dichte Menge.

Ik kan alleen zeggen: Ik heb een welgedefinieerde (dus aftelbare) Menge, en neem er de grenspunten bij; maar die ⟨onbekende⟩ grenspunten kunnen *nooit* gelijksoortig met de (bekende) oorspr. punten gedacht worden.

In 't algemeen kan ik van ensembles grooter dan ω niets zeggen; hun elementen zijn niet definieerbaar; ik kan dus niet iets zeggen van *elk* element.

Ik definieer dus de perfecte Menge: **VIII-42**

Ik heb een bekende Menge A, die met zijn (onbekende) grenspunten B geeft C. De eisch is dan, dat alle punten van A grenspunten zijn in C, maar dan zijn ze het ook in A, m.a.w. A', derhalve A is een überall dichte (of een die door spliting van enkele punten in tweeën uit een überall dichte Menge ontstaat **) Menge geweest.

*) *(kantl.:)*⟨dit woord heeft alleen zin voor Mengen met geindividualiseerde termen⟩

**) *(kantl.:)* ⟨immers elk punt moet aan minstens één zijde begrensd worden door een üb. dicht segment⟩)

....

(doorgehaald:) ⟦Daar we voor de natuur wetten postuleeren, behoeft voor elk natuurlijk variatievraagstuk slechts een keus uit definieerbare functies worden gedaan (machtigheid $\aleph_0$, niet c, nog minder f); dit wordt dan nóg weer verder beperkt tot 'vernünftige' functies, en dan volgt voor elk bijzonder vraagstuk nog verdere beperking.⟧

....

Wij zouden geen ruimtevoorstelling hebben, als we niet uitgingen van het postulaat der ⟨onderlinge⟩ meetbaarheid ⟨van coördinaten,⟩ dus van ⟨het bestaan van zekere stetige⟩ functies. *)⟨46⟩[76] (Het continuum is daarvan de 'drager', een ingevoerde spreekwijze, er onafscheidelijk aan verbonden.) Vond men later het tegendeel, dan zou die uitspraak ipsocontradictoor zijn, immers ze zou worden ‖ uitgedrukt in de *ruimte*, die de uitdrukking van de stetigkeit ⟨is,⟩ en die die **VIII-43**

⟨45⟩ *Elke* term A heeft tusschen zich en een andere term B nog ⟦een oneindig aantal andere termen⟧ minstens één term;

⟨46⟩ Wij zouden geen ruimtevoorstelling hebben, als we niet uitgingen van het postulaat der meetbaarheid, dus van ⟦Stetigkeit.⟧ *(gevolgd door een onleesbare doorhaling)* stetigkeit als voorwaarde heeft.

*) *(kantlijn:)* ⟨De rechte lijnen zijn er één soort van; maar ik kan nog allerlei lijnen als rechte lijnen kiezen.⟩

. . . .

De machtigheid c wil zeggen: die waarvan de individuen door een aftelbare reeks zijn te benaderen, ⟨en kan als zoodanig worden gedacht.⟩

Zoo b.v. de stetige functies; ze zijn in elk geval te benaderen door een aftelbaar oneindige waardenreeks. *)

Die van de reeksen van Taylor en van Fourier zijn slechts bijzondere gevallen er van.

*) *(kantl.:)* ⟨b.v. eerst de eerste decimalen voor abscissen op afst. 1, dan de eerste en tweede voor abscissen op afst. $\frac{1}{2}$ enz.⟩

. . . .

De machtigheid f is contradictoor. Immers men kan zich denken, dat ω maal achtereen (d.w.z. *steeds* door weer) het kansspel een ⟨vrije⟩ keuze doet; maar niet c maal. Dat men dit niet kan denken, *(onleesb. doorgehaald woord)* antwoordt ons, desgevraagd, direct onze intuitie. Men kan dus Schoenflies Bericht p. 24 § 4 alleen lezen: Het is *niet* waar, dat:

f denkbaar zou zijn, en eenduidig af te beelden op c.[77]

. . . .

De generatie van c en van een getal der tweede klasse kan ⟨bij een Mengendefinitie⟩ worden gecombineerd.

(doorgehaald:) ⟦Zoo wordt b.v. de Menge van Bernstein Math. Ann. 61 p. 137 -óók als ze wordt opgevat als Menge der bijbehorende*(?)* Ordnungsfunktionen uit ω.⟧ [78]

. . . .

VIII-44 Het aantal wiskundige stellingen is o.a. ook een Menge, die aftelbaar is, maar nooit af.[79]

. . . .

Het ⟨int.⟩ continuum als überall dichte Menge met zijn grenspunten is primair; *) maar de arithmetische hoofdbewerkingen er mee, behoeven de axioma's van Hilbert of Burali-Forti, want hier ligt de 'beweging' in één dimensie in elk geval ten grondslag. **)[80]

Voor het stationaire continuum hebben we geen beweging noodig; immers om een willekeurig gekozen punt te benaderen, werken we steeds met zich in deelen verdeelende segmenten, maar dat is geen *beweging* in 't algemeen, doch slechts gelijkwaardigheid van schaalstukken voor eindig bepaalde rationale getallen.

Toch kunnen we ook wel ⟨(hoewel we liever niet zóó opbouwen)⟩ , definieeren als limiet van bewerkingen met rationale getallen (die uit de theorie der geheele getallen onafh. v. continuum volgt ***)), maar dan moeten we opmerken, dat de üb. dichte schaal in c op allerlei wijzen als getallenschaal kan worden opgevat.

⟨de getallen eenheden en rat. breuken kan ik op allerlei wijzen distribueeren.⟩

*) *(kantlijn:)*⟨(zie beneden) de groep af, zoover als we willen, maar nooit geheel.⟩

**) *(kantl.:)*⟨de groep àf gepostuleerd.⟩

***) *(kantl.:)*⟨ten spijt van Couturat p. 115; ofschoon die daar misschien in een anderen, meer historischen zin bedoelt.⟩ [81]

. . . .

De wetten van de gewone logica (syllogisme enz.) zijn intuitief, maar ⟨eigenlijk alleen⟩ voor intuitieve klassen, n.l. eindige en aftelbare.

. . . .

Kan ik niet uit den vrijen opbouw ⟨(d.i. steeds geordende opbouw)⟩ van alle **VIII-45**
typen van $\aleph_0$; met behulp van getallen T (welgeordend) en üb. dicht, laten zien, dat ik evenveel typen krijg, als, wanneer ik *niet* het überall dicht gebruik? Kan ik den opbouw van beide niet tot een ω maal herhaalde keuze terugbrengen? Natuurlijk, want er zijn $\aleph_0$ segmenten, die ik eventueel üb. dicht mag maken.

. . . .

Als ik spreek van b.v. de Menge aller enkelv. geordende typen van machtigh. $\aleph_0$; moet ik mij eerst vragen: 'Kan ik mij dat denken?',[82] en is het antwoord 'ja' geweest, dan is het ook gebleken te zijn als een opbouwbaar type volgens een getal T of c. Zoo in dit geval ⟨zou men zeggen⟩ : Orden de machtigh. als ω; zet de eerste neer; de tweede er voor of er achter (2 keeren); de derde geeft 3 keuzen voor plaatsing enz. Zoo benader ik langzamerhand tot een machtigheid $1.2.3.4..... = c$ *)

Zoo vat het Bernstein op in Math. Ann. 61 p. 140 vlgg.⟨47⟩[83] Maar het is niet waar, dat men zoo ⟨alle⟩ ordetypen ⟨naast elkaar⟩ ziet groeien; hoe ver men ook voortgaat met het proces, *nooit* doet verschillende voortgang ⟨een in bepaalden zin⟩ verschillend ordetype ontstaan. **)

Dat komt eerst doordat *wetten* vooraf worden geformuleerd. Maar dan komt weer het bezwaar, dat men van *alle wetten* niet kan spreken.[84]

Wil men dus het continuum ‖ als verzameling van *wetten* van voortgang **VIII-46**
definieeren, dan is zijn machtigheid niet meer $2^{\aleph_0}$, en zelfs kan men niet meer

---

⟨47⟩Zoo benader ik langzamerhand tot een machtigheid $1.2.3.4..... = c$. ⟦Zeg ik bij dat opbouwen niet alleen, dat ik⟧ Zoo vat het Bernstein op in Math. Ann. 61 p. 140 vlgg.

van zijn machtigheid spreken. Het wordt dan een machtigheidsloos tusschending tusschen $\aleph_0$ en c in. Een ding n.l., dat slechts 'gedeeltelijk af' kan worden gedacht. Als zoodanig dan toch weer een bepaald denkbaar ding. Het zoo gedachte continuum (zoo zal waarsch. Bernstein in zijn nog te verschijnen verhandeling het opvatten) noemen we c', en is heel iets anders als c.[85]

Bernstein bewijst dus p. 140 § 8, dat zijn Menge als wetten-Menge $< c'$; terwijl Cantor had bewezen dat die Menge als onaffe ⟨n.l. zelfs, als volgens c opgebouwd, nog onaf⟩ willekeurmenge $> c$; maar ook op dez. wijze, dat zij als wettenmenge $> c'$. Het resultaat is dus alleen, dat de wettenmenge $= c'$. Maar dat spreekt vanzelf; *alle* 'aftelbare, maar steeds onaffe' Mengen zijn aequivalent.

*) *(kantlijn:)* ⟨Bij het gewone cont. kan ik de ⟨onbekende⟩ oneindige reeksen *denken*, omdat ik een nauw verband weet met *al* de eindige reeksen. ⟨alleen door dat verband, ⟨onafh. van deze formeele genereering, dus intuitief,⟩ kunnen die oneindige onbekende reeksen als bestaand, als niet onzinnig worden gedacht.⟩ – Maar hier bestaat dat verband niet; ik kan mij dus wel *al* de eindige reeksen, maar niet de oneindige reeksen denken.⟩

**) *(kantl.:)* ⟨hóe ver ik ook ben voortgegaan, nog *niets* weet ik omtrent het groeiend ordetype.⟩

. . . .

Resultaat kan men dit trouwens nauwelijks noemen.⟨48⟩ Immers welken zin blijft voor de Äquivalentz-satz over voor onaffe Mengen? Gegeven is: elke onaffe A is afbeeldbaar op B; en elke onaffe B is afbeeldbaar op A. Hieruit volgt direct zonder verder bewijs, dat A en B aequivalent kunnen worden opgetrokken.

. . . .

VIII-47 Het Bernsteinsche Äquivalenzbeweis heeft geen zin, als het niet meteen het middel geeft, om de aequivalentie werkelijk aan te geven (op te bouwen). Immers de Menge $> \aleph_0$ *) is niet *af* te denken. Kan ik dus de aequivalentie niet aangeven, dan zou ik ze moeten denken als stagnant te *bestaan* (onbekend voor ons), maar de Mengen zelf bestaan niet, evenmin dus de aequivalentie. ⟨Die ontoereikendheid van het bewijs zal zich hierin toonen, dat er nooit een toepassing op werkelijke problemen van zal kunnen worden gemaakt.⟩

*) *(kantlijn:)*⟨Want van een *onbekend* element der ⟨eerste⟩ Menge weet ik nooit, of hij tot een even of een oneven rest hoort, weet dus ook niet, op welke wijze ik het moet afbeelden.

De Bernsteinsche aequivalent-making komt neer op een verdeeling der beide gegeven afbeeldingsmanieren over het proces.⟩[86]

. . . .

⟨48⟩ Resultaat ⟦welken zin⟧ kan men dit trouwens nauwelijks noemen.

Beschouw de wiskunde als denklichtzinnigheid; de physica en techniek als daadlichtzinnigheid.

. . . .

Al kan ik niet spreken van *alle* getallen T, daarom kan ik wel een groep definieeren, die *elke* gedefinieerde groep van T bevat, maar bovendien nog wat anders; n.l. c (cf. Hardy)

(doorgehaald:) ⟦Ik kan niet zeggen: de Hardy'sche afbeelding geeft als boomtak niet eindig, niet $\aleph_0$, dus moet zeker geven c; dus T heeft de machtigheid c; het bewijst alleen, dat àls T af te denken was, het de machtigheid c zou geven, maar T is niet af te denken.[87]⟧

Maar dat geldt niet voor de Menge van Bernstein, als willekeurmenge opgevat; (wèl als wetten-Menge, dan is ze in c bevat.

. . . .

Het continuum is het middel, om *(i.p.v. een onleesbare doorhaling:)* ⟨de ⟨üb. dichte⟩ schaal van één transformatiegroep ook te kunnen behouden voor een andere en is⟩ te definieeren door middel van het stetigkeitspostulaat, dat dus aan het continuum onafscheidelijk is verbonden. **VIII-48**

(kantlijn:) ⟨Zoo blijft door het stellen van $\sqrt{2}$, het getal 2 van de eerste (optel)schaal ook voor de tweede groep, waarvoor we de worteltr. nemen, behouden.⟩

. . . .

'Absurde'; wat een subjectief woord, dat met zelfverblindheid, pedantheid en opdringerigheid, objectief wordt uitgesproken.

. . . .

(kantl.:)⟨cf. Couturat p. 124 bovenaan⟩

De 'grandeurs extensives' (Couturat) worden door ons over zeker gebied der 'grandeurs intensives' ⟨het int. cont. zonder schaal⟩ gepostuleerd, om er mee te kunnen rekenen. (schaalconstructie); ze zijn de 'groep' der 'grandeurs intensives'.[88]

. . . .

Burali-Forti en Couturat leiden uit de axioma's van + af de afbeelding op *(onleesb. doorh.)* de reëele getallen ⟨alleen moet Archimedes wel degelijk als axioma er bij worden genomen⟩ .[89]

De $\times$-bewerking is dan daaruit vanzelf duidelijk (gedef. als limiet van die van rationale getallen).[90] Maar de axiomatische onderzoeking van Hilbert ⟨of liever mijn aanvulling daarvan⟩ wijst nu uit, dat voor gegeven reëele getallen met gegeven +-bewerking, en de gegeven axioma's voor de ×-bewerking, (dus ook gegeven 1-punt) er maar één ×-bewerking is.⟨49⟩

(kantlijn:) ⟨als 'schème générique' cf. Couturat p. 114; gebruik theorema p. 119 en defin. p. 120 onderaan.) Het best gaat dit echter uit mijn 'groepbouw'; want dan groeien de schalen (d.i. proportionaliteit, immers de vermenigv. volgens Burali-Forti is alleen door die schalen bepaald) op beide 'grandeurs', en tegelijk de optelgroep op beide 'grandeurs'. Hier staat dus ook direct het theorema p. 119.⟩[91]

....

VIII-49 De +-bewerking over het gebied tusschen $-\infty$ en $+\infty$, en de ×-bewerking over het gebied tusschen 0 (inclusief) en $+\infty$ zijn geheel identiek.

....

(Couturat p. 110 sic!) 'La définition nominale des nombres entiers de M.Russell permet d'établir leur existence'.[92]
⟨(Maar zelfs al bestonden ze, dan toch nog niet in hun toepassing op grandeurs!)⟩

....

Het gewone wiskundige werk is zoeken naar *verraamde* relaties ⟨komt door het handelskarakter, en het 'waar-moeten-leveren' der samenleving⟩ ; dit hier: naar *vanzelfsprekende* relaties.

....

[De 8 postulaten van Burali-Forti voor de 'Grandeurs' loopen geheel parallel met den opbouw daarvan als rationale schaal, en de grenspunten er van.][93]

....

De Unabhängigkeit in Hilbert–Festschrift[94] is niet zoo te verstaan, dat *elke* groep der axioma's een bestaan heeft met weglating der andere; immers reeds in hun symbolen (termen) vooronderstellen sommige axioma's de vorige. Maar wel is steeds elk volgend axioma van de vorige onafhankelijk.

....

Couturat p. 128. Onzin! Dat komt van het willen loochenen der intuitie! De ⟨gewraakte⟩ woorden boven aan de pag. licht aan te vullen.[95]

....

⟨49⟩en de gegeven axioma's voor de ×-bewerking, ⟦er maar één⟧ (dus ook gegeven 1-punt) er maar één ×-bewerking is.

[Ga voor de Hilbertsche M.A. Grundlagen niet uit van coördinaten, maar **VIII-50**
van een stelsel cirkels om een punt en stralen uit dat punt, (welke stralen geen rechte-lijn-eigenschappen hebben, ⟨maar wel bij draaiing in elkaar overgaan⟩), Punktmengen van het gedrag van buiten elkaar liggende Jordansche curven. Postuleer dan, dat het stel ⟨cirkels⟩ om een ander punt ten opzichte van het eerste, ⟨gesloten⟩ Jordansche curven zijn, dan kan ik er ook altijd een stel stralen, die Jordansche curven zijn, bij construeeren.[96]

(kantlijn:) ⟨Die Jordan-eigenschap t.o.v. een poolstelsel zal wel te definieeren zijn, neem b.v. als coörd. de straal en de booglengte (niet de poolhoek).⟩

Is nu uit twee van die cirkelstelsels de meetkunde niet op te bouwen, uit hun sitale eigenschappen n.l. van raking en tweepuntigen snijding?

Waarschijnlijk niet, men zal wel de axiomatische behandeling van Hilbert M.A. moeten bijbehouden, d.w.z. ⟨voorzoover⟩ nà het bewijs, dat de cirkelstelsels buiten elkaar liggende Jordan-krommen zijn. Maar men kan uitgaan van één cirkelstelsel met stralen, en dan de andere stelslels Jordan-stelsels ín dat eerste laten zijn, op grond van de stelling, dat Jordan-stelsels in een gegeven xy-vlak ook Jordan-stelsels ten opzichte van elkaar zijn.]

. . . .

Je kunt altijd onderscheiden het $\frac{1}{10}$ der mathem. publicaties, uit zucht naar inzicht ontstaan (vooral in Math. Ann.) en de $\frac{9}{10}$ uit eerzucht, die iets verrassends willen vertoonen, dat meestal zonder belang is.

. . . .

De axiomatische onderzoekingen hebben eigenlijk alleen zin, om vooraf te **VIII-51**
waarschuwen, dat een nieuwe opbouw niet zal lukken.[97] (Maar dat heeft alleen zin, als leiding, in 't spoor-houding, niet als stimulans). ⟨[⟨50⟩] Of ook, om te zorgen, dat niet, als bij Ampère, dingen worden ingevoerd, die wel nooit worden tegengesproken, maar toch overbodig zijn.⟩

. . . .

Al is het in een gegeven vlak (Punktmenge) lastig, de cirkels om een punt en de bewegingsgroep om dat punt (Hilbert M.A.) te definieeren, niet moeilijk is het, als we van die cirkels en hun stralen uitgaan, en onder die Punktmenge het vlak verstaan.

Wat is nu het bijzondere van de homogene $\sqrt{\ }$ uit kwadratische vorm van Riemann; waarom wordt die uitgekozen tusschen de algemeene homogene vorm van Minkowski en Hilbert?

(kantlijn:) ⟨Antwoord waarsch. in vroeger cahier te vinden;

[⟨50⟩] *I.p.v. een onleesbare doorhaling*

Misschien is dit de eenige homog. 1^{ste} grds. functie, die b..*(?)*ongelijkheid geeft in 't kleine.

Neen, toch niet; maar wel is het boogelement $f(r, \varphi, \varphi')dr$ beperkt door de voorwaarde, dat $\varphi = c$ een geodetische lijn moet zijn.

c.f. Minkowski. Voor opp. in onze ruimte geldt die kwadr. vorm, omdat ze voor onze ruimte zelf geldt.⟩

Is die eenmaal aangenomen ⟨dan weten we ook: in het kleine geldt de Eucl. meetkunde en⟩ dan kunnen we als *stralen* van de cirkels nemen de geodetische lijnen; die staan dan loodrecht op de cirkels, en het boogelement heeft den vorm $\sqrt{dr^2 + f(r)^2 d\varphi^2}$. We gaan nu zoeken aan welke voorwaarde $f(r)$ moet voldoen voor 'vrije bewegelijkheid'.

Daartoe zoeken we eerst de algemeene vgl. der geodetische lijnen. Door variatie vinden we $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{c}{f(r)\sqrt{f(r)^2 - c^2}}$

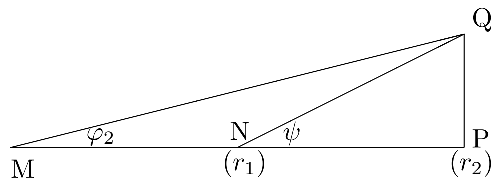
$$\text{Hieruit: } ds = \frac{f(r)^2}{c} d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{c}{f(r)^2} ds$$

$$dr = \sqrt{1 - \frac{c^2}{f(r)^2}} ds$$

Stel $\frac{f(r)d\varphi}{dr} = \text{tg}\vartheta$ dan: $\frac{d\vartheta}{d\varphi} = -f'(r)$

VIII-52



Ga nu langs geodetische lijn NQ, die zeer kleinen hoek maakt met den straal MNP. Dan is c zeer klein,; en

$$\psi = \frac{f(r_1)d\varphi}{ds} = f(r_1)\frac{c}{\{f(r_1)\}^2} = \frac{c}{f(r_1)}$$

$$\text{Verder} \qquad \varphi_2 = c\int_N^Q \frac{ds}{f(r)^2} = c\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2}$$

$$PQ = cf(r_2)\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2}$$

Voor de homogeniteit moet nu:

$$PQ = \psi f(r_2 - r_1)$$

Of: $$f(r_2 - r_1) = f(r_1)f(r_2)\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} \qquad (p)$$

Zij ε een kleine waarde, dan:

$$\int_{\varepsilon}^{r_1} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_1 - \varepsilon)}{f(r_1)f(\varepsilon)}$$

(volgt een doorgehaald stuk, wegens te slechte leesbaarheid hier niet weergegeven. Verbeteringen hiervan volgen hieronder)

$$\text{dan} \int_{\varepsilon}^{r_1} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}.\frac{f'(r_1)}{f(r_1)} + \frac{\varepsilon^2}{2!f(\varepsilon)}.\frac{f'(r_1)}{f(r_1)}\cdots$$

$$\int_{\varepsilon}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{1}{f(\varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\cdot\frac{f'(r_2)}{f(r_2)} + \frac{\varepsilon^2}{2!f(\varepsilon)}.\frac{f'(r_1)}{f(r_1)}\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{\varepsilon}{f(\varepsilon)}\cdot\left\{\frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)}\right\} = \frac{f'(r_1)}{f(r_1)} - \frac{f'(r_2)}{f(r_2)}$$

Maar ook: $$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{f(r)^2} = \frac{f(r_2 - r_1)}{f(r_1)f(r_2)}$$ Uit beider volgt:

VIII-53

$$f(r_2 - r_1) = f'(r_1)f(r_2) - f'(r_2)f(r_1) \qquad (1)$$

⟨Hierin weten we: $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$, immers $f(\varepsilon) = \varepsilon + ...$⟩

(weer een kort doorgehaald en slecht leesbaar fragment, hieronder verbeterd weergegeven:)

Stel in (1) $r_1 = \varepsilon$, dan komt:

$$f(r_2) - \varepsilon f'(r_2) = f(r_2) + \varepsilon f'(0)f(r_2) - \varepsilon f'(r_2) \qquad (3)$$

Uit (3) volgt: $f'(0) = 0$;

Differentieer (1) naar r_1:

$$f'(r_2 - r_1) = f'(r_1)f'(r_2) - f'(r_1)f(r_2) \qquad (2)$$

Stel hierin $r_1 = \varepsilon$, dan komt:

$$\underline{f'(r_2)} - f'(r_2)\varepsilon = \underline{f'(0)f'(r_2)} + \underline{\varepsilon f'(0)f'(r_2)} - \underline{f'(0)f(r_2)} - \varepsilon f''(0)f(r_2) \qquad (4)$$

$$f'(r_2) = f''(0)f(r_2) \qquad \text{Stel } f''(0) = a,$$

dan geldt dus voor f de diff. vgl.

$$\frac{d^2f}{dr^2} = af;$$

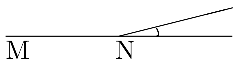
met ⟨3 groepen⟩ oplossingen; al naar a pos., 0 of neg,

n.l. $f = c_1 \sin(\alpha r + c_2)$ (I) $f = c_1(r + c_2)$ (II) $f = c_1 \mathrm{sh}(\alpha r + c_2)$ (III)

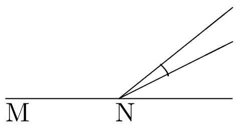
Wegens $f(0) = 0$ en $f'(0) = 1$, wordt dit:

$$f = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha r. \text{ (I)} \qquad f = r. \text{ (II)} \qquad f = \frac{1}{\alpha} \mathrm{sh} \alpha r. \text{ (III)},$$

en deze drie oplossingen blijken ook alle aan (p) te voldoen, en ook aan den eisch, waar het hoekje ψ niet langs MN, maar onder een hoek wordt gezet; niet



maar



....

Op te bouwen direct schijnt alleen de projectieve meetkunde; de bewegingsmeetkunde alleen als vondst *in* de projectieve of axiomatisch; vanzelfsprekend schijnt ze niet te maken. In dien zin heeft dan Russell en zijn Fondements nog gelijk.

....

VIII-54 De voorgaande ontwikkelingen waren voor 2 dimensies; maar hieruit volgt voor 3 dimensies de meetkunde op den bol.

Dus ook het lijnelement voor vrije bewegelijkheid op den bol = $\sqrt{dr^2 + r^2 d\omega^2}$, waarmee de meetk. v. 3 dim. (en zoo door voor hoogere dim.) ook bepaald is.

⟨Of ook we kunnen zeggen voor n dim.; in 't oneindig kleine geldt de Eucl. meetkunde; dus bij de beweging v.d. geodetische ster bewegen geodetische vlakken in elkaar; daarin moet dus de 2–dim. meetkunde gelden.⟩

....

Willen we niet van het Riemannsche lijnelement uitgaan, dan moeten we stellen $ds = f(r, \frac{dr}{d\varphi})d\varphi$, welke functie voor $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ moet worden: $f(r)d\varphi$, en voor $\frac{d\varphi}{dr} = 0$ moet worden dr.

Verder moet $\varphi = c$ de diff. vgl. der extremalen identiek voldoen. Waarmee ik intusschen voorloopig nog niets bereikbaar zie. Ik moet dus den *opbouw* van de meetkunde uit beweging sive uit den cirkel als nog niet gelukt beschouwen. (immers het Riemannsche postulaat van het boogelement blijft altijd noodig; of anders hebben we de alles–behalve–opbouwende [immers niet synthetische; maar analytische] onderz. van Helmholtz–Lie–Hilbert)

....

[Zoo goed als het onderzoek der Geometrieën in denen die Gerade die kürzeste, heeft zin dat naar de Geometrieën in denen der Kreis het max. opp. bij constante omtrek heeft. ⟨Zoo blijft men ⟨echter even goed⟩ afh. van de sitale eig. der rechte lijnen, want die volgen uit die v. 2 cirkels.⟩[⟨51⟩]

....

Bolyai–Frischauf is ook een bewijs van 'niet andes dan', een 'uniciteitsbewijs' in den zin van Helmholtz–Lie–Hilbert; maar waarschijnlijk is dat van Bolyai *(onleesb. doorgeh. woord)* fout; ten minste Frischauf stelt zonder bewijs (§ 9), dat de cirkel een enkelvoudige gesloten kromme is.

(kantlijn:) ⟨en Euclides ook; beiden zijn alleen fout in den zin, sommige bouwbeperkingen (axioma's) niet uit te spreken.⟩

....

(Volgens Frischauf p. 112)[98] De ontwikkelingen der vorige pagina's kunnen ook direct worden afgeleid uit de formule voor kromtemaat, die voor $ds^2 = dx^2 + m^2 dv^2$ wordt: **VIII-55**

$$\kappa = -\frac{1}{m} . \frac{\partial^2 m}{\partial u^2},$$

en nu moet κ constant zijn; waaruit direct volgt $m = k \sin \frac{u}{\kappa}$.

....

De *opbouw* van een *groep* *) schijnt niet gemakkelijk te zijn; het intrinseque mechanisme daarvan schijnt werkelijk het algebraisch apparaat te bevatten, waaruit in de gewone meetkunde de groepen worden afgeleid. ⟨Ze zal dus zelden direct mogelijk zijn. Immers algebr. bew. **) zijn ook meest impliciet.⟩

*) *(kantl.:)* ⟨b.v. de groep der bewegingen ; dus de planimetrie⟩
**) ⟨van de bewegingsgroep b.v.⟩

....

[⟨51⟩] Zoo blijft men ⟦on⟧ afh. van de sitale eig. der rechte lijnen, want die volgen uit die v. 2 cirkels.

Mannoury, die het cijferen tegen het Hegelen verdedigt,[99] Hegelt zelf niet en cijfert in zijn stuk evenmin,⟨52⟩ en beide terecht; ⟨hij philosopheert.⟩ Maar wat beteekent dan die ondoordringende verdediging van cijferen?

(kantlijn:) ⟨En zijn zgn. *reken* cijfering, is alleen zeker, omdat er nog een ándere zekere weg, de niet-geschreven wiskunde bestaat, die de cijfering begeleidt.⟩

. . . .

De grondslagen der meetkunde zijn een wiskundig vraagstuk, die der rekenkunde een philosophisch (want die zijn intuitief).⟨53⟩

. . . .

Dat Pieri de axioma's van orde eerst achteraf (Couturat p. 147) invoert, ⟨ook Vahlen doet het,⟩ zou alleen zin hebben, als er werkelijk een meetkunde van axioma 1-13 mogelijk was ànders, dan juist op die orde gegrond.[100]

. . . .

Met symbolische logica zal waarschijnlijk wel zijn aan te toonen, dat het ⟨niet contradictoor is, om c en T gelijkmachtig te stellen. Immers bij afbeelding kan ik c niet anders, dan indiv. opbouwen: c is dus aftelb. onaf.⟩⟨54⟩[101]

. . . .

VIII-56 Ik kan *eerst* spreken over die philosophie, die bekijkt de veruiterlijkingsdaad der menschen, voorzoover die bestaat in de wiskunde (welk bekijken zelf ook een veruiterlijkingsdaad is, wat de onwijze bekijking van eigen ⟨of van eigen en anderen dooreengemengd, *) cathegorieën, ⟨sine het filosofeeren⟩ , niet is: hetgeen niet is te verdedigen met te zeggen: ik bekijk ⟨de cathegorieën⟩⟨55⟩ van anderen, want bij hun onderzoekingen hebben ze geen ander materiaal, dan te kijken in zichzelf), en daar kan ik van Hegel en Mannoury wiskundige duidelijkheid vragen, want zij bewegen zich alleen op dat gebied. *Daarna* kan ik spreken over de plaats van de wiskunde in de *zonde*, en daarover is niet anders dan mystiek te spreken, of liever te zwijgen.

*) *(kantlijn:)* d.w.z. zonder dat het onderscheid wordt vastgehouden⟩

. . . .

⟨52⟩ Mannoury, die het cijferen tegen het Hegelen verdedigt, ⟦moet zichzelf dan ook wat duidelijker wiskundig uitdrukken.⟧ Hegelt zelf niet en cijfert in zijn stuk evenmin,

⟨53⟩ De grondslagen der meetkunde zijn een wiskundig vraagstuk, die der ⟦stelkunde⟧ rekenkunde een philosophisch (want die zijn intuitief).

⟨54⟩ *I.p.v. een onleesbare doorhaling.*

⟨55⟩ I.p.v. onleesb. doorgeh. woord)

pag. 154 wil Couturat den schijn geven, alsof de dualiteit eerst duidelijk wordt door de logistiek.[102]

. . . .

De logistici bouwen niets nieuws (hun symboolsystemen zijn afgezien van hun toepassing, eenvoudige instaposities*(?)*, allesbehalve ingewikkeld), maar gooien de eenvoudigste deel⟨56⟩ der wiskunde door elkaar en vertoonen ze in een au hasard ⟨door toevallig taalgebruik,⟩ *) gekomen nieuwe combinatie, die ze als ingewikkeld toont.

*) *(kantlijn:)* ⟨splitsing van een beeld in deelen door de taal⟩

. . . .

(Couturat p. 158 2^{de} alinea) Alsof je hier niet feitelijk moet ‖ tusschenpos- **VIII-57**
tuleeren ⟨onafh. v.h. logistisch beeld⟩ : ‘Er is een relatie’; ‘Er is een domein van een relatie’;⟨57⟩ ‘Er is ⟨minstens⟩ één punt in het domein van een relatie’ enz., en zoo kan je weer teruggaan, *ad infinitum.* De logistiek brengt niets nieuws, wijzigt hoogstens de taal, die *over* wiskunde spreekt.[103]

. . . .

Heeft men in het gebouw een reeks van bewerkingen (kleinere bouwingen) uitgevoerd,[104] en twee ⟨geheel verschillende⟩ van zulke ⟨reeksen⟩ voeren ten slotte tot een zelfde punt ⟨of ding⟩ , dan noemt men zoo iets een *stelling*;⟨58⟩ men kan reeksen van bewerkingen samenvatten, en het er door bepaalde punt met al zijn relaties, dat is eigenlijk tautologische betrekkingen tot *andere* bewerkingreeksen, een nieuwen naam geven. Die nieuwe naam heeft dan allerlei in symbolen uit te drukken relaties tot andere gelijksoortige, en ook tot oude dingen. De logistici stellen die relaties dan bij axioma vast, en werken weer voort, hebben alleen wat nieuwe symbolen en nieuwe relaties meer.

Maar wij zeggen: het zijn niet de nieuwe (gewoonlijk met oude gelijkvormige) relaties tusschen nieuw geconstrueerde symbolen,⟨59⟩ ⟨waarvan we uitgingen, *) waarop we aanstuurden; maar we bouwen ze niet wettelijk of om natuur te vangen; hebben we ze dan achteraf gekregen, dan⟩ zoeken we ze te herleiden op ons intuitief inwonende ⟨lineaire⟩ ordebetrekkingen; want eerst dán kunnen wij er mee werken in ’t praktische leven, als ze zijn geappliceerd op ons instinct van tijd.

⟨56⟩ *(delen?)*

⟨57⟩ ‘Er is een relatie’; ‘Er is een ⟦klasse⟧ domein van een relatie’;

⟨58⟩ en twee ⟨geheel verschillende⟩ van zulke ⟦bewerkingen⟧ voeren ten slotte tot een zelfde punt ⟨of ding⟩ , ⟦hetgeen⟧ dan noemt men zoo iets een *stelling*;

⟨59⟩ het zijn niet de nieuwe (gewoonlijk met oude gelijkvormige) relaties tusschen nieuw geconstrueerde symbolen, ⟦die we zoeken⟧

*) *(kantlijn:)* ⟨die ons a priori bekend waren⟩

....

VIII-58 Wat het practische doel der wiskunde is: ingewikkelde combinaties ⟨van bekende orderelaties⟩ tòch weer ⟨eenvoudig⟩ geordend te kunnen zien (telbaar of meetbaar ⟨afleiden van een functie⟩), ⟨n.l. de herkenbaarheid van een plaats te binden aan een getal op een schaal (één- of meerdim.), die schaal te herleiden op een andere beter hanteerbare schaal, en daarop de telbaarheid weer terug te voeren op herkenbaarheid (ik zie ten slotte niet op, ik reageer niet op het getal 45, maar op de kabbalistische teekens, die het voorstellen); daarbij komt dan in de *wetenschap*⟩ *) het zoeken van allerlei tusschenschalen **), die door relaties met andere schalen het mogelijk maken in nieuwe grootheden ⟨der praktijk⟩ een schaal te construeeren, wanneer hij in oude reeds bekend is.

*) *(kantl.:)* ⟨physica⟩
**) *(kantlijn:)* ⟨hulpgrootheden, hypothetische 'dingen', die het systeem van versch. schalen als centrale schaal beheerschen.⟩

....

Bij deze beschouwingen zit de zwakte ⟨nog⟩ in het niet genoeg intellectueel 'doordacht' zijn, van de intuitieve stemming er onder ben ik zeker.

....

De cathegorieën van je geest moet je niet onderzoeken, maar gebruiken en afleeren; maar dat laatste niet na onderzoek, maar door je er van af te keeren.

....

(doorgehaald:) ⟦Heb ik een üb. dichte schaal *) (het eenige, wat ik kan construeeren), dan kan ik zeggen: 'neem de grenspunten', of als ik dat niet wel en niet niet wil doen, schiet er niet over dan een nieuwe ⟨in zich⟩ üb. dichte schaal te construeeren, en voor een beperking van het 'neem de grenspunten' te gebruiken.

*) *(kantl., ook doorgehaald)* ⟨of een eindig aantal door elkaar gebouwde üb. dichte schalen,⟩

....

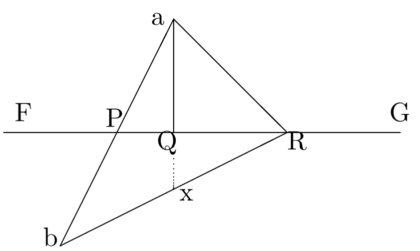
Want ook om een kromme cont. of disc. te construeeren, is er niet anders dan de überall dichte schaal met een eindig ⟨of ω-machtig⟩ stel punten er door gekruist eventueel.

....

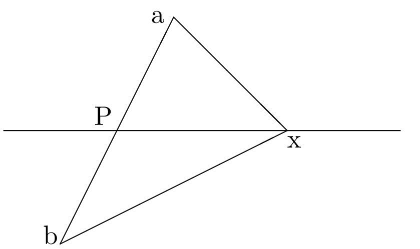
VIII-59 Couturat pag. 178[105] eerste alinea is niet waar: immers denk maar aan de hyperbolische ruimte.⟧ *(einde doorhaling.)*

. . . .

Het axioma 16 (Cout. p. 167)[106] heeft de strekking, de ruimte tot 3 dimensies te beperken. Want verder is het gelijkwaardig met het analoge 2–dim. axioma, en dat volgt uit de axioma's 13 en 14.



Immers gesteld vooreerst beide ⟨ax en bx⟩ ontmoeten FG in Q en R en stel Q tusschen P en R (ander geval: P tusschen Q en R); beschouw $\triangle abR$, en pas stelling 13 toe. P ligt tusschen a en b, Q ligt tusschen P en R , dan ontmoet aQ het segment bR. Maar dat moet zijn het punt x, het snijpunt van aQ en bR. Dus x tusschen b en R, dus bx ontmoet FG niet.



En dat een lijn door P òf ax òf bx moet snijden blijkt hieruit, dat het vlak, waartoe de lijn behoort, bestaat uit $P(ax) + P(bx) + (ax)'P + (bx)'P$.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦axioma 13 zou nog toelaten, dat ik op bc punten tusschenvoegde, ⟨die worden ondersteld⟩ op een 'meeloopende' lijn (anders gekleurd b.v.); zoo zou een heel duplicaat vlak er bij worden opgebouwd, dat de eene helft der punten bevatte.

. . . .

Maar het is niet waar, dat reeds uit 13 volgt, wat Couturat zegt p. 164 r. 10,9,8 v.o.⟧

. . . .

[*Beteekenis van axioma 13.*[107] (Couturat p. 164) Als ik a vereenig met alle **VIII-60** punten van bc, zou ik voor al die stukken ad nog kunnen kiezen tusschen de twee projectieve segmenten.

Het axioma zegt nu, dat ik van al die paren de analoge moet kiezen. [Maar of nu 14 onafh. is van 13?]

. . . .

Causaliteit in het leven is de zondige splitsing in tweeën van een eenheid, opdat op een der deelen de begeerte door het intellect kunne werken.

Causaliteit in de wetenschap is een iuxtapositie van opgebouwde systemen, ⟨of splitsing van een systeem in tweeën,⟩ tot een nieuw systeem; het woord beteekent hier niets, dan het wiskundig 'relatie zonder meer'.

. . . .

Vahlen is de eerste, die de reciprociteit der evenwijdigheid bewijst buiten de congruentie om.[108]

. . . .

In de hyperbolische meetkunde hebben 2 versch. punten in 't oneindige geen bepaalde maat (zooals in de Euclidische), alleen in betrekking tot een 3^{de} gegeven punt of 'einde'.

. . . .

De Endenrechnung van Hilbert ⟨M.A. 57⟩ is de proj. Streckenrechnung van Schur (Math. Ann. 55)

VIII-61 *(eerst de onderste §. van deze pag., die aansluit op bovenstaande zin:)* Immers de ⟨optellingen⟩ van Schur ten opz. van ∞ zijn ⟨aldus te beschouwen⟩:[⟨60⟩] PQ en QR zijn uit elkaar getranslateerd, als P om Q is gespiegeld naar R. Maar PQ en RS (stel $PT = 2 \times PQ$), als TS om S en PR om R gespiegeld hetzelfde punt geeft.[109]

. . . .

Een axiomatische onderzoeking naar de grondslagen is een uniciteitsbewijs; ze steunt in haar gang op den Satz vom Widerspruch.

Hetzelfde is eigenlijk ⟨elke wiskundige stelling en⟩ de oplossing van elk wiskundig vraagstuk; men heeft gebouwd de physische hypothese, en gebruikt die als *beperking* der daarin mogelijke nieuwe gebouwen; welke beperking men dan, ⟨toegepast op het ⟨te gronde liggend⟩ gepostuleerde systeem, *waarin* gebouwd wordt⟩ , in de praktijk als middel tot voorspellen gebruikt. Maar juist dat voorspellen (d.w.z. ⟨later⟩ handelen zonder levende stimulans) is het, wat de wereld heeft bedorven, en de menschen heeft baas gemaakt. [Maar ook: die de men-

---

[⟨60⟩] Immers de ⟦*onleesb)* harmonischen⟧ van Schur ten opz. van ∞ zijn ⟦de harmonische sp...⟧

schen in tweeheid van kunnen en machteloosheid tot de eigenlijke incarnatie van de ziel van alle zijn en bestaan heeft gemaakt.]

Die Satz vom Widerspruch heeft twee verschillende zinnen:

1^o *In het leven*: Twee partieeringen ⟨van daad of begeerte⟩ botsen tegen elkaar, ⟨en bewijzen zoo elkaars onhoudbaarheid⟩ , waaruit alleen te ontsnappen is door diepere inkeering van Hereeniging.

2^o *In de wiskunde*: Er staat een gebouw, met de elementen waarvan ik een nieuw gebouw in het oude wil bouwen; en dan merk ik opeens, dat het niet gaat.

. . . .

De mengmeetkunde ⟨kán zunächst worden opgebouwd⟩⟨61⟩ zonder 'Grandeur', **VIII-62**
alleen uit correspondeerende überall-dichte schalen.

. . . .

[(Naar aanl. der Hilbertsche Enden-Addition:) We kunnen ook zeggen, ⟨en veel eenvoudiger⟩ : $\alpha+\beta$ is de spiegeling van O om de spiegelas tusschen α en β in. Ik moet dan echter vooraf bewijzen: Spiegel ik een lijn uit een Endenbundel achtereenvolgens om α, β, γ zóó, dat β is de ⟨middellijn⟩ van α en γ, dan is β' weer de ⟨middellijn⟩ van α' en γ'.⟨62⟩ (Middellijn d.w.z. als ik in een punt er van een loodlijn opricht, snijden de beide ⟨buiten⟩ lijnen daarvan gelijk stukken af.)][110]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Optelling ⟨d.i. transatie⟩ , is sitaal ook op te vatten, als verplaatsing van O naar A, van OA naar AB, van AB naar BC enz.; een segmentenreeks. En verdere optelling is dan aan de vorige licht vast te koppelen.⟧

. . . .

Die 'Gleichung des Punktes' (Hilbert M.A. 57) is die van een involutie in 't oneindige.[111]

. . . .

Bij de optellingsdefinitie als verschuivingsgroep krijgt elke verschuiving een getal, en daarmee duiden we ook aan het punt, waarin het nulpunt voor die verschuiving overgaat.

. . . .

Het is *niet* waar (Klein in M.A. 55),[112] dat de physica continuiteit pos- **VIII-63**

⟨61⟩ *I.p.v. een onleesb. doorhaling*

⟨62⟩ Ik moet dan echter vooraf bewijzen: Spiegel ik een lijn uit een Endenbundel achtereenvolgens om α, β, γ zóó, dat β is de ⟦Mittelsenkrechte⟧ van α en γ, dan is β' weer de ⟦Mittelsenkrechte⟧ van α' en γ'.

tuleert; maar er *zit werkelijk* continuiteit in de natuur ⟨trouwens: Klein kan zeggen, daarom postuleeren wij het juist in het wisk. natuursysteem⟩ , al is dat eenvoudig een gevolg van de inertie van eigen geest.⟨63⟩ Wij trachten dan die continuiteit op allerlei wijzen na te beelden, en o.a. ook met functies, die wij uit wetten van groote getallen afleiden; dat is evenwel misschien een dwaas werk; wij nemen door onze zondige wetenswillerij dingen waar, ⟨warmte, electriciteit enz.⟩ die vallen buiten onze zuivere veruiterlijking [vaste zware lichamen en daarop werkende zwaartekracht], en willen die ver- klaren ⟨dus bestrijden en beheerschen⟩ met behulp van die veruiterlijking, welk exces voorlopig goed gaat. Maar beter voelen wij er dichterlijk mystieke *andere* krachten in.

. . . .

De getalverheerlijking van Pythagoras was waarschijnlijk niets, dan de ordeen schiftingsverheerlijking, die de gedweeë veruiterlijking van den mensch behoort te zijn.

. . . .

Dat wij *dingen* ⟨of *objecten*⟩ zien, komt uit onze ⟨afgrenzing en dan⟩ zucht naar behoud ⟨of vernietiging⟩ , waarmee direct gepaard gaat ‘beperking’, n.l. tot dat, wat we houden willen. En die dingen zien wij *verworden*, hetgeen wij noemen, ⟨het ziende door onze wiskundige veruiterlijking en *in* den tijd⟩ , ‘veranderen’.

(kantlijn:) ⟨Poincaré zegt:[113] ‘de objecten zijn de constante vereeniging van een groep van verschijnselen’ (natuurlijk, op een ding kan ik verschillende kleine wisk. systemen toepassen, en die blijven alle constant), en wil ze zoo met den hypothetischen ether op één lijn stellen. Maar die ether heb ik gebouwd, terwijl het object er was gelijk met de verstandhouding, en vóór de wiskundige bestrijding.

. . . .

VIII-64 Het was *alleen* gelukkig, zichzelf te mogen zijn in daad, d.i.: van verweer tegen ⟨d.i. meeleven in, botsen tegen, als een molecuul⟩ sterke natuur zonder intellect; maar het is de moreele zin der wereld, te leeren berusten, zichzelf niet te mogen zijn.

. . . .

Je kunt iemand niet beter weerleggen, dan door hem gelijk te geven.

. . . .

⟨63⟩ maar er *zit werkelijk* continuiteit in de natuur, ⟦al bewijst dat niets, dan⟧ is dat eenvoudig een gevolg van de inertie van eigen geest.

Het *zien* (zonder intellect) van Faraday was zuivere veruiterlijking; de theorie van Maxwell daarentegen is een val, want afgegrensd in ’t hoofd.

. . . .

Klein zegt (M.A. 55) ‘In der Mathematik gibt es keinen Königsweg’; juist daarom is zij te veroordelen.[114]

. . . .

Schur gelooft (M.A. 55) niet, dat Pappus is af te leiden uit vlakke axioma’s (dus ook zonder het ruimtecongruentie-aanhangsel daarvan van Hilbert) zonder het parallellenaxioma.[115]

. . . .

De strenge toepassing van logische wetten (Hilbert M.A. 56) is dikwijls noodig; waar de intuitie te zwak wordt om het gebouw te vatten; zoo blijven we n.l. in het rechte spoor. Maar het is onzin om nu ook de grondslagen van de wiskunde in die logica te willen gaan zoeken.[116]

. . . .

(Hilbert M.A. 56 § 42) Het zal wel genoeg zijn, hier voor één punt en één **VIII-65**
lijn het resp. parallellenaxioma op te stellen (Vahlen pag. 181 § 33)[117]

. . . .

Hilbert (Ens. 7) bij het opbouwen van de logica, gebruikt steeds logica (zegt b.v. telkens: En conséquence $\cdots$).[118]

. . . .

(ibid.) Hij vergeet heelemaal, dat zijn haakjes ook teekens zijn. ⟨Of mag hierin de intuitie helpen, om die haakjes te plaatsen? Hooren ze dus bij de plaatsingsdaad?⟩

. . . .

Het principe der inductie[119] is niet, dat: ‘als stell. geldt voor 1 en voor n+1 als voor n, dan voor elk getal’, maar de mogelijkheid, om zich een gelijksoortig ding altijd door herhaald te denken, dus ook gebouwen, dus ook een poging om te bouwen, die bij elk getal opnieuw zijn neus stoot door den Satz vom Widerspruch.

. . . .

De Hillbertsche logica[120] is een hol gebouw van verschillend gekleurde steensoorten, waarbij hij de arithmetica der geheele getallen (inductie incluis) stilzwijgend gebruikt ; maar dat *niets* ‖ kan bewijzen, dat ook maar eenigszins verband **VIII-66** houdt met onze reeds bekende wiskundige systemen. Misschien gebruikt hij sommige intuitieve principes *) hier niet, maar aan den anderen kant heeft hij ⟨nu⟩ ook geen macht over de gebieden, waarop die principes hooren te worden toegepast.

*) *(kantlijn:)* ⟨de continuumintuitie n.l.; maar in het 'individueel opbouwen' (wat voor de uitgesproken stellingen voldoende is) gebruikt de gewone wiskunde die intuitie ook niet.⟩

. . . .

En de gewone wiskunde heeft wél dien band met het leven.

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Hieruit, dat Hilbert's eenige negatieve axioma $f(ux) = u1$ is, volgt wel, hoezeer de mathematische inductie het eenige principieele wiskundige moment van onderscheid kan geven. (Anders zou Hilbert zoo niet zoo'n systeem kunnen bouwen, dat zich met de werkelijkheid dekt.⟧

. . . .

De manier, waarop Hilbert aan de Russellsche paradox ontsnapt, komt, ⟨geheel⟩ buiten zijn logica om, hierop neer, dat hij alleen spreekt over een klasse van *reeds* ⟨*opgebouwde*⟩ *dingen.*[⟨64⟩][121]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Wat is nu dat, waaraan Burali-Forti zich schuldig maakt, en Hilbert niet?⟧

. . . .

VIII-67 De replâtrage van Hilbert, *met* het opgebouwde; maar waarom dan niet met de intuitie? Dat opgebouwde als wisk. gebouw heeft met het intuitief bouwen ván het gebouw toch niets te maken.[122]

. . . .

Het logisch bekijken der logische wetten heeft zin, in zooverre je wil bestudeeren en contrôleeren, hoe *anderen* logisch zijn.

. . . .

Vele dingen, die later werkelijk vooruitgang bleken, zijn in 't begin met onwil begroet (waaruit intusschen alleen is af te leiden, dat het zuiver instinct vooruitgang als verwording ⟨in het kielzog⟩ voelt). Maar zelfs dat is met de logica van

[⟨64⟩] dat hij alleen spreekt over een klasse van *reeds* ⟦*gedefinieerde*⟧ *dingen*

Hilbert niet het geval.[123]

(kantl.:) ⟨Zoo zie je, dat elke *werkelijke* afleiding in 't leven altijd weer persoonlijke praemissen vraagt, en niets is, dan een 'in Einklang bringen'.⟩

Hij bouwt niet op de logica en rekenk., maar het teekensysteem daarvan *) als iets beteekenisloos' en onafhankelijk, gebruikt bij dien opbouw de logica (syllogisme uit algemeene stelling voor x), en de rekenk. (mathem. inductie).

Verder onderstelt hij als richting ⟨bij de⟩ invoering van nieuwe symbolen[⟨65⟩] de heele wiskunde al bekend; en gebruikt fijn-strenge logische redeneeringen, om ons te overtuigen, dat hij op den goeden weg is.

Er zou dus alleen als andere, dan ijdele zin overblijven, dat het systeem gemakkelijk de logica van anderen leerde overzien en dus beheerschen. Maar dan moet het een nieuwe wiskundige taal worden, die vatbaar is, om als taal reeds ‖ een logisch systeem te zijn. (De gewone wisk. taal beeldt vaag een lo- **VIII-68** gisch systeem daarachter, dat het nu eens zus, dan zoo benadert, zit zelf dus niet rechtlijnig in elkaar.)

[Bekrompen wiskundige redeneerders zou je werkelijk zoo dikwijls heele redeneeringen kunnen bekorten ('direct inzien', als alleen op de taalaxioma's gegrond), maar betere wiskundigen houden liever met opzet de taalsymbolen flottant ⟨d.w.z. ⟨er bij⟩ insluitend allerlei relaties van het toevallig beschouwde bijz. geval; zoo liggen in het woord Anregunge, om allerlei deelen der voorstelling beurtelings op den voorgrond te plaatsen,⟩ om daaruit steeds zich de geest open te houden tot uitbreiding van het gebied ⟨door slechts aan één onderdeel van het woord vast te houden⟩ , dus veralgemeening van de betekenis der symbolen. **)

⟨Zij houden dus levend voor zich niet het woordengebouw, maar het wiskundig gebouw. En wat zoo direct uit de woorden volgt, dat zien zij ook wel direct in 't gebouw.

Of anders is hier juist aanleiding tot uitbreiding van een symbool, omdat het totnogtoe wat vaag ⟨d.w.z. met andere dingen samen⟩ werd gedacht. Neemt men de taal ⟨direct⟩ scherp, dan snijdt men zich die uitbreiding af. ***)

(kantlijn:) ⟨Een bepaald gegeven systeem kan ik verscherpen, maar daarmee beperk ik het tot zichzelf. Men kan het een enkele maal doen, maar worde direct daarna weer vaag en intuitief. Dán is er kans, dat men later nóg verder uitbreidt.⟩

(doorgehaald, gedeeltelijk moeilijk leesbaar:) ⟦Want zoo is de gang der wiskunde: van het bijzondere naar het algemeene. En zoo ook is de onderzoeking, die aantoont, dat er geen andere gebouwen mogelijk zijn, is alleen verdedigen als ezelsbrug, en staat tot de zuivere wiskunde, als ... *(rest onleesbaar)*

Intusschen is Hilbert zoo wijs geweest, ⟨het bij⟩ zijn aanduiding te laten.

[⟨65⟩] Verder onderstelt hij als richting ⟦voor⟧ invoering van nieuwe symbolen

Waren de logistici ook maar zoo bescheiden gebleven!

*) *(kantl.:)* ⟨een voorbeeld van een aftelbare, steeds onaffe Menge⟩ ,
**) *(kantlijn:)* ⟨Want de levende wiskunde kan zich vrij uitbreiden; de symbolenwisk. niet, want dan zou je eerst moeten nagaan, of er een *werkelijke* uitbr. mee correspondeert.⟩
***) *(kantlijn:)* ⟨het is juist de overgang van ⟨lichtzinnig⟩ vaag (d.w.z. het scherp opgebouwde verlaten) tot scherp, die b.v. de uitbreiding v.h. ruimtebegrip bracht, niet de scherpte zelf. *(onleesb. doorh.)* De uniciteitsbewijzen van Hilbert en Lie waren nooit gekomen, als men direct in scherpe taal het Cartes. rechth. coörd. stelsel had opgebouwd.⟩

....

De logica is *alleen* op de wiskunde van toepassing.[124]

....

VIII-69 In het leven – en vooral in de philosophie, die het onzin is, in een wiskundig, dus logisch systeem onder te brengen – is elke ⟨'uitgesproken'⟩ zoogenaamde stelling een aanschouwing c saamgesteld uit en gesplitst in 2 aanschouwingen ⟨a en b⟩ , die beide kunnen vervloeien zóó, dat het conglomeraat niet meer als een vervloeiing van c kan worden gezien. Zoo is het met alle 'uitgesproken' waarheden en ook moreele waardeeringen en geboden.

....

⟨Wij hebben alleen wiskundige vat op wat wij uit onze bouwelementen (d.z. vaste steenen) zelf zouden kunnen hebben opgebouwd; daarom trachten we daarop alle physica te herleiden.⟩

....

Alle stetige functies zijn denkbaar, want ze zijn als de kansrij van c te zien. In de natuur denken we ze onverbiddelijk; en ook alleen op die voorwaarde gelden de wetten der waarschijnlijkheidsrekening. (Poincaré)[125]

....

De anal. diff. vgl. der 2de orde (kracht anal. van stand, en stand van kracht afhangend) zou nog een niet-anal. beginstand toestaan, waaruit dan ook niet-anal. verdere standen zouden volgen.[126]

....

Heeft de moleculairhypothese iets te maken met niet-anal. functies? Onzin, men zorgt wel, slechts zulke combinaties uit de 'groote getallen–discontin.' te nemen, dat weer nieuwe analytische functies voor den dag komen. Dat de *aard* der functies in 't zeer kleine geheel gaat veranderen, doet er niets aan af, of die aard blijft analytisch, zoo gauw ik ze in 't oneindig kleine als wérkelijk zou gaan bestudeeren.

. . . .

(gelardeerd met gedeeltelijk onbleesbare korte doorhalingen) Bij het nabouwen van **VIII-70**
de natuur is het geordend systeem (dat is dat van arithmetik en algebra) alleen niet genoeg; we ⟨voeren⟩ het traagheidsbeginsel in de natuur ⟨in⟩[⟨66⟩] (misschien overigens is het het gevolg van ons eigen spiergevoel) *) en ⟨kunnen dan voor allerlei problemen⟩ een of ander soort van *grootheid* ⟨uit mechanica afgeleid⟩ laten optreden;[⟨67⟩] zoo'n grootheid kan alleen differentieerbaar ⟨met eindig diff. quotient naar ⟨den tijd⟩ ⟨naar tijd en plaats⟩ ⟩ veranderen. (cf. de fluxie van een vector, waarvan de *modulus* grootheidseigenschappen heeft.)

*) *(kantlijn:* ⟨het verklaart de plaats als iets niet essentieels, en verder de schaal der rigiden als een soort absolute schaal (d.w.z. een stuk a in een punt P of een punt $P + dP$ is hetzelfde), waarmee we voor de ⟨rigide⟩ mechanica ⟨allerlei⟩ differentieerbare functies opbouwen.

Opm. De niet-diff., maar stetige pot. functie van Hilbert zal voor kleine omvang der electrische deeltjes altijd weer differentieerbaar worden. Maar in de meeste andere physische problemen vinden we óók voor het limietgedrag in 't groot (kin. gastheorie) differentieerbare functies.⟩ [127]

. . . .

[De algebra kan werken met überall dichte schalen; de analyse heeft het continuum noodig. ⟨Niet waar, denk maar een kromme als limiet van een polygoonomtrek, òf van een üb. dichte puntverzameling.⟩]

. . . .

Maar die *grootheid* met die eigenschap ⟨is mechanisch en⟩ valt buiten het wiskundig systeem: in dat systeem, dat een van orde is, hebben de niet-differentieerbare krommen evenveel recht van bestaan [zijn sitaal hetzelfde; de rechte lijnen dan ⟨zijn toch iets anders⟩ ? Met hun theorema van Desargues?; wel, die zijn ook op de maat gegrond; ze maken een integraal minimaal *)] ⟨Alvorens een⟩ werkelijk probleem ⟨te kunnen aanpakken, schept⟩[⟨68⟩] de wiskundige intuitie het idee van grootte **); (continuum met gelijkw. segmenten) dat continuum, dat *niet* is op te bouwen: dat is alleen de üb. dichte schaal, en zich toch ‖ er bij **VIII-71**
opdringt als metaphysische kansenbron, die overigens evenals de waarsch. rek.

⟨66⟩ We ⟦maken van⟧ het traagheidsbeginsel in de natuur ⟦het axioma⟧

⟨67⟩ (misschien overigens is het het gevolg van ons eigen spiergevoel) ⟦overgaan tot de analyse⟧ en een of ander soort van *grootheid* laten optreden;

⟨68⟩ *(I.p.v. enkele onleesbaar doorgehaalde woorden* is gegrond op ons *niet-weten.*⟨69⟩

Want al kunnen wij slechts met onze wetten een aftelbare onaffe Menge construeeren; ⟨in⟩ de natuur,⟨70⟩ d.i. het niet-weten, d.i. het *andere* van onze eigen veruiterlijking (het onbepaalde tegenover de bepaling onzer veruiterlijking) leggen we de continuiteit,⟨71⟩ waarin wij onze schalen construeeren, en waarin wij met onze schalen zooveel wetten kunnen leggen als we willen; het tusschengelegene kunnen wij alleen beheerschen met onze continuiteitspostuleering met eindige diff. quot..

Weliswaar kan de functie voor vrij wijde schalen een geheel anders benaderde continuiteit vertoonen, dan voor het zeer kleine er tusschen.

(voetnoten in de kantlijn van de vorige pagina:)

*) ⟨Een schaar van meer dan ∞^2 krommen in een pl. vlak kan ik zonder maat niet eens definieeren.⟩

**) ⟨In de mechanica die dingen, die nooit oneindig snel kunnen veranderen (‘omdat er wrijvingsweerstanden *evenredig* met de snelheid zijn’: verklaren we).⟩
(einde voetnoten, verder met pag. 71)

....

De ruimte heb ik te beschouwen, *niet* als 3-dim. grootheid; maar als ordening van een-dim. grootheden, ⟨maar dan door middel van de 3-dim. geordende groep⟩ . Want het idee van grootheid is in zichzelf in den tijd eendimensionaal.

....

VIII-72 Het mooiste van het bouwen is dat het intuitief blijft en artistiek. Om het gebouw nu echter weer op ‖ wiskunde van de 2^{de} orde te betrekken (aantallenbepaling) is onaesthetisch evenals axiomatische onderzoekingen, die niet bouwen ⟨met behulp van logica als leiding⟩ , maar logica drijven op zichzelf.

....

De dieren, die ‘door ondervinding leeren’, zijn het eerste stadium van het toepassen van de wiskunde in den strijd met de natuur. Het is het uit vrees bijleggen aan de natuur van wiskundig gedrag; door het afgegrensd zien van een deel ⟨treedt de tijd in en⟩ krijgt men de vatbaarheid, het bij *herhaling* te zullen zien (lichte tuimelbaarheid in de oude middelenafgrenzing, zoo gauw die nog eens als middel zal kunnen dienen), herinnering *) door associatie. (Zoo’n *herhaald* ding, kan natuurlijk ook een oordeel zijn, d.w.z. een ⟨afgegrensd na-⟩ agglomeraat van eenige partieeringen en daarvan kunnen eenige deelen bij de

---

⟨69⟩en zich toch er bij opdringt als metaphysische kansenbron, die overigens evenals de waarsch. rek. is gegrond op ons *niet-weten.* ⟦Voor wel weten zouden alleen eindige schalen (maar steeds verdichtbaar, dus üb. dicht) bestaan, met evenredige versprongen.⟧

⟨70⟩⟦van⟧ de natuur

⟨71⟩⟦postuleeren we⟧ leggen we ⟦als⟧ de continuiteit herhaling veranderd zijn; onze *herhaling* slaat op het gelijkgeblevene). Het verste stadium is, dat heele klankrijen herhaald worden, en door middel daarvan getallen. **) (Getallen zonder hulpuitdrukking van klankrijen worden niet licht herhaald, als ze grooter dan vier zijn.)

*) *(in de kantlijn:)* ⟨Herinnering is dus alles behalve primair. De herinnering, die alle bezinning moet dragen is toch primair? Neen, want daar is de herinnering wel moment, maar niet iets onderscheidens 'zonder meer'. (*zonder meer* is dus secundair, en niet primair als bij Bolland.)

**) waardoor men in de herinnering als iets gevonden constants vastlegt de relatie in grootheid van aantal (meer of minder) van de bewuste hoeveelheid tot alle mogelijke andere hoeveelheden.

. . . .

Schur heeft ⟨M.A. 39⟩ [128] aangetoond, dat als de proj. axioma's zijn vervuld, altijd door invoering van ideale elementen ‖ het elliptisch vlak is te voltooien.

. . . .

Men bedenke ⟨hier⟩, dat een ⟨maatloos⟩ proj. vlak *met* rechte lijnen binnen een willekeurig convex sitaal (n.l. ten opz. van de bereikbare punten) iets anders is, dan een binnen een kegelsnede. (Binnen verschillende ellipsen is het echter sitaal hetzelfde.) Men kan zelfs de graad van een kromme ⟨sitaal⟩ beschouwen als kenmerkend het gedrag ten opzichte van rechte lijnen (wat haar snijding daarmee, dus de bereikbaarheid op de rechte lijnen betreft.) **VIII-73**

. . . .

De 'aprioriteit' der proj. meetkunde van Russell bestaat alleen in zooverre de symbolische eischen zoo heel eenvoudig zijn; een hoogst eenvoudig lettersysteem vormen.[129]

. . . .

Als je houdt van Aardrijkskunde, dan kan dat zijn, van de echte inhoud, ⟨het schilderachtige,⟩ die je ⟨in⟩ de macht van de verstandhouding wordt gevangen[⟨72⟩] en je zoo kan worden aan-geassocieerd; of ook van de geleerdheid, het plezier, om die macht van de cathegorieën te handteeren, en er alles, tot de hoogste en diepste dingen toe, in te vangen. (ze zoo te kunnen bekijken, dat ze zich laten 'zeggen'.)

. . . .

Onder welke voorwaarde volgt uit het groep-begrip ‖ de relatieve differentieerbaarheid van de elementen der groep? Voor de bewegingsgroep heeft Hilbert **VIII-74**

[⟨72⟩] die je ⟦door ⟧ de macht van de verstandhouding wordt gevangen dat aangetoond

. . . .

De theorie van Helmholtz leert, ⟨volgens Lie niet eens⟩ , welke groep uit de projectieve groep moet worden gekozen voor de meetkunde.[130]

. . . .

De sitale bewegingsgroep, waaruit de optelling moet worden afgeleid.[131] Neem eerst een enkele eindige verschuiving ⟨defin. de operatie '$+a$'⟩ .

Daardoor is een schaal van eenheden bepaald. Nu volgt uit de assoc. eig., dat, als $b+b=a$, dat dan de operatie '$+b$' tweemaal herhaald, moet geven '$+a$'. M.a.w. de schaal, door de operatie $+b$ bepaald, ligt op de a-schaal, en dan nog in elke tusschen ruimte van die a-schaal een punt. ⟨En wel is het deelpunt in het 2^{de} vak dat na het eerste $+a$; immers het is $a+b=(b+b)+b=b+(b+b)=b+a$. Dus volgt uit de assoc. eig. de commut..⟩

Zoo komt het construeeren van een *optel*-bewegingsgroep overeen met de constructie van een üb. dichte schaal. *) Analoog voor vermenigvuldiging. Ik kan dez. operatie als opt. of verm. beschouwen; maar bij de laatste betiteling denk ik in elk geval de schaal aan 2 kanten open. (versch. eindpunten, n.l. 0 en $+\infty$); bij de optelling kan ik ook gesloten denken. (de beide invariante eindpunten laten samenvallen).

*) *(doorgehaalde kantlijn-noot:)* ⟦In t' algemeen wordt nu de schaal zóó geconstrueerd, dat achteraf blijkt, dat $a+b \neq b+a$. Neem ik bovendien de commutatieve eigenschap aan, dan zijn direct uit de constructie der 'enz.'*(?)* operatie de verschillende segmenten van de a-schaal al meteen punt voor punt op elkaar betrokken; en ik behoef verder ook van de b-schaal maar weer op het eerste segment het middelpunt te kiezen; dan komt vanzelf de heele schaal tot stand; en de commutatieve eigenschap is verzekerd.⟧

. . . .

VIII-75 Zal een operatie ⟨van transform. op eendim. cont. met 2 dubbelp.⟩ geven een *groep* zóó,⟨73⟩ dat steeds alleen de punten in 't oneindige dubbelpunten zijn, dan moet het zijn onze ⟨gewone⟩ opteltransformatie.

(De § eindigt met een slechts fragmentarisch leesbare doorgehaalde tekst.)

. . . .

Intusschen komt door combinatie met $x_2=-x_1$ nog een tweede groep met dezelfde dubbelpunten , ⟨tezamen nog een enkele groep, waar alleen het veld van de parameter wordt verdubbeld.⟩⟨74⟩

⟨73⟩ Zal zoo'n operatie ...*(?)* geven een groep zóó,

⟨74⟩ *I.p.v. een onleesbare doorhaling*

(kantl.:⟨Het nulpunt wordt hiervoor willekeurig gekozen⟩

....

Ik neem nu een 2^{de} groep met één dubbelpunt in 't eindige, die ik 'vermenigvuldiging' noem, en die ik wil, dat met de eerste groep samen een tweeledige groep zal vormen. Noem dus $a \times (x+b) : f_a(x+b)$; ik weet dan, dat f is een steeds stijgende functie; heeft zij dan niet daarom een diff. quotient? Neem dat in elk geval aan, dan moet $f_a(x+\varepsilon) \equiv f_a(x)+\varepsilon f_a'(x)$, zijn van de vorm $f_r(x)+h$

(doorgehaald:) ⟦Dus $f'(x)$ moet zijn een constante of van den vorm $f_\tau(x)$. Maar in 't laatste geval zouden we niet een ⟨eigenlijk⟩ twee–ledige, maar een een–ledige groep krijgen. We vinden dan overigens als voorwaarde $\frac{\partial f}{\partial a} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}$, en $f_a(x) = \varphi(x+\varepsilon a)$, waar de functies niet symmetrisch zijn, dus ...⟧ *(rest van het doorgehaalde onleesbaar)*

....

Hieraan is ⟨b.v. *)⟩ voldaan, als $f_a'(x)$ is een constante en de operatie f is de gewone vermenigvuldiging. **) **VIII-76**

Zoo komt zij door de groep-eisch beter voor den dag, dan door den eisch van de distributieve eigenschap. Een tweede groep komt voor den dag, als $f_b(x) \equiv \log(e^x+b)$.

Dan is $f_b(x+a) = f_{\frac{b}{e^a}}(x)+a$ ⟨als we afzien van den eisch, dat zij dubbelpuntspaar ligt binnen dat van de optelgroep⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨De uniciteit hebben we nog niet bewezen.⟩

**) *(kantl.:)*⟨is n.l. v.d. vorm $px+q$

Dan $f_b(x) \equiv bx$, en $f_b(x+a) = f_b(x)+ab$⟩

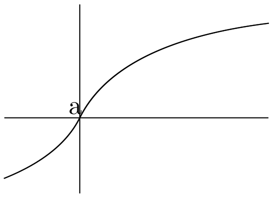
....

Ook ⟨weer⟩ de tweede groep geeft door combinatie met $x_2 = \frac{1}{x_1}$ een nieuwe groep met dezelfde dubbelpunten.

⟨tezamen nog een enkele groep, waar alleen het veld van den parameter is verdubbeld.

....

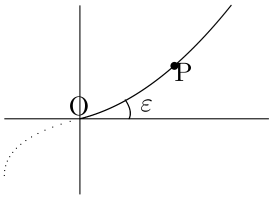
(doorgehaald, na een onleesbaar doorgehaalde kantlijntoevoeging:) ⟦En ook wel zonder die analytische eigenschap ⟨uit te spreken⟩ . Immers teeken de ⟨zeer kleine⟩ toename voor a als dubbelpunt als $f_a(x)$. Die moet een limietgedrag hebben.



Nu komt de groep $f_a(x)+b$ (we denken b ook maar weer zeer klein) door een kleine horizontale verschuiving en de groep $f_a(x+b)$ door een kleine verticale verschuiving van de kromme. Dit zal alleen dan dezelfde infinitesimale tweeledige groep vormen, als de kromme lijn een rechte is.⟧

....

De vraag voor de uniciteit ⟨als genomen wordt één dubbelpunt in ∞ en één in 't eindige binnen de optelgroep⟩ is deze.



Gegeven een kromme, die de aangroeiing bij de abscis moet voorstellen; verschuif die achtereenvolgens met elk punt P naar O. Dan ⟨en ook zoo alleen⟩ komt in O een krommenstel, dat voor het platte vlak voor alle verschuivingen (hor. $\parallel$ en vert.) invariant is.

VIII-77

(kantlijntoevoegingen, in schrift VIII nog op pag. 76:)⟨We kunnen beschouwen het gebeid tusschen 2 vaste punten van eenl. groep A; en hebben dan aan te nemen, dat B daartusschen *0* of *1* vast punt heeft. Hiertoe is elke combinatie van 2 groepen te herleiden; immers liggen er meer tusschen van B, dan nemen we het gebied van 2 daarvan op B; daartusschen liggen dan 0 van A.

We beschouwen alleen het gedeelte der kromme, rechts van O. Beschouw nu één willek. transformatiekromme, dan weet ik, dat alle rechtsche, 'Abschnitte' naar O geplaatst, tot de groep moeten hooren. Wat volgt daaruit voor die kromme?⟩

(kantlijn, nu op pag. 77 van schrift VIII, in aansluiting op de kantlijntoevoeging van de vorige pag. 76:) ⟨Het beste is misschien bij deze kwestie, 'te beschouwen een gebied tusschen 2 opeenv. dubbelp. van een der comp. eenl. groepen, waartusschen de andere geen, (resp. één) dubbelp. heeft', en dan die eerste groep als optelgroep te nemen.⟩

De vraag is nu: hoe moet de oorspr. kromme zijn geteekend, opdat de in O komende krommen een groep *) vormen (als we de ordinaten als abscistoenamen aankijken)

Het lijkt onmogelijk, als het geen rechte lijn is. Immers vooreerst moet het diff. quotient altijd toenemen ⟨van O in de richting P⟩ . Want anders zou, bij het komen van de verschuivingsgroep der ∞^2 krommen in het platte vlak, één punt twee ⟨verschillende⟩ krommen met gelijke aanvangsrichting door zich krijgen, wat niet gaat.

⟨den 2 krommen elkaar in 2 punten kunnen snijden, terwijl de eenledige groep bepaald is door de verschuiving van één enkel punt, en dus 2 krommen maar één punt gemeen kunnen hebben.

Voor niet-diff. krommen volgt zoo, dat de koorde over x-proj. α steeds in helling moet toenemen. Hieruit volgt dan waarsch. de diff. baarh. En dan verder volgens Lie.

Werkelijk volgt die (*die diff. baarh.)*, maar voor een üb. dichte schaal kan het diff. quot. naar voren en naar achteren verschillen.⟩

(doorgehaald:) ⟦Is nu vooreerst $\varepsilon \neq 0$, dan krijgt de kromme nergens een richting ε, maar de groep in O moet zijn te deelen tot hoeken $< \varepsilon$.

Dit kan dus niet.

En is $\varepsilon = 0$, dan geeft de groep in O alleen hoeken $= 0$

(volgt een onleesbaar doorgehaalde zin)

Dit gaat dus niet, en toch moeten we hebben een opl. der diff. vgl. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(\frac{dy}{dx})$ **) d.i. $y + b = \varphi(x + a)$ òf $y + b = c$. En de laatste oplossing is goed.⟧

*) *(tussen de regels en in de kantlijn:)*⟨Want ook indien de kromme niet een onbepaald toenemend diff. quot., slechts een beperkt gebied van diff. quot. heeft (b.v. de rechte lijn) dan moet ook zij op zichzelf een groep vormen, n.l. voor de transformaties, die met een dier diff. quot. in het dubbelpunt beginnen. Dan zou de groote groep zich eenvoudig splitsen in meerdere.

Maar dat kan niet, tenzij voor een enkel diff. quot. (r. lijn). Immers denk, er was een *gebied* van diff. quotienten, en wel ε de kleinste in O, dan kan ik een beetje kleinere transform. uit O nemen, die moet dan toch verderop het gedrag der oorspr. krommen aannemen. De kromme moet dus in elk geval met diff. quot. 0 beginnen. En daarom is er ook geen max. diff. quot., want dan zou de groep, die bij het max. aanvangt, niet met 0 beginnen, wat we bewezen hebben dat moet.

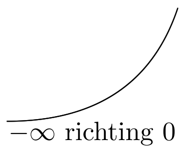
Het best zeg: de groep $f_p(x)+q$ moet in zich bevatten de groep $f_p(x+r)+q$, dus moet in alle lijnen $//Y$-as gelijk ontspringen, dus moet in allen punten gelijk ontspringen, dus mag in geen enkel punt (want niet in O), dat 2 in dat punt ontspr. krommen elkaar nog eens snijden.⟩

**) *(kantlijn, niet doorgehaald!)* ⟨voor de invariante verschuiving n.l. die de groep $f_a(x) + b$ moet maken $f_a(x + b)$⟩

. . . .

Intusschen kon de kromme wel zoo lopen:⟨75⟩

bij $+\infty$ richting ∞
en $y = +\infty$



bij $-\infty$ richting 0

We moeten dan voor zoo'n kromme $y = f(x)$ hebben:⟨76⟩

$$f\{f(x) + x\} \equiv f(x+a) + b; \qquad \text{òf} \qquad f'\{f(x) + x\} = f'(x+a)$$

(kantlijn:)⟨Stel $A \equiv f_p(x) + y$ bevat $f_p(x+a)$; A bevat voor een willek. punt op $x = a$ slechts één kromme, die het met een punt van $x = 0$ verbindt.

Stel nu *niet* al die krommen hooren tot $f_p(x+a)$, dan is dus het voorgebied van toename voor $x = a >$ dan het achtergebied van afname voor $x = -a$; *) maar dan zou de groep $f_p(x-a) + h$ nooit in $f_p(x) + y$ kunnen bevat zijn.

Dit strijdt dus tegen de onderstelling, m.a.w. als A bevat $f_p(x+a)$, dan bevat zij ook *niet* meer.

*) onzin, dat voorgebied is de gehele lijn $x = a$, immers was er een onbereikbaar punt voor een punt in de eenledige groep, dan was dat (immers herleid de groep tot optelling) een vast punt voor de groep.
(einde kantlijntoevoeging)

VIII-78 En hieraan[132] de reeds genoemde functie $y = \log(e^x + b)$, die links een asymptoot // X-as heeft.

(kantl.:) ⟨en ze blijkt uit de infinitesimale theorie van Lie de eenige soort te zijn⟩

Optelling gedefinieerd als *de* eendim. eenledige groep. Van een tweede groep, die er een tweeledige groep mee vormt, moet *) $\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} - \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, maar $\varphi_1 = a$ (const.), dus $\frac{d\varphi_2}{dx} = p + q\varphi_2$

$\frac{d\varphi_2}{dx} - q\varphi_2 = p$. Opl.: $\varphi_2 = ce^{qx} - \frac{p}{q}$. Voor $q = 0$: $\varphi_2 = px + c$ de vermenigvuldiging.

Voor $p = 0$ ⟨en $q = -1$⟩ wordt de transf.: $\varphi_2 = ce^{-x}$; de operatie, die tot opt. staat als opt. tot vermenigv..

⟨Ook aldus: $\frac{d\varphi_2}{dx} = p + q\varphi_2 \qquad \frac{d(p+q\varphi_2)}{dx} = q(p + q\varphi_2)$

⟨75⟩Intusschen ⟦hebben we hier gebruik gemaakt van het eene dubbelpunt in 't eindige. Anders⟧ kon de kromme wel zoo lopen:

⟨76⟩⟦en dan geldt de redeneering niet,⟧ we moeten dan voor zoo'n kromme $y = f(x)$ hebben:

$\frac{d\varphi_3}{dx} = q\varphi_3$. Maar neem nu als schaal in pl.v.d. optelschaal φ_1 de schaal φ_3, dan staat weer: $\frac{d\varphi_1}{dx} = p$

*) *(kantlijn:)* ⟨volgens Lie⟩

. . . .

Optelling en vermenigvuldiging zijn geheel bepaald als:
continue eenduidige ⟨eenledige⟩ groep op een 'Strecke'
En hiermee is de algebra tot de meetkunde teruggebracht en 'algebraisch' in hoogste instantie 'meetkundig' gebleken.[133]

. . . .

De ruimte ⟨veruiterlijking (begeleid door zien à la Faraday)⟩ is traditioneel ⟨en overgeërfd⟩:[⟨77⟩] daarom kennen pasgeboren kinderen haar al in hun daden. Empirisch vangen zij haar dan later in de wiskunde.

. . . .

Iets *leeren* zien ⟨of waarderen,⟩ is leeren genoegen nemen met de partialiteit er van.

. . . .

Wijsbegeerte kan niet wiskundig in elkaar zitten, want dan was het slechts een deel der veruiterlijking.

. . . .

Van het differentieerbaar zijn van y naar x (twee ⟨langs een criteriumlijn variabele⟩ grootheden in de natuur) kan ik niet spreken; immers ik kan de schaal op y zoo construeeren, dat $y = x$.Maar de hypothese in de ‖ natuur ⟨die wij **VIII-79**
er tot haar bestrijding in leggen⟩ is, dat twee verschillende, ⟨beide mogelijke⟩ , functies y van x ten opzichte van elkaar differentieerbaar zijn.[134]

. . . .

Een diff. quotient ook van maten zou best oneindig ⟨kunnen⟩ zijn,[⟨78⟩] als maar een der variabelen een ogenblik stil staat. ⟨Maar we nemen daarom als onafh. verand. den tijd, gepostuleerd als nooit stil te staan.⟩

. . . .

Denkt men zich alle maten als zeer groote geheele getallen, ⟨en stellen we een proces voor door een differentieerbare functie van den tijd, dan is daarbij

---

[⟨77⟩] De ruimte is ⟦empirisch, en⟧ traditioneel:

[⟨78⟩] Een diff. quotient ook van maten ⟦kan⟧ best oneindig zijn, gerekend⟩,[⟨79⟩] dat als men de variatie ⟨in de verandering v.h. aantal voor Δt⟩ zoo nauwkeurig bekijkt, dat de relatieve variatie haast onmerkbaar is, dat dan toch nog het geheele getal, dat de maat nauwkeurig uitdrukt, (aantal botsingen van moleculen b.v.) nog zeer groot is. ⟨dan vervallen n.l. de hakkelingen in de ordinaat t.o.v. die ordinaten zelf.⟩

(kantlijn:) ⟨Zoo voert men het n.l. in de hypothesen in (die geschikt zijn gebleken)⟩

. . . .

Wij hebben onze functies geconstrueerd, om de natuur te beheerschen. Dat wij nu ook pathologische functies kunnen construeeren doet er niets toe af, dat alleen de eerste ⟨voorloopig⟩ voor ons geschikt zijn ⟨gebleken⟩ , om de natuur te beheerschen.

. . . .

Al wat ik schrijf, zijn misschien doodeenvoudige dingen, maar toch is het voldoende, om allerlei phil. stelsels te ruineeren, wat ik later misschien nog wel eens nader uitvoer.

. . . .

De verschijnselen der wiskunde zijn de eenige, waarover je logisch schematizeerend kunt schrijven ⟨Peano, Dedekind⟩ , omdat we alleen van wat we zelf gebouwd hebben, zeker weten, dat het zich aan zijn regels zal houden. (er geen onbekende, ⟨misschien storende⟩ achterverschijnselen zijn.)

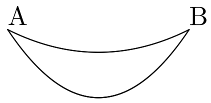
. . . .

De ruimte is niets, dan het *domein* van de groep der verplaatsingen van een vast lichaam; het kan tot heel ver, achter de vaste sterren; de vraag 'is er een eind?' is onzin; wij *werken* op 't oogenblik met een onbegrensd systeem. Misschien kunnen we later *werken* met een begrensd systeem. Zoo werkte men vroeger met landmeten met succes met een platte aarde; later merkte men met een begrensde aarde ⟨nog⟩ meer te kunnen omvatten. Men zegt dan foutief: 'Gebleken is, dat de aarde rond is'.

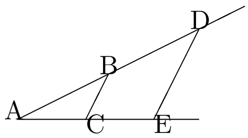
. . . .

Poincaré zegt ergens, dat nooit zal kunnen blijken, dat de ruimte niet-Eucl. is, omdat wij haar Euclidisch definieeren. Maar de afstand van 2 punten kan ik streng meten, als minimum afstand met een maat AB (die niet recht, maar alleen vast hoeft te zijn) gemeten.

[⟨79⟩] I.p.v. onleesbare doorhaling.



Dus kan ik verifieeren, of gelijkvormige driehoeken



mogelijk zijn (d.w.z. met evenr. zijden), tusschenpunten, die wij in ons systeem van natuurbeschouwing bewegingloos denken. En als hij met een goede kijker zichzelf zag, zou Poincaré zijn 'gedefinieerd' systeem wel *moeten* veranderen. Wij kunnen aan de natuur geen definities voorschrijven, wij experimenteeren, en gieten de experimenten in een wiskundig opgebouwd systeem, dat ze zoo goed mogelijk benadert.

. . . .

Schur: Mathem. Annalen 27; 55; 39; 18; **VIII-80**
Poincaré: L'enseignement mathem. t. 6. 1904 p. 257
Schröder: Nova Acta d. Leop. Carol. Akad. d. Nat. Bd. 71
Jahresber. Bd. 5 S81.
The Monist, Oktober 1898. S.44
F.Bernstein: Jahresber. XIV 'Die Theorie der reellen Zahlen'
(opl. v.h. continuumprobleem).
A.Korselt: ibid 'Ueber die Grundlagen der Arithmetik'.
Hardy: Quarterly Journal of Math. 1903 p. 87
Huntington: Transactions of the American Mathem. Society. 1902
Hölden: Sächsische Berichte 1901 (t. 53)
Jürgens: Jahresber. Bd. 7
Klein: Neuere Geometrie (Referat over Lie)
Enriques: Rendiconti(?) Palermo XII (1898)
Le Roy: Revue de métaphysique 1905 , 1901
Cipolla: Periodico di Matematica, anno XX, serie 3, vol II.
Frischauf: Elemente der Absoluten Geometrie p. 125
Klein: Math. Ann. 4; 6; 7; 17.
Mach: Erkentnis und Irrtum.
Klein: Erlanger Programm.
Poincaré: Bull. de la Soc. Math. Bd. 15.

Pasch: Math. Ann. 32

. . . .

. . . .

Notes

[1]Over de status van tekens. Zie ook het begin van Brouwers dissertatie. De vraag is, of tekens bij het wiskundig gebouw horen, of niet.

[2]De *reële ruimte,* dat is het (n-dimensionale) continuüm, dat bij Brouwer inderdaad intuïtief is.
De *mathematische ruimte,* dat is het meetbaar continuüm als zijnde opgebouwd uit tijdselementen.

[3]De voor Brouwer fundamentele beperking bij de constructie van verzamelingen.

[4]Brouwer leest hier van Couturat *Les Principes des Mathématiques,* hoofdstuksgewijs gepubliceerd in de *Revue de Métaphysique et de Morale,* en in 1905 als boek uitgegeven. Blijkens het voorwoord bij de boekuitgave is de titel bedoeld als een reactie op Russells *Principles of Mathematics.*
M.b.t. de intuïtie: dat slaat op het begin van hoofdstuk II *l'Idée de Nombre,* wat hierna besproken wordt. De logica als herziening van de wiskunde heeft aangetoond, dat deze op logische principes rust, en niet op intuïtie.

[5]Brouwer gaat dus verder dan Couturat: zonder ordening zijn er helemaal geen getallen. Zie de dissertatie: die ontstaan juist uit de ordening, dat wil zeggen dat de tweede gebeurtenis, waarbij de eerste onthouden is, het getal twee geeft, etc.
Het citaat staat aan het eind van § A, en is, zoals wel vaker, geen letterlijk citaat.

[6]Aan het eind van § B, op pag. 61, zegt Couturat: la seconde (théorie cardinale) présuppose la première (théorie ordinale).
Brouwer stelt daar tegenover, dat het juist omgekeerd is: uit de orde volgen de getallen en daaruit de cardinaalgetallen.

[7]Couturat gaat dus eigenlijk empirisch te werk, Brouwer intuïtief constructief.

[8]Een karakterisering van een mathematisch logicus als iemand die zelf niet bouwt.
Er volgt hierna in dit achtste schrift eerst een algemene beschouwing over grondslagen der wiskunde in relatie met logica. Ook volgen er enkele pagina's potentiaaltheorie.
De bespreking van *Les Principes des Mathématiques* van Couturat gaat door op pag.11 van dit schrift.

[9]Een een–een correspondentie is dus alleen uit te maken:
– in de fysische realiteit (eindig), en
– bij aftelbare verzamelingen.

[10]Het *willen stellen van gelijke dingen* schetst Brouwer als 'een veruiterlijking', d.w.z. als een wegleiden uit het centrum, weg van het diepste zelf van de mens, en dat is dus een zonde. Zie *Leven, Kunst en Mystiek.*

[11]De bespreking van vector- en potentiaaltheorie gaat, met enkele onderbrekingen, door tot en met pag. 13.

[12]Couturat praat hier, in zijn *Les Principes des Mathématiques,* over optelling, waarbij in geval van verzamelingen de klassen disjunct moeten zijn. Dat is met behulp van Cantors definitie van klasse niet te bepalen. Zie ook bij Couturat § B, pag. 16: *Calcul des classes.*

[13]Zie Cantor 1883, p. 19 e.v.

[14]Uit hoofdstuk III, *l'Idée d'ordre.*

[15]Vervolg van de behandeling van vectoranalyse tot en met pag 13.

[16]Dit zijn de Verslagen van de K.N.A.W., (voorheen K.A.W.).

[17]Op deze en de volgende pagina van dit schrift de Begründung van de intuïtie van het continuüm,
1. als tegenhanger van discontinu (discreet, onze zonde),
2. *als volmaakte keuzenrij.* Hier staat daar nog als opmerking bij, dat wij dat als een natuurverschijnsel aanstaren, dus het is als het ware nog geen activiteit om een grip op het continuüm te krijgen.

[18]Dus ik *kan niet weten* dat een geconstrueerd continuüm iets met intuïtie te maken heeft.

[19]Een graad van nauwkeurigheid van waarnemingen, die onbegrensd op te voeren is, houdt de continuümintuïtie in. Maar wel die van het mathematisch continuüm.
Let wel, dat hier het onderscheid tussen het opgebouwde *fictieve* continuüm en het *mathematisch* continuüm gemaakt wordt.

[20]Volgens Brouwer heeft Klein hier dus ongelijk met het willen opbouwen van het *fictieve* continuüm om oneindige meetnauwkeurigheid te verkrijgen.

[21]Brouwer zoekt op deze en op de volgende bladzijden welke verzamelingen er mogelijk; dat wil dus voor hem zeggen: welke construeerbaar zijn.
T, Cantors tweede machtigheid, dat is het totaal van de getallen van de tweede getalklasse, is dus niet te maken. We kunnen alleen *postuleren* dat elkle fundamentaalreeks een grenselement heeft. Merk op dat *fundamentaalreeks hier niet beperkt is tot het begrip Cauchy-rij,* daar het grenselement in de tweede getalklasse mag liggen.

[22]Brouwer noemt het hier de *tweede machtigheid,* maar het is in feite de cardinaliteit *aftelbaar oneindig onaf.*

[23]Net zo min als de perfecte verzameling bestaat, bestaat ook T niet, dat wil zeggen het totaal

$$\omega + 1, \omega + 2, ...\omega^{\omega}, ...\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}}, ...$$

als affe verzameling bestaat niet. (Een van de stellingen bij Brouwers dissertatie).

[24]Een interessante doorhaling: en toch ... *misschien is ons continuüm een paradox.*

[25]Continuïteit in de natuur wordt *gepostuleerd,* zelfs differentieerbaarheid wordt gepostuleerd, maar het is slechts een nabootsing.

[26]Een fundamentaalreeks (ordetype ω), dus deze kan af gedacht worden; zo ook een convergente reeks. En een divergente? Dat is slechts een wet van voortschrijding.

[27]Over de eigenschappen van het continuüm. Het continuüm is mogelijk in de intuïtie, of in de fysica in de aanschouwing, maar *niet* in de logica.

[28]Eigenschappen van het continuüm, zoals die ook in de dissertatie gegeven worden, inclusief de vorming van het gesloten continuüm uit het open.

[29]Zie Brouwer 1907, pag. 11 voetnoot.

[30]Over Hilberts *Grundlagen M.A.:* niet aanschouwelijk, *dus* zonder waarde; dat wil dus zeggen, te formalistisch en zonder de intuïtie.

[31]Dus de lijn is bepaald door rationale punten *plus* de eis van continuïteit.

[32]Weliswaar doorgehaald, maar Brouwer beschouwt hier de vergelijking van het continuüm met de tweede getalklasse.

[33] Hier wordt het begrip keuzerij in feite al gebezigd, zonder het overigens zo te noemen.

[34]Pogingen tot benaderingen van de deelverzamelingen van c, het continuüm, door middel van benadering van elke decimaal, al dan niet met vrije keuze. De eerste poging is doorgehaald, de tweede is de vertakkingsmethode, die in de dissertatie terechtkwam.

[35]Merk op dat het enige 'andere' oneindige, naast ω, de machtigheid c is.

[36]Dit lijkt op de redenering van de onaffe afbeelding, waarbij de aftelbaar onaffe verzameling gelijkmachtig lijkt met de aftelbare. Immers het resultaat is altijd aftelbaar, dus 'al benaderende' blijft de afbeelding mogelijk.

[37]Het onderscheid tussen *exacte continuïteit* en *exacte discontinuïteit.*

[38]In dit stadium is er blijkbaar nog geen sprake van de onaffe machtigheid.

Wel is c toegevoegd als onvergelijkbare machtigheid.

[39]Het aftellen van ω op twee manieren:
– 'Gewoon', is doortellen en aldus ω opbouwen,
– gebruik maken van het eindige getal, dat ik al heb; dat is de vertakkingsmethode, waarbij η gegenereerd wordt.

[40]Dit is de eerste methode van de vorming van verzamelingen: 'in afwisseling of onderschikking', en dan welgeordende stukken samentrekken tot één punt (zie de dissertatie pag. 63, 64). Dit geeft de 'überall dichte schaal'.

[41]Dit betreft Bernsteins lange artikel (38 pagina's) *Untersuchungen aus der Mengenlehre.* De betreffende pagina 144 is een deel van § 9, waarin een tweede bewijs van de stelling uit § 6 gegeven wordt: *das Kontinuum ist äquivalent der Gesamtheit O aller Ordnungstypen einfach geordneter Mengen erster Mächtigkeit.*

[42]'Klein Prinzipien' is Brouwers afkorting voor het werk van Felix Klein *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien.*

[43]Op pagina 209 begint boek II *Freie Geometrie,* Het eerste hoofdstuk is *Präcisionstheoretische Betrachtungen zur ebenen Geometrie.* De behandeling der Freie Geometrie wordt onderverdeeld in *Präcisionsmathematische Betrachtungen* en *Apbroximationsmathematische Betrachtungen.*
Hierbij aansluitend aan de *Ideeenbildung der analytischen Geometrie.* Hier staat exact het citaat over analytische en synthetische meetkunde.

[44]Op deze pagina 212 gaat het over verzamelingen: aftelbaar, gesloten, dicht eindige vlakinhoud; dit is punt e) op die pagina, en daar gaat het (onleesbare) citaat in elk geval over:

> Man fragt weiter, ob die Mengen einen *endlichen Flächeninhalt* haben oder den Inhalt 0, d. h. ob der Limes der Gesamtsumme möglichst kleiner, die Punkte der Menge einschliessenden Kreise endlich ist oder null. Analog könnte men von einem Umfange einer Punktmenge sprechen. Sie sehen, es sind die lauter Begriffsbestimmungen, die an sich leicht aufzufassen sind, deren Würdigung und Verständnis aber erst aus der Beschäftigung an konkreten Beispielen erwächst.

[45]Hoogst waarschijnlijk is het onderstaande ook geschreven naar aanleiding van boek II van *Klein's Prinzipien.*

[46]Zie Grondslagen ven de meetkunde; Hilberts Festschrift, pagina 22. Axioma V.2 hieruit is het *Vollständigkeitsaxioma,* het volledigheidsaxioma van de meetkunde, dat stelt dat er met de gedefinieerde begrippen geen uitbreiding van de meetkunde meer mogelijk is.

[47]Vanaf pag. 233 van Klein's 'Prinzipien' (zie voetnoot VIII–27 voor de volledige

titel) gaat het over krommen; vanaf pag. 257 over ideaalkrommen en vanaf pag. 260 over de *voorstelbaarheid van ideaalkrommen.*
Het begrip *ideaalkromme* staat tegenover dat van *empirische kromme.* Aan elke empirisch kromme wordt een ideaalkromme 'hinzugedacht'. De ideaalkromme wordt dan wiskundig behandeld en beheerst.

[48]De psychologen om de empirische kromme en de ideaalkromme verenigbaar te maken.

[49]Bij de analytische kromme bepaalt een klein stukje de hele kromme, aldus Klein. Volgens Brouwer zal dat nog wel bij meer krommen het geval zijn.

[50]De analytische meetkunde berustte op het getalbegrip. Wil men geometrie zonder getalbegrip definiëren, dan moet er een axioma bij dat in de tekst gesteld wordt.

[51]Tot en met pag. 53 worden axioma's behandeld.

[52]Het artikel *Über die Grundlagen der Geometrie II.* Het eerste deel, zonder nummeraanduiding, staat ook in deze aflevering van het *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung.* Het is een reactie op Hilberts *Festschrift.*

[53]Frege stelt dat er eerst begrippen gedefinieerd moeten worden, om daarna axioma's te stellen, waarin dan geen ongedefinieerde begrippen mogen voorkomen. Hilbert geeft, als formalist, axioma's waarin ongedefinieerde begrippen gebezigd worden, die dan door de axioma's zelf bepaald worden. Op pag. 370 en 374 wordt dit het duidelijkst direct gesteld; op de tussenliggende pagina's worden tegenargumenten en tegenvoorbeelden gegeven.

[54]Dus bij Hilbert is er niets intuïtief duidelijk. Axioma's zijn hier niet direct evident duidelijk, omdat de daarin gebezigde begrippen niet tevoren bepaald zijn.

[55]Bolland, invloedrijk hoogleraar filosofie te Leiden, gaf in 1904 gastcolleges in Amsterdam, welke medegeorganiseerd en bijgewoond werden door Brouwer.

[56]Frege gaat nu aan de hand van godsbewijzen en priemgetallen de onjuistheid van Hilberts methode aangeven.
'2 is een priemgetal':
'2' is subject, bepaald; *gesättigt,* eigennaam.
'is een priemgetal' behoeft een vervollediging, *niet gesättigt,* begrip, mag geen definitie zijn.
Dit uiteenvallen in een gesättigt en een ungesättigt deel is een *logische Urerscheinung;* zie Brouwers commentaar in de tekst.

[57]Echter, volgens Brouwer kan men net zo goed zeggen, dat alleen het predikaat directe betekenis heeft, en het subject alleen in afhankelijkheid van het predikaat daar is.

[58] *Onafhankelijkheid,* (hoofdstuk II (pag 25) Van Hilberts *Festschrift).* Axioma's zijn volledig of niet; in het laatste geval zijn er meer bouwsels mogelijk.

[59] Couturat behandelt op de genoemde plaats in zijn *Les Principes des Mathématiques* postulaten voor de *Théorie des grandeurs extensives,* en concludeert op pag. 120 dat er maar één ruimte van grootheden is, die aan de axioma's voldoet: de reële getallen. Dus het gebouw is volledig, er is geen tweede mogelijk.

[60] *Widerspruchslosigkeit,* (hoofdstuk II van Hilberts *Festschrift*). Dit is volgens Brouwer alleen te constateren aan het resulterende gebouw, dus axioma's op zichzelf mogen nooit 'grond van de wetenschap' zijn.

[61] Frege, *Jahresbericht* 12. Het axiomatisch werk van Hilbert leert ons niets ontologisch. Brouwer is het hier met Frege eens. Bij bijvoorbeeld *lijn* moet er altijd bij *lijn uit meetkunde A;* het woord *lijn* sec is niet voldoende.

[62] N.B.: In *Jahresbericht* X komt Korselt niet voor, wel in in XII (1903), p. 402, en in XIV (1905) in het artikel *Über die Grundlagen der Geometrie*

[63] In *l'Enseignement Mathématique* verscheen de Franse vertaling van Hilberts 'Heidelberg lezing'. Zie bv. voetnoten bij VI–35, VIII–18 of VIII–20.

[64] Over het bewijs, dat $\overline{T} > \overline{\varpi}$ (T is de tweede getalklasse). Dit vooronderstelt een vorm van aftelling en uitdrukkingsmogelijkheid van *alle* elementen van c. En dat bestaat niet.

[65] Eén paragraaf potentiaaltheorie.

[66] Hier stelt Brouwer expliciet dat er niet over de tweede getalklasse gesproken kan worden. Slechts in de zin van de tweede getalklasse als logische entiteit kan er alleen in negatieve zin iets over gezegd worden. Zie de dissertatie pag. 147.

[67] Felix Bernstein *Untersuchungen aus der Mengenlehre* M.A. 61 Brouwer zegt hier niet *bestaat niet,* maar: *is niet aangetoond.*

[68] Pag. 309 – 317 van Kleins *Prinzipien* bespreekt eigenschappen van niet-analytische krommen.

[69] *Onbekende* irrationale getallen kunnen opgevat worden als limiet van 'onbekende reeksen'. Hier kan men keuzerijen in zien.
Stetigkeit moet dan als postulaat ingevoerd worden om bewerkingen te kunnen uitvoeren.

[70] Op deze en de volgende pagina wordt mathematische fysica en variatierekening besproken.

[71] Dit is *Serge Bernstein* (en niet Felix). Het artikel is *Sur la déformation des surfaces.*

[72]Couturat *Les principes des mathématiques,* hoofdstuk IV *Le continu.* Het citaat is de laatste zin van § A *Définition du nombre irrationel.* Het is, zoals vaker het geval is in Brouwer aantekeningen, geen letterlijk citaat.

[73]De überall dichte schaal is op te bouwen (rationaal duaal plus de samentrekkingsoperatie).
De onbekende irrationale punten zijn hier principieel van gescheiden. Zie VIII-38.

[74]Couturat, *Les principes,* § B, *définition du continu,* over ϑ, het ordetype van het lineair continuüm; dit is een perfecte verzameling, en bevat een aftelbare verzameling E, zodanig dat tussen elke twee elementen van ϑ minstens één element van E zit. E heeft dan het ordetype η.

[75]De definitie van Couturat van een perfecte verzameling is, dat in een dergelijke verzameling elke fundamentaalreeks een limiet heeft. Brouwer brengt hier zijn bekende bezwaren in: ik kan niet spreken van *elke* fundamentaalreeks. *Elke* is alleen te zeggen voor verzamelingen met geïndividualiseerde elementen.

[76]De ruimtevoorstelling bestaat krachtens het postulaat der oneindige meetbaarheid.
Het continuüm is daarvan de drager. Op deze en de volgende pagina's poogt Brouwer het continuüm te definiëren, dan wel te omschrijven.

[77]Schoenflies, *Bericht über die Mengenlehre,* Punt IV, bijna onderaan pag. 24. Schoenflies stelt: Die einfachste und bekannte Menge, deren Mächtigkeit grösser als c ist, ist die Menge F aller Funktionen einer reellen Variabelen. (De machtigheid hiervan is f.)
Schoenflies bewijst dan $f > c$, dat wil zeggen $\exists F_1 \subset F$ met $F_1 \sim C$, terwijl het omgekeerde niet geldt.

[78]Dit betreft Bernsteins artikel *Untersuchungen aus der Mengenlehre.* De generatie van c en de generatie van een getal der tweede getalklasse kan worden gecombineerd.

[79]De verzameling van alle stellingen is aftelbaar onaf. Dit doet ons denken aan de eerste onvolledigheidsstelling van Gödel. Voor het begrip 'aftelbaar onaf' en voor de relatie tussen deze opmerking van Brouwer en de eerste Gödel-stelling zie Kuiper *Ideas and Explorations; Brouwer's Road to Intuitionism* (dissertation), resp. p. 266 e.v. en p. 286, 287.

[80]Couturat, in *Les principes des mathématiques* bespreekt de axioma's van Burali–Forti op pag. 104 e.v. in het deel *Théorie des grandeurs extensives.*

De axioma's van Hilbert voor getallen en rekenkunde: zie Anhang IV bij het *Festschrift.*

[81]Brouwer zegt hier: rationale getallen zijn te definiëren uit de theorie der

gehele getallen, onafhankelijk van het continuüm, namelijk als getallenparen. Couturat zegt op pag. 115: Een geheel getal is te definiëren zonder het idee van maat of grootte. Andere getallen, dus ook de rationale, gaan uit van maat en grootte (grandeur).

[82]'alle typen van $\aleph_0$' zijn de getallen van de tweede getalklasse T.

[83]De verzameling van 'alle enkelvoudig geordende typen van machtigheid $\aleph_0$' is dus de totale tweede getalklasse. Dit is niet te denken, ondanks de constructie, die Bernstein voorstelt in zijn artikel *Untersuchungen aus der Mengenlehre*, M.A. 61.

[84]Dit is Brouwers kritiek op Bernstein.

[85]We zien hier het idee *onaf.* Brouwer noemt het hier c'.

[86]Hier zien wij ook Brouwers constructivistische instelling: de equivalentie stelling heeft alleen zin als de equivalentie echt is aan te geven.

[87]Waar las Brouwer Hardy? In de M.A. is er slechts één artikel dat in aanmerking zou komen, nl. *Some theorems concerning infinite series* (M.A. 64) uit 1907. Maar op pagina VIII–80 wordt verwezen naar een artikel van Hardy in de *Quarterly Journal of Mathematics* 1903, i.h.b. naar pag. 87 van dat artikel.

[88]Couturat onderscheidt *grandeurs intensives:* geen optelling, de ongelijkheidsrelatie is primitief en ondefinieerbaar (het intuïtief continuüm zonder schaal), en *grandeurs extensives:* de optelling is primitief en ondefinieerbaar, de ongelijkheidsrelatie volgt daaruit.

[89]Zie pag. 104 e.v. van *Théorie des grandeurs extensives.*

[90]De optelling van + en × volgens Coururat en Burali-Forti. Couturat werkt volgens het systeem Burali-Forti, zie de voetnoot op pagina 104 van zijn *Principes.*

[91]Brouwer prefereert duidelijk zijn eigen opbouw met behulp van groepen.

[92]Weer een niet letterlijk citaat, zoals wel vaker. *La définition permet d'établir leur existence.* Dit is niet voldoende voor een bestaansbewijs voor Brouwer.

[93]Couturat beschrijft deze methode in zijn hier besproken werk.

[94]'Unabhängigkeit', zie *Festschrift* hoofdstuk II.

[95]Hoofdstuk IV van Couturat's werk, § A *Les dimensions, Topologie.*
Over de definitie van een n–dimensionale ruimte uit een 0-dimensionale, volgens Riemann.
Volgens Couturat echter vooronderstelt de uitbreiding van dimensie met één die nieuwe dimensie al. Voor Brouwers commentaar, zie de tekst.

[96]Zie Hilberts *"Uber die Grundlagen der Geometrie* uit de Math. Annalen 56.

DeJordansche Kurve speelt hierin een belangrijke en fundamentele rol.

[97]Hierna volgen, door de rest van dit schrift heen, beschouwingen over de grondslagen van de meetkunde, te beginnen met op de eerste pagina's de boogelementen in de Riemannse en Minkowski meetkunde.

[98]Frischauf, *Elemente der absolute Geometrie.*

[99]Dit gaat waarschijnklijk over colleges, die Brouwer bij Mannoury gevolgd heeft, of over de *Handelingen van het achtste Natuur- en Geneeskundig Congres.*
'Hegelen' in een nieuw 'Brouwers' werkwoord, wat waarschijnlijk slaat op Hegels manier van redeneren, met these, antithese etc.

[100]Couturat, *Les principes des mathématiques,* pag. 147 Projectieve meetkunde (Hoofdstuk VI), § B geeft 21 axioma's.
Vahlen, *Abstrakte Geometrie,* Hoofdstuk II en III, in het bijzonder hst. III over Anordnung.

[101]In de logica zijn alleen negatieve beweringen bewijsbaar; zie de dissertatie, pag. 147.

[102]Over de projectieve meetkunde; de dualiteit daarvan tussen *punt* en *vlak,* die verwisselbaar zijn in adequaat geformuleerde stellingen, evenals *lijn* en hun relaties.

[103]Hier geeft Couturat een 'définition purement logique de l'espace projectif', die, volgens een voetnoot, ook bij Russell te vinden is.
Brouwer heeft hier kritiek op.

[104]Over het 'opbouwen' in de wiskunde, op deze en de volgende pagina.

[105]Vanaf Couturat, pagina's 159 tot 180 de *géométrie descriptive.*

[106]Gegeven een vlak p en een punt a buiten p. Neem een punt b op de verlenging van een lijn die a met p verbindt. Dan geldt voor een willekeurig punt x: òf x ligt in p, òf ax snijdt p, òf bx snijdt p.
Brouwer zegt dat het analoge tweedimensionale geval uit de axioma's 13 en 14 volgt.

[107]Axioma 13: Laat a, b en c drie niet–collineaire punten zijn, en laat d een punt zijn tussen b en c, en e een punt tussen a en d, dan snijdt de verlenging van bc die van ac.

[108]Zie Vahlens *Abstrakte Geometrie,* stelling 112 van hoofdstuk IV (pagina 150).

[109]Hilbert in M.A. 57: *Neue Begründung der Bolyai–Lobatschefskyschen Geometrie,* naar aanleiding van zijn *Festschrift met axioma's voor de Euclidische Geometrie. De definitie op pagina 160 (uitgave 1909) bepaalt het begrip Ende*

en § 2 definieert de *Endenrechnung.*
Schur in M.A. 55: *Über die Grundlagen der Geometrie.* Postulaat 2 van de projectieve meetkunde definieert het begrip *Strecke,* § 3 handelt *über das Rechnen mit projektiven Strecken.*

[110]Hilbert M.A. 57. Zie § 2, pag. 169 over optelling, § 1 over spiegeling, voor de definitie van *spiegelbeeld* pag. 161.

[111]*Gleichung des Punktes* is de titel van § 4, pag. 173 van zijn artikel in M.A. 57.

[112]Klein, M.A. 55: *Auszug aus den Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901.*
De opgave, die de faculteit stelde, ging over continuïteit bij de behandeling van fysische vragen. Men nam deze continuïteit gewoon aan; zelfs differentieerbaarheid nam men aan.

[113]Poincaré hierover: zie *La Science et l'Hypothèse* op diverse plaatsen; over het begrip *massa* in het zesde hoofdstuk over de klassieke mechanica.

[114]Dit is (wederom niet helemaal letterlijk) de laatste zin van het artikel van Klein *Auszug aus dem Gutachten der Göttinger philosophischen Fakultät betreffend die Beneke-Preisaufgabe für 1901*: 'Mathematik lässt sich nur durch konzentriertes Studium erlernen, es gibt bei ihr kein Königsweg'. Het begrip 'Königsweg' komt uit het Oude Testament van de bijbel, Numeri 20, vs. 17: 'Laat ons toch door Uw land trekken (...) den koninklijken weg zullen wij gaan, zonder naar rechts of naar links af te wijken, totdat wij Uw gebied zullen zijn doortrokken'.

[115]Schur, *Über die Grundlagen der Geometrie.*
In § 2 wordt een drie-dimensionale projectieve ruimte gedefinieerd en worden er daarvoor axioma's gegeven. Axioma 9 zegt: hierbuiten liggen geen punten.
Stelling 6 geeft dan Desargues en stelling 7 geeft Pappus in R_3.

[116]Hilbert geeft eerst een overzicht van de methode van Lie met zijn benadering van differentieerbaarheid van de de groepen definiërende functies. Dit is geometrisch gecompliceerd.
Hilberts benadering berust ook op groepen, maar overzichtelijk geometrisch.
Brouwers commentaar hierbij: Logische wetten toepassen bij de opbouw mag, maar de logica an sich leert ons niets nieuws.

[117]Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie,* Anhang IV bij zijn *Festschrift,* de laatste paragraaf; het begin stelt: er moeten twee gevallen onderscheiden worden, ten eerste, door een gegeven punt, niet op een lijn, gaat slechts één lijn evenwijdig aan de gegeven lijn. Het klassieke axioma dus. Ten tweede neemt hij daarna aan dat door dat punt twee half-lijnen gaan, evenwijdig aan de gegeven lijn, die samen niet één lijn vormen.
V.w.b. 'Vahlen, pag. 181 § 33': dit is § 33 van het vijfde hoofdstuk van *Abstrakte*

Geometrie (in de 1940-uitgave is dit op pag. 177), waar hij zegt:

> Satz: Ist A' auf S' gegeben, so gibt es zu jeder geraden Figur $ABC...P$, genau zwei kongruente Figuren $A'B'C'...P'$ auf der Geraden S'.

[118]Hilbert, *l'Enseignements Mathématique*7 betreft de Franse vertaling van zijn 'Heidelber lezing', zie voetnoot bij VIII–33 voor verdere verwijzingen.

[119]Inductie is niet: als ..., dan geldt het beweerde voor alle n, maar: de operatie kan steeds herhaald worden. We moeten het dus als iets *onafs* zien.
Inductie is dan ook bij Brouwer geen axioma of principe, maar een normale wiskundige praktijk.

[120]De 'Heidelberg lezing' uit 1904: *Über die Gundlagen der Logik und der Arithmetik,* als bijlage 7 bij het *Festschrift* opgenomen. Gezien vorige verwijzingen in zijn aantekenschriften heeft Brouwer de Franse vertaling uit *l'Enseignement Mathématique* gelezen.

[121]Hoe Hilbert de Russell paradox vermijdt; zie de Heidelberg lezing onder II: alleen gedefinieerde begrippen gebruiken als er over *alle* of over *elk* gesproken wordt.

[122]De opbouw van Hilbert versus de intuïtie van Brouwer; zie de Heidelber lezing over Hilberts opbouw.

[123]Brouwer schetst hier hoe Hilbert in de Heidelberg lezing de logica en de rekenkunde wil opbouwen, maar in feite slechts een tekensysteem daarvoor opbouwt.

[124]Wederom de prioriteit van *eerst* de wiskunde en *dan pas* de logica als gevolg en als resultaat van de wiskunde; de logica is dan ook nergens anders toepasbaar.

[125]Over continue functies in de natuur: denkbaar als kansenrij van c.
Zie Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* hoofdstuk 9 *Les Hypothèses en Physique,* pagina 181 *Origine de la physique mathématique* en hoofdstuk 11 *Le calcul des probabilités dans les sciences physiques.*

[126]Over de mathematische fysica naar aanleiding van Poincaré, *La Science et l'Hypothèse,* op deze en de volgende pagina's. Een algemene beschouwing over de ruimte en haar dimensies.

[127]Zo ook de niet-differentieerbare potentiaalfunctie van Hilbert wordt weer differentieerbaar dankzij de kleine electron lading.

[128]Schur, M.A. 39 *Über die Einführung der sogenannten idealen Elementen in der projektiven Geometrie,* over de invoering van het ideale punt en het elliptische vlak.

[129]Zie Russells *Fondements de la Géometrie,* hoofdstuk III, § 103.

[130]Zie bv. Freudenthal, *Neue Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems.*

[131]De groepentheoretische benadering van de definiëring van de punten op het continuüm. Deze methode zien we terug in de dissertatie op pag. 74 t/m 78. De tekst in dit schrift is duidelijk een voorbereiding daarop. Hier wordt nergens geciteerd uit het werk van anderen, het is Brouwers eigen creatie.

[132]D.w.z. aan de voorwaarde voor de kromme $y = f(x)$, zoals gesteld in de laatste vergelijking vóór de kantlijntoevoeging onderaan de vorige pagina 77

[133]Dit is het einde van de eigen uitwerking van Brouwer, zoals verschenen in zijn dissertatie. Het resultaat: de rekenkundige bewerkingen zijn topt verschuivingsoperaties teruggebracht.

[134]Over differentieerbaarheid in de natuur, naar aanleiding van het werk van Poincaré.

Chapter 9

Schrift IX

De bestrijding van Hilbert door Poincaré ⟨Revue de Metaph. Jan. 1906,⟩ dat hij eigenlijk inductie toepast, als hij aantoont, dat zijn axioma's *niet* contradictoor zijn, is niet ⟨sterk genoeg.⟩ Hilbert gebruikt niet het domein der inductie, maar van een domein eener 2-1-relatie, hoe groot ook.⟩⟨1⟩ Wat Hilbert bewijst, geldt niet alleen voor ω, maar ook voor ζ (tweede getalklasse). Hij springt niet van een vorige op een volgende; maar van een willekeurig tweetal op een derde.[1] **IX-1**

. . . .

(Hierna volgt een lange doorhaling, die onderaan de pagina in verbeterde vorm staat weergegeven.

⟦1. Wiskundig bekijken der wereld = Wiskunde = W.

2. Verstandhuding over ⟨zelfopgebouwde⟩ Wiskunde = Wiskundige ⟨begeleidende⟩ taal = $W.t.$

3. Wiskundig bekijken der wiskundige taal = 2^e Wiskunde = ${}^2W$ (Peano, Hilbert)

⟨Men ziet dan niets, dan logische gebouwen, maar relaties ook.*(?)*⟩

4. Verstanhouding over 2^e Wiskunde = ^{2}Wiskundige begeleidende taal = ${}^2W.t.$

(bij ⟨Hilbert⟩ Peano beschrijvend)

(kantlijn:) ⟨Wiskundige natuurbeschrijving zonder hypothese, d.i. zelfbouwing met wisk. principes⟩

5. Wiskundig bekijken van ${}^2W.t.$= ${}^3W$

(De Hilbertsche replâtrage)

6. Verstandhouding over ${}^3W$ = ${}^3W.t.$

⟨1⟩De bestrijding van Hilbert door Poincaré ⟨Revue de Metaph. Jan. 1906,⟩ dat hij eigenlijk inductie toepast, als hij aantoont, dat zijn axioma's *niet* contradictoor zijn, is niet ⟦geheel juist. Hilbert bewijst het voor een willekeuri...

(V in Hilbert Ens,. 7.2; begeleidend de replâtrage, onbewijzend de vrijheid van contradictie van $^3W.t.$

1. Leeft in de heele wiskunde.
2. Hier komen voor logische figuren, axioma's ⟨ook over 'eindig getal' en 'n'⟩ en: ...*(?)* inductieve hoeveelheden ⟨toch nog⟩ en actie eindige getallen.
3. Leeft in de logische figuren en eindige getallen, en inductie.

(De inductie alleen bij H.: ...*(?)* , die wil *bewijzen*)

4. Hier komen voor logische figuren, eindige getallen.
5. Wiskunjdig bekijken der logistiek, en er wiskundig intuitief ⟨d.i. int.⟩ over redeneeren. (Hilbert) = ^3W.
6. Verstandhouding over ^3W; de taal van Hilbert in Ens. 7.[2]⟧

(einde van deze lange doorhaling, Brouwer's verbetering volgt hieronder)

1.) Wisk. bekijken der wereld.[3]

2.) De wereld wiskundig nábouwen. ⟨n.b. Nábouwen, d.i. onderbrengen van de verschillende wiskundig geziene deelen, in één enkel, zelf opgebouwd wisk. systeem.)

3.) De taalparallel van de bouw-pogingen (Satz vom Widerspruch).

4.) Wisk. bekijken van 3. (Peano; axiomas ⟨ook logische, waarmee machinaal wordt gewerkt,⟩ ⟨geen inductie⟩ ook Hilbert). En als men een taal wisk. bekijkt, ziet hij er uit als een logisch-wiskundige constructie.

5.) Nábouwen van 4. Dan is noodig het bewijs der samenrijmbaarheid: hier inductie (Hilbert)

6.) Wiskundig zien van de Hilbertsche bouw-pogingen, die door de Satz vom Widerspr. geleid worden, en voeren tot den nábouw van 4.

Bij dit zien is weer geen inductie, geen hypoth. tot zelf-nábouwing.

7.) Nábouwen van 6. Hier is weer noodig het bewijs der samenrijmbaarheid, dus ⟨levende⟩ inductie. (Hilbert Ens. 7,2 onder V).[4]

Woorden als 'verscheidene'; 'oneindige reeks' worden nu als symbolen gezien; die aan axioma's voldoen.

Men zou nog ⟨moeten⟩ invoegen:

5a.) Taalparallel van 5 (bouw-onmacht wordt: Satz vom Widerspruch). Hier komen de woorden 'plusieurs' en 'infini'; in 5 waren niets daarvan, wel de *daad* van inductie.

....

IX-2 De taal *is* niet logisch, maar een verstandhouding door klanken in grof-materieele dingen, door gewoonte gevormd.[5] Nu bestaan er toevallig in de taal niet alleen wiskundige *termen* ⟨b.v. '40',⟩[⟨2⟩] die in 't dag. leven overal noodig zijn, om de verstandhouding samen te houden, maar ook wisk. redeneeringen in

[⟨2⟩] Nu ⟦leent zij zich bij⟧ bestaan er toevallig in de taal niet alleen wiskundige *termen* b.v. '40', de boeken, die wiskundige bouwpogingen begeleiden, en merken, dat sommige bouwingen *niet* mogelijk zijn. Voor wie nu die taal wiskundig bekijkt, schijnt, dat zij uit axioma's logisch afleidt (wie die taal bekijkt, ziet wiskundige figuren, die hij *logische* figuren noemt) onmogelijkheid van andere relaties. Maar de spreker nam geen axioma's aan;[⟨3⟩] hij ging uit van enkele direct te construeeren en te overziene gebouwen, en merkte, dat verdere constructies soms stuiten. De logische figuren komen, door de onvolkomenheid der taal, die het teekenen door spreken moet trachten te verhelpen

De taal kan zijn allerlei [beschrijvend in mijn geval; ik bouw geen systeem op, maar tracht ⟨de menschen⟩ te suggereeren tot herinnering, die in ondoordachtheid vergeten was / ook gebiedend] ook o.a. begeleidend het zoekend trachten te bouwen voor een stuk werkelijkheid een wisk. systeem *) ⟨tot verstanhouding en richting van eigen daden,⟩ physische hypothesen zoeken; ook tellen van een bak erwten.

*) *(kantl.:)* ⟨redeneeringen of we wel eenvoudigheid en niet-contradictoriteit hebben.⟩

. . . .

Maar het is onzin, je eigen taal ⟨wiskundig⟩ te bekijken; dat doe je alleen **IX-3**
het ándere, waartegen je vechten moet. En de *constructie* der taal van ánderen te bekijken, is ook onzin; want ⟨die constructie heeft met⟩ zijn gedachten niet te maken;[⟨4⟩] en is in elk geval juist het gemeenschappelijke (en niet vijandige) ten opz. van jezelf.

. . . .

Hilbert kan zich dus in Ens. 7,2. nooit aan de inductie onttrekken; maar aan het continuum schijnt het hem gelukt te zijn. (behalve natuurlijk, dat toch elke 'zin' weer uit een Existentiebewijs moet blijken).[6]

. . . .

De figuren der klassieke logica komen bij den wiskundigen na–bouw der wereld voor, echter niet in de eerste plaats; een veel belangrijker rol vervullen zij bij het wiskundig bekijken der taal, n.l. der wiskundige taal.

. . . .

Als min. eigenschap voor het pl. vlak door 3 punten zou b.v. te nemen zijn:[7] het minimum oppervlak *) binnen een convexe (een intrinsieke eig. v.d. kromme) kromme door de 3 punten.

[⟨3⟩] Maar ⟦dat leverde *(?)*⟧ de spreker nam geen axioma's aan;

[⟨4⟩] want ⟦zijn taal zijn⟧ zijn gedachten niet te maken;

$$*)\ \textit{(kantl.:)}\ \langle \int dO \text{ of } \int f \begin{pmatrix} x,y,z \\ \\ p,q \end{pmatrix} dO \text{ of } \int f \begin{pmatrix} xyz \\ \\ pq \end{pmatrix} dxdy \rangle$$

. . . .

Zijn dan bij de geometrieën van Hamel misschien de platte vlakken ook van zelf minimum-oppervlakken?⟨5⟩ [8]

. . . .

IX-4 Een krommenstelsel heeft altijd een karakt. diff. vgl., is dus ook altijd als opl. van een variatieprobleem te beschouwen.[9]

. . . .

[De wiskunde is niet zoo erg uitgebreid; hoe verder je komt, des te overzichtelijker en beknopter wordt alles.]

. . . .

De *zuivere* uniciteitsopbouw (d.i. onafh. van differentieerbaarheid) heb ik van de optel- en verm. groep gegeven.

Van de complexe groep zal wel lastiger zijn, want die omvat nog meer dan de Hilbertsche planaire bewegingsgroep, waar het al lastig genoeg wordt.

Lie's uniciteitsbewijzen berusten op differentieerbaarheid; zijn Grundlagen leveren ⟨ook⟩ voor 't platte vlak ⟨nog iets⟩ nieuws, ⟨nadat⟩ hij te voren al eens *alle* groepen v.h. platte vlak opgesomd heeft; immers hij moest dan toch nog al die groepen op hun realiteits⟨gedrag⟩ onderzoeken.⟨6⟩

. . . .

(doorgehaald:) ⟦De proj. groep der lijn is als een–eenduidige groep niet continu.⟧

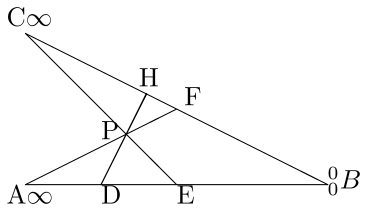
. . . .

(Klein, Nicht–Eukl. I p. 319)[10] ⟨Eerst is te bewijzen (Math. Ann.), dat geen puntvrije intervallen overblijven.⟩ Uit de transform. formule $\frac{ax+b}{cx+d}$ volgt ⟨dan,⟩ hoe elk punt op de r. lijn als som van andere punten is te beschouwen (mengmeetkunde). **IX-5** En uit het door projectie ∥ invar. blijven der harmon. betrekkingen volgt ook vanzelf, dat de dubbelverhoudingen (de 'ingevoerde' getallen) onveranderd blijven bij projectie. Deze invariabiliteit der ingevoerde getallen is

⟨5⟩ Zijn dan bij de ⟦minimum⟧ geometrieën van Hamel misschien de platte vlakken ook van zelf minimum-oppervlakken?

⟨6⟩ Lie's uniciteitsbewijzen berusten op differentieerbaarheid; zijn Grundlagen leveren ⟦dus⟧ voor 't platte vlak ⟦niets⟧ nieuws, ⟦immers⟧ te voren ⟦heeft hij⟧ al eens *alle* groepen v.h. platte vlak opgesomd heeft; immers hij moest dan toch nog al die groepen op hun realiteits⟦-verhoudin⟧ onderzoeken.

op zichzelf niet voldoende, om de lineaire vgl. voor de rechte lijn te bewijzen (immers ook elke ‘functie’ van de dubbelverhouding blijft bij projectie invariant ⟨dus we zouden alleen kunnen besluiten: $AFPQ = f(BFPQ, ABPQ)$;⟩ men moet er bij nemen de transformatieformule. Dan gaat het echter vanzelf, aldus: *)



DH zij de lijn, en we nemen als coördin. de y van de proj. uit A tusschen C en B en de x van de proj. uit C tusschen A en B. Dan is:

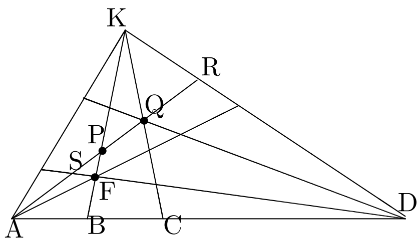
$$\frac{y_H}{y_P} = FHCB = \frac{CHFB}{CHFB - 1} = \frac{EDAB}{EDAB - 1} = \frac{\frac{x_D}{x_P}}{\frac{x_D}{x_P} - 1}$$

of korter:

$$\frac{y_P}{y_H} = HFCB = 1 - HCFB = 1 - DEAB = 1 - \frac{x_P}{x_D},$$

waarmee de lineire vgl. voor x_p en y_p is uitgeschreven.

*) *(kantlijn:)* ⟨vooraf denk bewezen, dat de 3^{de} coördinaat altijd het quotient der beide eerste is (de coörd. op de 3^e zijde n.l. dat van die op de 2 eerste zijden.



Q punt; *F fund. punt*
$x_1 = (QPAR)$ $\qquad x_2 = (QSAR)$
$\frac{x_2}{x_1} = (PSAR) = (PFBK) = x_3$⟩

. . . .

[Projectiviteit *met* dubbelelementen kan zijn tegengesteld of gelijk gericht (al naarmate de beide segmenten worden verwisseld of niet.) Proj. *zonder* dubbelelementen is altijd gelijk gericht.]

. . . .

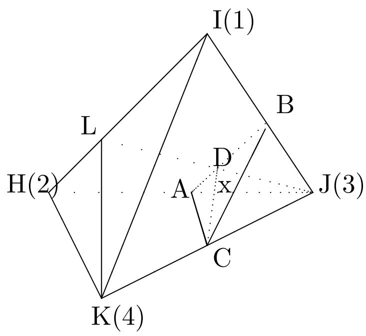
IX-6 *Oneindig* heeft geen anderen wiskundigen zin, dan arith- ‖ metisch, als ω. Spreken we van oneindig klein, dan bedoelen we het ω^{de} segment van de (tegelijk met de groep) geconstrueerde schaal.

. . . .

Bij het construeeren van die ⟨optelgroep⟩ overigens voer ik alleen *voorwaarden* voor de groep in;⟨7⟩ maar weet ik ooit, of ik werkelijk volledig een groep krijg? Ja, want zoover ik het zou kunnen contrôleren met een ontelbaar onaf systeem van schalen, wordt aan de groepeigenschap voldaan.

⟨Ik weet, dat den optelgroep, die uitgaat v.d. üb. dichte schaal, een groep is; en merk nu, dat een andere groep dezelfde constructie moet hebben.⟩

. . . .



Ook voor de R_3 is ⟨nu⟩ licht te bewijzen, dat het pl. vlak een lineaire vgl. heeft (vgl. vorige pag.)⟨8⟩

(We denken vooraf bewezen, dat werkelijk de coördinaten op de *zes* ribben uit de verhoudingen van 4 getallen, dus uit 3 der zes volgen)

Projecteer P uit K in S op LJ en uit L in T op KJ.

$$\text{Dan volgens vorige pag.:} \qquad DSLJ = 1 - \frac{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_C}$$

$$\text{Maar} \qquad DSLJ = \frac{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_D} = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P \times \left(\frac{x_3}{x_2}\right)_D$$

⟨7⟩Bij het construeeren van die ⟦groep⟧ overigens voer ik alleen *voorwaarden* voor de groep in;

⟨8⟩Ook voor de R_3 is ⟨nu⟩ licht te bewijzen, dat het pl. vlak een lineaire vgl. heeft (vgl. vorige pag.)
⟦Immers vooreerst het platte vlak KJL heeft de vgl. $\frac{x_1}{x_2} = c$⟧

Nu hebben we: $\left(\dfrac{x_3}{x_2}\right)_D = a+b\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)_D$ (volgens vorige pag.) $= a+b\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)_P$

$$\text{Dus:}\quad \left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P \times \left\{a+b\left(\frac{x_1}{x_2}\right)_P\right\} = 1 - \frac{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P}{\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_C} = 1 - c\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P$$

$$a\left(\frac{x_2}{x_3}\right)_P + b\left(\frac{x_1}{x_3}\right)_P = 1 - c\left(\frac{x_4}{x_3}\right)_P \qquad \text{q.e.d.}$$

....

Van de opvatting der wiskunde als 'bouw tot den levensstrijd' is natuurlijk de Kantsche aprioriteit slechts een bijzonder geval. **IX-7**

....

Wat nog niet gedaan is in de litteratuur, is de Mengentheoretische constructie der 'Nicht- Pascalsche Geometrie'.[11]

....

Men kan de Hilbertsche 'Grundlagen Festschrift' beschouwen als het einde van de discussie over de projektiven Fund. Satz, begonnen door Klein in Math. Ann. 6.[12]

....

En dit geheel is een ondergeschikte quaestie, die alleen zoo grooten omvang heeft aangenomen, omdat men de wiskunde axiomatisch in plaats van vrij bouwend begon. ⟨Men lette op het logisch substraat van het bouwen, in plaats van op het bouwen zelf.⟩

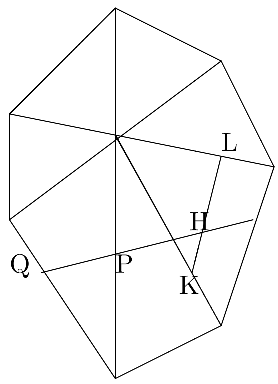
De niet-Pascalsche meetkunde krijgt pas licht, als ze Mengentheoretisch is opgebouwd, maar dan spreken haar wetten ook vanzelf; en, zoo min als de quaternionen, heeft ze dan wat aan de axiomatische grondslagenstudies te danken.

....

De Strecken-rechnung in Hilbert-Festschrift is niet een van metrische Strecken (voor de Eukl. meetk. komt ze er toevallig mee overeen), maar van Würfen. Ze is precies dezelfde als zijn Endenrechnung in Begründung der Bol.-Lob.-Geometrie.[13]

....

In het axioma van Lobatchewski is direct geimpliceerd, dat de grenspunten van de r. lijnen door O een convex ovaal vormen. Maar dan kan niet van PQ: P al een grenspunt zijn (binnen het ovaal n.l.) zoodat H een oneigenlijk punt was; **IX-8**



immers H ligt op het eigenlijke gebied van de verbindingslijn der zeker eigenlijke punten K en L.⟨9⟩

Hiermee is bewezen, dat een snijpunt van 2 lijnen steeds voor beide tegelijk grenspunt is.

. . . .

Of Verknüpfungsaxiome zonder Anordnungsaxiome bestaan kunnen, wordt nergens onderzocht. (cf. VIII 5-5)

. . . .

Het bewijs Schoenflies Bericht ⟨p.46 is onvolledig.⟩⟨10⟩

Noemen we E de klasse, waartoe we komen door vanuit $1, 2, \ldots \omega$ telkens de beide Erzeugungsprinzipien toe te passen, en Z de tweede getalklasse, dan wil Schoenflies bewijzen, dat elk getal van Z ook tot E hoort. Hij bewijst echter slechts, dat elk getal van Z, (zonder laatste element n.l.) grenselement van een fund. reeks van getallen Z is. (maar niet van getallen E;[14] Cantor wou dat laatste ook in de Grundlagen, maar in de Begründung heeft hij zich
IX-9 voorzichtiger ‖ uitgedrukt.)

Verder bedenke men, dat men de getallen ψ niet behoeft te kunnen aangeven, zoodat het beschouwde getal niet grenselement van een 'eindig aangeefbare' fund. reeks behoeft te zijn, maar in 't algemeen van een oneindig voortloopende.

⟨Maar mijn redeneering gaat niet op; Z kent geen oneindige reeksen; een reeks klimmende termen wordt steeds vervangen door haar grenselement. Ik *versta* dus onder Z: E, en Schoenflies' bewijs is goed⟩

⟨9⟩ immers H ligt op het eigenlijke gebied van de ⟦eigenlijke⟧ verbindingslijn der zeker eigenlijke punten K en L.

⟨10⟩ Het bewijs Schoenflies Bericht ⟦dient als volgt aangevuld: Voor ψ nemen we een getal der 2^{de} getalklasse ⟨d.w.z. dat uit de beide Erzeugungsprinzipien kan worden gevormd⟩ Stel nu ψ_2 was groter dan de 2^{de} getalklasse⟧

. . . .

De niet-Archimedische reeks van Vahlen of Hilbert is *niet* perfect, immers niet abgeschlossen, want de reeks
$0,9x + x^2 \quad 0,99x + x^2 \ldots\ldots 0,999...x + x^2$
heeft *geen grenselement.* (vgl. de defin. daarvan Schoenflies Bericht p. 31 § 4)[15]

. . . .

(Edinburg Review 63 p. 274 r. 11v.o.) 'Mathematics can be applied to objects of experiece only in so far as they are measurable; that is, in so far as they come, or 'are supposed to come', under the categories of extension and number'.

. . . .

Uittreksel rechte lijn als kortste (met 'sterke Monodromie-axiom'.)[16]

$$\text{Diff. vgl. } \frac{d^2g}{dpdx} + p\frac{d^2g}{dpdy} - \frac{dg}{dy} = 0 \qquad \text{Stel } gdx = fds$$

$$g = \int_c^p \int_c^p W(p, y - px)dpdp + \frac{\partial u(xy)}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y}$$

Nu is echter $\displaystyle\int_c^p \int_c^p V(p)dpdp = \int_c^p (p{-}\xi)v(\xi)d\xi.$ Stel verder $W = \cos^2\vartheta.W(?)$

Dan komt ⟨voor g⟩: $\displaystyle\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \cos\tau W(\mathrm{tg}\tau, y - x\mathrm{tg}\tau)(\mathrm{tg}\vartheta - \mathrm{tg}\tau)d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{tg}\vartheta\frac{\partial u}{\partial y}$

$$g = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{1}{\cos\vartheta}\sin(\vartheta - \tau).W.d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{tg}\vartheta.\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$f = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)w.d\tau + \frac{\partial u}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\vartheta.$$

Als voorwaarde voor werkelijk minimum komt dan: **IX-10**
W pos. voor alle x, y en ϑ,
en het sterke monodromie-axioma geeft:
a) eenduidigheid van W
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \sin\tau.wd\tau$
$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{r}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \cos\tau.wd\tau$
Zoo wordt het boogelement ten slotte:
$\frac{ds}{2}\int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)W(\mathrm{tg}\tau, y - x\mathrm{tg}\tau)d\tau$
Stel boogelement alleen afh. van τ, zonder monodromie-axioma, dan komt Arch*(??)*curve

$$1 = r\left\{\int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)W(\tau)d\tau + \alpha\cos\vartheta + \beta\sin\vartheta\right\}$$

$$\text{Dus } \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta) = \text{kromtestraal} \times \text{pos. factor}.$$

De minimum voorwaarde geeft dus: kromme overal convex.

Hilbert heeft als maat genomen de $logD.V.$ binnen een convexe kromme, en meetkundig de minimumeigenschap aangetoond. Hamel heeft aangetoond, hoe ze uit de algemeene formule kan worden afgeleid.[17] Hij zoekt (diss. p. 24), de functies W en u te bepa;en zóó. dat

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_c^p dp \int_c^p dpW + u(x_2y_2) - u(x_1y_1) = \log \frac{(x_1 - v_1)(x_2 - v_2)}{(x_2 - v_2)(x_1 - v_2)},$$

$$\text{en vindt: } W(p, y - px) = \frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial b^2},$$

(waarmee hij dan licht aantoont, dat W voor ϑ scherp of tusschen $\frac{3}{2}\pi$ en 2π positief is; W is dus in elk geval positief)

$$\text{Verder volgt ze als: } \log \frac{x - v_2(c, y - cx)}{x - v_1(c, y - cx)}$$

....

IX-11 Minkowskische meetkunde: $\varphi_{hom}(ds)$

Hilbertsche: $\frac{ds}{s-s_1} + \frac{ds}{s_2-s}$

Nemen we dus als grondopp. der Hilbertsche meetkunde een zeer groot $dsf(\vartheta)$, d.i. van de vgl. $\varphi_{hom}(s_0) = \text{const.}$, dan komt de Minkowskische.⟨11⟩[18]

....

[De diff. vgl. voor f, opdat $\int f dx$ langs de rechte lijn minimaal worde, is:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y'} + y' \frac{\partial f}{\partial y \partial y'}.$$

Hieraan blijkt geen functie ψ van y' en $y - xy'$ te kunnen voldoen, maar wel een $\frac{1}{x-\psi}$.

Immers stel maar $f = \frac{1}{\varphi}$, dan komt in φ de diff. vgl.:

$$\varphi \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y'} - y' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial y'} \right\} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} . \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y' \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} = 0$$

Stel $\varphi = x - \psi$, dan komt in ψ de diff. vgl.:

$\psi \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial y'}$ *) (ψ als functie van y' en $y - xy' = \alpha$)

met opl. $\psi = f(\alpha + \psi . y')$,

of, als we X en Y noemen de op de lijn (α, y') te kiezen basispunten voor de dubbelverhouding op die lijn:

$$X = f(y - xy' + X.y').$$

⟨11⟩ *(enkele onleesbare doorhalingen in deze paragraaf.*

$$X = f\{y - y'(x - X)\}$$
$$X = f(Y)$$

m.a.w. die basispunten liggen op een enkele kromme.]

*) *(kantlijn:)* ⟨cf. Hamel diss. p. 24 eerste formule.⟩

. . . .

[Zijn de imaginaire proj. transformaties ⟨in R_2⟩ niet op een hypersfeer van 4 dimensies te beelden (die dan door 3 punten wordt aangebracht)]

. . . .

Twee polaire splitsingen, die zeer weinig verschillen, bepalen een volledige **IX-12**
rechte lijn; die niets verschillen – niets dan zichzelf; (cf. entropievermeerdering bij menging van weinig resp. niets verschillende gassen; groot en klein verschil zijn projectief hetzelfde.)

. . . .

De getallengeverij van Klein komt overeen met de additie formule (Schur, Hilbert) van projectieve Strecken.[19]

. . . .

(doorgehaald:) ⟦Mijn uniciteitsbewijs voor de vermenigvuldiging (III 76, 77, 78) gaat door, ook als we voor de incrementsfunctie een willekeurige (ook discontinue) stijgende functie toelaten. Immers construeer de schaal, en denk er was een segment, waarin de schaal niet indrong. *(volgt een onleesbaar doorgehaald fragment)*

C A———————B ·D

Denk dan de transform. van A naar B voert B in D. (of ook de transf. van B naar A voert A in C). Dan liggen tusschen C en A punten der schaal, evenzoo tusschen B en D, ⟨dus ook⟩ tusschen A en B, want AB is met CA en BD aequivalent.

Opm 1 Bij de suppositie kunnen niet A en B beide ⟧

Darboux bewijst (M.A. 17), dat de eenige (ook bij toelating van discont.) stijgende functie φ, waarvoor $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y)$ is: $\varphi(x) = cx$. Dit volgt direct aldus: uit de stijging volgt, dat we $\varphi(x)$ kunnen lezen als stijgend schaaldelen aantal, en dan komt bewijs Couturat princ. p.119.[20]

. . . .

Een ⟨eenduidige stijgende⟩ groep, ⟨onbegrensd deelbaar,⟩ van het eendim. **IX-13**
continuum kan niet discontinu zijn.

Bewijs:

We rekenen dan ons continuum zóó, dat op een segment elke ω-puntrij minstens één grenspunt heeft. (hetgeen gelijkwaardig is met het axioom v. Archimedes.)

Dan volgt uit de groep, dat, als we bij dat grenspunt ⟨van een reeds gecon-str. schaal⟩ een schaal construeeren (gelijkloopend met de reeds geconstrueerde schaal, waar het grenspunt niet toe behoeft te hooren), dat er een ⟨in zich dichte⟩ schaal van grenspunten is te construeeren bij de reeds geconstrueerde schaal.⟨12⟩

We bewijzen nu, dat die in zich dichte schaal geen vrij interval kan hebben, waarvan de beide uiteinden tot de schaal hooren. Natuurlijk niet, want dat interval zou kunnen worden gehalveerd. Maar dan kan ook de oorspr. schaal geen vrij interval hebben.

. . . .

Het Lüroth-Zeuthenschen Bewijs.[21]

$\underline{A}. \quad \underline{B}.F. \quad H. \quad D \quad G.K.\underline{C}. \quad J$

$H.\ \underline{A}.\ F.\ G.$ harm.

$H.\ \underline{A}.\ \underline{B}.\ \underline{C}.$ kleiner dan harm. Dus D rechts van H. Maar links van G, immers:

$G.\ \underline{A}.\ F.\ J.$ harm.

$G.\ \underline{A}.\ \underline{B}.\ \underline{C}. > G.\ \underline{A}.\ F.\ \underline{C}. > G.\ \underline{A}.\ F.\ J.$

Dus $G.\ \underline{A}.\ \underline{B}.\ \underline{C}.$ grooter dan harm.

IX-14 Hier is dus bewezen, dat het harmonische net überall dicht ‖ ligt op de lijn. Maar de proj. Hoofdstelling luidt:

Zullen ⟨in een transformatie bij⟩⟨13⟩ *4 harm. elem. steeds weer 4 harm. elem. behooren, dan is die transformatie door die van 3 der punten bepaald.*

Klein dacht nu; het Lürothsche bewijs dient aangevuld met het postulaat: '4 opvolgende elementen blijven na de transfomatie 4 opvolgende elementen'. Alleen zóó dacht hij de transformatie ook voor de irrat. punten te kunnen dwingen. Darboux toonde echter aan, dat dit nieuwe postulaat reeds uit de onvergankelijkheid der harmonieën volgt.[22]

. . . .

De stelling van de eenduidigheid van het punt door de quadrilat. constr. bepaald, bewijst Klein in een *begrensd* gebied voor den bundel. (En dit uit de stelling voor een puntrij ABC, waar de volgorde de aangegevene is, en gezocht wordt D, het harm. punt van C t.o.v. AB.

. . . .

⟨12⟩dat er een ⟨in zich dichte⟩ schaal van grenspunten is te construeeren bij de reeds geconstrueerde schaal. ⟦...*(onleesbaar fragment)* der schaal van grenspunten is nu ook een schaal van⟧

⟨13⟩*voor een onleesb. doorgeh. woord*

De proj. Hoofdstelling volgt direct, als we met kromme lijnen werken, ⟨waarop we dan meteen de orderelaties intuitief hebben,⟩ en daarop dan volgens Klein de getallen gaan invoeren. Aldus: Vooreerst kan ik ∞ veel Fund. reeksen construeeren, ⟨en zoo⟩ ook ∞ veel grenspunten.⟨14⟩ Gesteld nu, die lagen niet üb. dicht, m.a.w. er was een vrij interval, vrij van grenspunten. Maar zijn P_1, P_2, en P_3 ‖ grenspunten in de aangegeven volgorde, en P_1P_2 een vrij interval, dan **IX-15**
is de harmon. toegev. van P_3 t.o.v. P_1 en P_2 (immers ook die t.o.v. twee punten resp. vlak bij P_1 en P_2) weer een grenspunt.[23]

. . . .

Hilbert laat niet zien, welke geometrieën *onafhankelijk* van het Stetigkeitsaxioma nog mogelijk zijn; hij geeft alleen een *voorbeeld* van niet-Pascalsche meetkunde. Daarmee wordt dus niet genetisch de bouw-dwang v.h. StVIetigkeitsaxioma verklaard.

. . . .

Hilbert (Ens. 7)[24] mag niet werken met het Existenzbeweis, dat hij geeft, *le nombre 'deux'*; want hij weet niet, dat zijn systeem iets met het werkelijke *getal* te maken heeft [zonder althans volmondig vooraf te zeggen: ik vooronderstel de wiskunde, en bekijk ⟨de taal daarvan⟩ wiskundig; maar hoe weet je, dat die taal gehoorzaamt aan wiskundige wetten?, dán moet ik eerst intuitief wiskundig die taal zorgen wiskundig te houden, en als ik achteraf (door het inzicht der inductie b.v.) merk, dat het *gaat*, kan ik pas beginnen met mijn logisch systeem, dat het moet dekken, maar onafhankelijk weet ik niet, dat dat logisch systeem werkelijk 'niet–contradictoor' is.], en dat een contradictie in zijn systeem zich zou moeten dekken met een *onmogelijkheid* in de reeds bestaande arithmetik.

. . . .

Pag. 98 postuleert hij (en bewijst niet-contradictoriteit van) de 'gesloten **IX-16**
gekoppelde hoeveelheid'.[25]

. . . .

Ten slotte bewijst hij de niet–contradictoriteit van $\aleph_1$ en c. Waaruit niet volgt, dat die symbolen mathematisch*zin* hebben, m.a.w. de machtigheidsvraag mathematisch is op te lossen. (misschien kan hij overigens wel symbolisch de niet–contradictoriteit hunner gelijkmachtigheid aantoonen, wat ook niets zou bewijzen.)

Waren omgekeerd de symbolen *wel* contradictoor, dan hadden ze alleen geen *zin* als dekking van mathematische *taal*. Maar daarom konden de intuitieve dingen, die je bedoelde , misschien toch wel mathematisch bestaan, was alleen de taal wat onbeholpen er voor gebruikt.

⟨14⟩ Vooreerst kan ik ∞ veel Fund. reeksen construeeren, ⟦krijg dus⟧ ook ∞ veel grenspunten.

. . . .

Dertien als 10 + 3 is een mathem. gebouw in : . . . . . . , dat ons helpt, die laatste groep te beheerschen, en ons er relaties in te herinneren.

. . . .

Ruimte zelf–contradictoor? Ja, in zooverre, dat het op zichzelf niets is, maar de band tusschen buitenwereld en het zich veruiterlijkende subject; dus nooit kan gebruikt worden, om die buitenwereld onafh. te omvatten, nog minder buitenwereld en subject samen.

. . . .

IX-17 *Naar aanl. van Poincaré: 'Valeur de la Science'.*[26]

Wij bouwen binnen bepaalde grenzen analytische functies, ⟨die natuurlijk *elke* empirische functie kunnen benaderen⟩ (we werken daarmee het liefst, omdat we daarbij door leidende 'voorstellingen', aan de rigide groep ⟨en haar botsingen⟩ , onze veruiterlijking, ontleend, kunnen worden gedragen.), immers we postuleeren de functie der natuur ⟨onbegrensd⟩ interpoleerbaar (cf. p. 259). *)

En toch zal het systeem niet altijd precies op die wijze kunnen sluiten; de differentieerbaarheid van alles naar den tijd is wel vol te houden; maar de ⟨statische⟩ evenwichtsfiguren worden bij de limiet (voor zeer kleine rigide deeltjes) wel eens niet-differentieerbaar. (Hilbertsche postulaat)[27]

De *herhaling* van feiten scheppen wij; ze is niets anders, dan onze intuitieve inductie. Dat wij *wetten* opmerken, en wij ons daarin veruiterlijken, hangt er mee samen, dat de tijd er eigenlijk niet is. – En dat wij de wet niet direct zien, maar, ons veruiterlijkend, er naar moeten tasten, komt van onze afgrenzing.

(p. 243 boven) 'Notre espace euclidien a été choisi parmi un certain nombre de types qui pré-existent dans notre esprit et qu' on apelle groupes'.[28]

(p. 258) Scheidt men zoo een 'object' (d.i. een verschijnselcombinatie, welks sámen denken gemak geeft) af, dan denkt men dat wiskundig.

(p. 264) Wat hier staat over esthetische emotie, is fout.[29]

*) *(kantlijn:)* ⟨waar overigens dient opgemerkt, dat het toch altijd een intuitieve waag is, dat interpoleeren; men is voorbereid, dat het zou blijken niet uit te komen.⟩

. . . .

IX-18 De toepassing van wiskunde op 'contingent matter' (want dat is het ten slotte, wat Hamilton wil verdedigen) eischt, behave wiskundige vorming, handigheid en (soms wreede) brutalitiet. (van brutaliteit is b.v. de waarsch. rek. een voorb.)

. . . .

De wiskunde bestaat zoo uit 3 deelen:

1^e Het uitrekenen en contrôleren (zoeken van antwoorden: ja of neen). Hiertoe hoort ook de logica. Dit geheele deel heeft zooals Hamilton *) terecht opmerkt, weing educationeele waarde.

2^e Het intuitief grijpen van nieuwe gebouwen in de oude.

⟨Hiermee is niet waar, dat het zoo makkelijk zeker is. Zoo min als bouwen makkelijk is, omdat de steenen zoo vast zijn.⟩

3^e Het intuitief grijpen van wisk. substraten van de natuur en het leven. (physica en magie)

Alle drie (maar vooral het eerste) zijn zeer vatbaar voor nabootsing en herhaling (en zijn zóó vaak voldoende.)

*) *(kantlijn:)* ⟨Edinb. Review 62⟩

. . . .

De wiskunde zit in 't afgegrensde intellect; dus wiskundige reactie is nooit spontaan, dus nooit zuiver.

. . . .

Iemand die wisk. werkt, ontkent allerlei doeleinden (ze inziend als relatief); zijn werk is zelfs, voortdurend op relativiteiten te jagen.

Evenzoo de literator en kriticus.

Toch kúnnen zij allen slechts werken, door één || doel hardnekkig blind voor **IX-19**
oogen te houden.

. . . .

De 'various grounds of conviction' van Hamilton (l.c. p. 433) in het practische leven, bedoelen het telkens weer samen-toetsen van fantazieën, of het schijnsysteem niet strijdig is in zichzelf. (Logische contrôle; zij vooronderstelt een alles samenvattend wiskundig systeem, wat fout is). Maar dat is de foute manier; je moet dat onderzoeken door concentreering naar het middelpunt, ⟨en uitstraling terug (zoo trachten mijn redeneeringen te zijn)⟩ , los van alle wiskunde.

. . . .

Sophistische contradicties ⟨antinomieën⟩ zijn onderschuivingen van verschillende systemen naar eenzelfde aanschouwing.[30]

. . . .

Wiskunde op gebied van weerkunde of spiritisme heeft niets met zuiverheid daarop te maken.

. . . .

Wiskunde gaat vooruit? Natuurlijk schijnt dat zoo, omdat het onderdeel, waarop de aandacht in een zekeren tijd gevestigd is, natuurlijk (in ongevoelde eenzijdigheid) vooruitgaat.

. . . .

Iedere veruiterlijking heeft haar wiskunde: de handel het rekenen, de physica de poteniaal.

. . . .

De vraag: ⟨Is⟩ 'Is niet herhaalbaar' herhaalbaar? kan niet worden beantwoord, want wil ik dat gaan onderzoeken, dan merk ik, dat ik het antwoord op die vraag noodig zou hebben.

. . . .

IX-20 Want men bedenke wel; een vraag kan een antwoord: *ja* eischen of *neen* of ook den hoorder zonder aandoening van zin laten.⟨15⟩ eischen of *neen* of ook ⟦zonder⟧ den hoorder zonder aandoening van zin laten. En het laatste was bij de vorige vraag het geval. Zoo ook bij de vraag: 'Is ita nita?'

. . . .

Zoo ook de vraag, of iemand, die zegt: 'Ik lieg' liegt. Een vraag mag ⟨voor haar antwoord⟩ haar beantwoording niet vooronderstellen.⟨16⟩

En evenzoo mag bij een samenvatting *alle* die samenvatting zelf niet mee zijn inbegrepen.⟨17⟩

. . . .

Want zoowel vragen als samenvattingen hebben in de logische taal (d.i. wiskunde) betrekking op het reeds opgebouwde of op wat verondersteld wordt opgebouwd te zijn.

. . . .

Wij denken de natuur brutaalweg maar wiskundig (d.i. volgens ónze veruiterlijking) opgebouwd, en ook haar mechanica volgens ónze veruiterlijking (inertie van spiergevoel en rigide lichamen).

. . . .

We zouden de natuur willen vangen, en omdat analytische functies daartoe het hoofdzakelijke middel zijn, hebben we altijd neiging, om ook de evenwichts-

---

⟨15⟩ *ja*

⟨16⟩ Een vraag mag ⟦zijn eigen⟧ haar beantwoording niet vooronderstellen.

⟨17⟩ En evenzoo mag ⟦het zeggen om⟧ bij een samenvatting *alle* die samenvatting zelf niet mee zijn inbegrepen.

figuren zoo te willen denken ‖ (hierbij misschien geleid door een idee, dat de ruimte een absolute maat is, *) en een soort Ausgleichung, ⟨dus altijd moet⟩ terugvoeren tot een evenwichtstoestand, die analytisch is.⟨18⟩ **IX-21**

Maar nu blijkt men dat niet altijd te kunnen volhouden ⟨bij een eenmaal gekozen doelmatige hypothese;⟩ zoo bij de niet-differentieerbare potentiaal van Hilbert.

En bij het vangen van de natuur door kleine rigide deeltjes (wat ook een zeer 'bewährte' methode is), zal ook niet altijd de limiet der mathematiseering een analytische functie geven.

*) *(bovenaan blz.:)* ⟨dus een functie zich in punten vlak bij elkaar analoog moet gedragen, waaruit dan volgt het bestaan van Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$ enz.⟩ ,

....

(Poincaré) Héb je eenmaal, dat de functies der natuur eenige malen differentieerbaar zijn, dan kun je de betrekkingen door invoering van nieuwe variabelen altijd tot diff. vgl. der 2^{de} orde terugbrengen. ('inertiebeginsel.')

....

Het Hegelianisme heeft in zijn eenheid van tegendeelen alleen betrekking op de appliceerbaarheid der taal (d.i. wiskunde) op de werkelijkheid, niet op de werkelijkheid zelf, of de wiskundig geziene werkelijkheid zelf.

....

Het reageeren op de natuur, door haar wiskundig substraat te zien, leidt natuurlijk aan al de nadeelen der doel–middel–partieering. **IX-22**

....

De uitbreiding der wiskunde maakt haar aanraking met het leven (d.i. dienstbaarheid als medium tusschen actieprikkel en reactieprikkel) natuurlijk ook hoe langer hoe uitgebreider.

....

De praktijk van een universiteitsfaculteit is de ⟨gewetenlooze⟩ *) daad der toepassing van de wiskunde op een levensdeel. Die praktijk dient echter aangevuld door de Hereeniging van de daad naar het centrum. ⟨Zoo goed als in een monografie over 'de hand' ook het dirigerend centrum in de hersenen dient behandeld.⟩

*) *(kantlijn:)* ⟨immers afgegrend ligt de foute praemisse ten grondslag, te kunnen zeggen: 'Zoo is het'.⟩

⟨18⟩en een soort Ausgleichung ⟦dat alles wil⟧ terugvoeren tot een evenwichtstoestand, die analytisch is.

. . . .

Veronese begint zijn 'intuitieve opbouw' geheel fout in dezen zin, dat hij ook over 'denken' en 'in den Gedanken entsprechen' spreekt; welke dingen geheel buiten de wiskunde hooren te blijven.[31]

. . . .

Zeg ik b.v. 'ik herinner mij dit ⟨vaag of niet vaag⟩ ', dan heeft dat alleen zin als een wiskundige uitspraak (zeker of onzeker) over het mechanisch wereldsysteem in den tijd.

. . . .

Die waan, om ⟨wiskundig⟩ te denken over 'zichzelf' of 'eigen herinnering' ‖
IX-23 is de grond van alle phil. verwarring.

. . . .

(Goethe en Eckermann) 'Mehr darf man sich in Schriften auszusprechen kaum anmassen'.[32]

. . . .

IX-24 De philosophische speculatoren mogen dat alleen zijn, om steeds grooter centralizeerend kennis-systeem in de strijdveruiterlijking der menschen te brengen: niet, om een kennis-systeem onafhankelijk van dien strijd te willen opbouwen, dat dan later alleen misschien op dien strijd zou kunnen worden 'toegepast'.

. . . .

Een vermenigvuldig-groep[33] ⟨voor x⟩ is dat ⟨ook⟩ voor x^k, laat zich dus combineren met elke groep ${x'}^k = x^k + c$ (c de parameter). Laten nu twee van die laatste groepen zich misschien mét de vermenigvuldig-groep tot een drieledige combineeren? Ja, als $k_1 = -k_2$, n.l. tot de projectieve groep. We stellen dan $k_1 = 1$; $k_2 = -1$. En elk der 3 eenledige groepen geeft een der infinit. transf. der proj. groep.

. . . .

Differentieerbare functies zou men kunnen kenschetsen door te eischen, dat in 't oneindig kleine de projectieve meetkunde geldt.

. . . .

Axioma's, die niet meer mogen bevatten, dan de ervaring? Och, dat kan nooit, we vullen altijd de ervaring aan, wat leert de ervaring b.v. over het oneindig kleine? Het blijft altijd een toeval, dat onze aanvullende hypothesen werkelijk in de empirie uitkomen.

Zoo heeft Klein ongelijk, als hij zegt, dat Lie zich tot analytische functies mocht beperken, omdat elke kromme met voldoende benadering door een analy-‖ tische functie kan worden voorgesteld. Het zou best mogelijk zijn, dat er **IX-25** niet-analytische ⟨niet-Liesche⟩ groepen bestonden zóó, dat de ze benaderende analytische transformaties geen groep vormden (al vormden ze dan ook 'bijna' een groep, 'naderden' ze tot de groepeigenschap). Neen, de eenige rationale empirische grond voor de meetkunde, is en blijft het waargenomen rechthoekig Cartesiaansch coördinatenstelsel, met de invariant $x^2 + y^2$.

. . . .

Bij de niet-Pascalsche projectieve meetkunde kan ik niet zeggen $\varphi_1 - \varphi_2$ verhouden zich als $\varphi_1 a - \varphi_2 a$ (wel als $a\varphi_1 - a\varphi_2$); vermenigvuldig ik m.a.w. de eenheden op de schalen der fundamentaalpunten elk met eenzelfde getal, dan krijgen de punten met gegeven coördinaatgetallen een andere coördinaatverhouding.

. . . .

Te onderzoeken, wat, voor niet-Pascalsche getallen wordt van de projectieve groep, die een reciprociteit (polairsysteem) invariant laat. ⟨Dit is noodig voor goed verstaan der Vahlensche niet-Euclidische affiniteit.⟩

. . . .

Het continuum als oneindig voortloopende kansenrij is onzin, want als oneindig voortloopende kansenbron krijg ik alleen 2^ω, nooit $2^{\aleph_0}$.

. . . .

Men zou kunnen zeggen: Is het uit te maken, of een ‖ puntrij op het con- **IX-26** tinuum dicht is of niet? M.a.w. is het karakter van den boomtak altijd uit te maken? In elk geval kan ik zeggen: heb ik het nog niet uitgemaakt, dan kan ik de completeering tot continuum *zeker niet* toepassen, moet dus zeker tot een aftelbare hoeveelheid beperkt blijven.

. . . .

Niet-uniforme groepen op de rechte lijn zouden zijn af te leiden uit uniforme groepen in het platte vlak door Peanosche afbeelding.

. . . .

Het opbouwen van de rij één, twee, drie, . . . uit de oerintuitie 0, gebeurt aldus:[34]

(0) 1^e. één – twee (gescheiden door tijdsvloeiing)

(0) 2^e. twee – drie (gescheiden door tijdsvloeiing)

Deze rij wordt toegepast bij het tellen van punten, door middel van de oerintuitie:

(0)*1*^{e}	één	–	gezichtsgewaarwording	van	een	(eerste)	punt
(0)*2*^{e}	twee	–	,,	,,	,,	(tweede)	,,
	enz.						

. . . .

'Continuum-intuitie' sive 'tusschen-intuitie'.

. . . .

Te bewijzen:[35] Er is geen functie, op gesloten opp. en in oneind. 0, en daartusschen nergens divergentie.

. . . .

IX-27 Die functie zou dus alleen *div.* hebben in 't eindige binnen een zeker gebied; maar uit zulke divergenties is een functie op te bouwen, in 't oneindige van orde $\frac{1}{r}$. Was er nu ook nog een van lager orde in 't oneindige, dan zou hun verschil zonder divergentie zijn, en in 't oneindige 0. Blijft dus:

Te bewijzen: Er is geen functie in 't oneind. 0 met nergens divergentie.

Dit volgt uit de splitsing in elementairvelden van de gradient. Die gradient ⟨is een vectordistrib.,⟩ in 't oneind. 0; daaruit volgt dat zoowel de *rot.* als de *div.* in 't oneind. geen krachtwerking in 't eindige geven, en daar die gradient geen verdere *rot.* en *div.* ⟨heeft,⟩[⟨19⟩] is die gradient in 't eindige overal 0. Dus de pot. een constante, maar daar ze in 't oneind. 0 is, is ze overal 0.

. . . .

Dat velden zonder *rot.* en *div.* slechts kunnen zijn sommen van reeksen van ⟨inwendige⟩ bolfuncties, volgt door inversie hieruit: dat velden met slechts een enkel punt, waar *div.* in mag voorkomen en die in 't oneindige een constante potentiaal hebben, slechts kunnen zijn sommen van reeksen van uitwendige bolfuncties om dat punt.

. . . .

IX-28 Als men meetkundige stellingen bewijst over een willekeurig punt of een willekeurig getal, dan denkt men feitelijk het willekeurige punt veranderlijk en achtereenvolgens alle waarden van zijn gebied doorloopend, terwijl de demonstratie voor al die waarden (hetzij continu, hetzij discontinu verloopend) geldig blijft.

. . . .

[⟨19⟩] *(I.p.v. een onleesbaar doorgehaald woord)*

Russell–Poincaré. (Rev. de M. 1906, 5 en 6). Russell gooit de logische bestaansbewijzen van het transfinite (die bij Burali-Forti b.v. tot contradictie voerden) weg, maar behoudt de ⟨kwasie⟩-intuitieve opbouw van Cantor zelf bij; en maakt er de fouten van Cantor weer opnieuw.

Poincaré wil echter ten onrechte niet alleen de logische, maar ook *alle* Cantorsche intuitieve bestaansbewijzen wegdoen.[36]

. . . .

Van de uitbreiding der vgl. van Legendre, die men krijgt door de vgl. van Laplace op niet-Euclidische ruimten uit te breiden, vindt men de oplossing, door de potentialen van niet-Euclidische magneten van verschillende orde uit te rekenen (analoog met de Maxwellsche afleiding der bolfuncties voor de Euclidische ruimte.)[37]

. . . .

N.B. de prijsvraag Jablonowski voor 1910. (zie Math. Ann.)[38] **IX-29**

. . . .

Het *zien* van de wiskunde is geen val; wel de haar toepassende doel-middel-partieering. Maar de maatschappelijke beoefening der wiskunde is een opgeofferd zijn aan en dienen van anderen, die op je paraziteeren.

. . . .

Dat de ruimte voor ons*leeft*, wil zeggen, dat onze spierbewegingen zoo levend zijn.

. . . .

De reeks ω is alleen op te bouwen op de continue tijdsintuitie.[39]

. . . .

Verstandhouding: Met één woord rijst een geheel gebouw met al zijn ondergebouwen, en als gevolg daarvan eventueel een geheele (wiskundig samengevatte) reeks van gedragsregels (op grond van doel-middel). Zoo'n door inductie saamgehouden stel volgreeksen voor elk der individuen berust op terugvoering daarvan op het (trouwens ook uit het hoofd geleerde) inductiegebied der hoofdbewerkingen met getallen.

. . . .

Zouden de afwijkingen van de wet van Boyle niet zijn te verklaren uit de elliptische ruimteconstante?

. . . .

IX-30 Vahlen definieert *stetig* aldus: 'zu *jedem* Aggregat von *vor*'s und *nach*'s existiert wenigstens ein Punkt'. Dit *jedes* heeft alleen zin voor opgebouwde hoeveelheden, en opgebouwde Aggregate.[40]

. . . .

(Vahlen Abstr. Geom. § 18) Zoo een stel betrekkingen is alleen met behulp van fundamentaalrijen aan te geven.[41]

. . . .

Men kan van een mathematische contradictie of onmogelijkheid van inpassing alleen spreken, zoo gevraagd werd een wiskundig opbouwbare verzameling, het voorwaardesysteem waarvoor is te splitsen in elementen, elk voor zich mogelijk, maar te samen niet. Maar is die splitsing niet mogelijk, dan heeft de stelling *geen zin*, en bestaat nòch het principe van contradictie nòch tertii exclusi. (Overigens geldt het laatste principe ook niet altijd, als de splitsing wél mogelijk is, ⟨immers de verzameling is dan nog niet altijd af te bouwen; dat gaat alleen sóms met behulp van volledige inductie⟩).

. . . .

Dat het geoorloofd is,[42] de *rot.* distr. van een flux in ${}^{n}R_{ell.}$ te splitsen in de rotatie-^{2}bollen om de gescheiden flux-buizen,[⟨20⟩] blijkt als we R_n verdeelen in lange dunne (lengte afm. $\infty\times$ dikteafm.) vol. elementjes langs de flux–lijnen. Maak nu maar op de integraal langs een willekeurig ^{2}oppervlak door een kromme begrensd, dan komt op beide manieren uit de rotatie–planivector over het opp. de integraal v.d. flux langs de kromme.

. . . .

IX-31 Zijn er ∞ veel cijfers 4 in de ontwikkeling van π? Is een eindig aantal contradictoor, dan zijn dus *alle* stellen van een eindig aantal cijfers 4 met tusschen elke twee een eindig aantal andere cijfers contradictoor. Die onmogelijkheid van elk eindig aantal cijfers 4 *bouwt* zoo vanzelf het oneindige aantal.

Is een oneindig aantal contradictoor, dan hebben we een eindig? Althans we kunnen dat dan veilig aannemen zonder gevaar voor contradictie, want kwam er een, dan hadden we een oneindig, het oneindige aantal zou dus niet contradictoor kunnen zijn.[43]

. . . .

Of eigenlijk is de voorgaande redeneering niet geheel zuiver. Immers de contradictoriteit van 'eindig' bouwt onmoglijkheid van $4 \longrightarrow \omega$ *maal 'niet-4'*, ook van $4 \longrightarrow$ *eindig maal 'niet-4'* $\longrightarrow 4 \longrightarrow \omega$ *maal 'n. 4'* en besluit daaruit tot $4 \longrightarrow$ *eindig maal 'niet-4'* $\longrightarrow 4 \longrightarrow$ *eindig m. 'n.-4'* $\longrightarrow 4 \longrightarrow \ldots$

⟨20⟩ Dat het geoorloofd is, de *rot.* distr. van een flux in ${}^{n}R_{ell.}$ te splitsen in de ⟦rotatiedr... *(?)*⟧ rotatie-^{2}bollen om de gescheiden flux-buizen, Maar dat berust juist op het pr. tert. excl., dat geen derde erkent naast $4 \longrightarrow \omega$ *maal 'n-4'* en $4 \longrightarrow$ *eindig maal 'n-4'* $\longrightarrow 4 \longrightarrow \ldots$

Maar we kunnen aldus bewijzen, dat toepassing van het p.t.e. nooit tot contradictie kan voeren.

Immers contradictoriteit van oneindig maal 4 (d.w.z. van afwezigheid van het laatste 4 cijfer) ⟨wil zeggen geconstrueerd-zijn van⟩ 'ω maal ⟨achter elkaar⟩ niet-4',[⟨21⟩] en contradictoriteit van eindig maal 4 wil zeggen contradictoriteit van 'ω maal achter elkaar niet-4'. Beide contradictoriteiten kunnen niet samengaan.

. . . .

De eigenlijke wiskunde werkt met ω, heeft dus ⟨haar essentie⟩ buiten de toepassingen.[⟨22⟩] **IX-32**

. . . .

De theorie der eindige groepen heeft alleen dáárom belang, omdat ze op oneindige verzamelingen (algebraische vergelijkingen) kan worden toegepast.

. . . .

Wiskunde kan beoefend worden in Verneinung en in Bejahung des Willens. Eigenaardig, dat alleen de eerste de boel vooruit brengt.

. . . .

De onverbiddelijkheid van de wiskunde is *onze* kracht; die van de werkelijkheid de kracht van het *andere*.

. . . .

Een willekeurig getal der tweede getalklasse kan ik alleen denken, omdat ik het afbeeld op ω, en als zoodanig denk ik het ook.[44]

. . . .

. . . .

. . . .

In 'Over de structuur der perf. puntenverz.' II eerst ingaan op Baire (fonct. disc. p. 101–105, dat *wèl* het afspl. proces volgt en *feitelijk* van Ω onafh. is; het volgt ook voor het hoofdtheorema dez. grondgedachte als ik, is alleen noodeloos

---

[⟨21⟩] Immers contradictoriteit van oneindig maal 4 (d.w.z. van afwezigheid van het laatste 4 cijfer) ⟦construeert⟧ 'ω maal ⟨achter elkaar⟩ niet-4',

[⟨22⟩] De eigenlijke wiskunde werkt met ω, heeft dus ⟦alleen⟧ buiten de toepassingen.

wijdloopig, doordat niet met de afsplitsingsprod., doch met de resten wordt gewerkt),[⟨23⟩] Mahlo (Leipz. Ber. 09) en Denjoy (C.R. A. 09).[45]

Dan het vlak in ∞ geb. met gemeensch. grens verdeelen; bewijzen de condities van § 3 (Schoenflies II Kap.V) en de structuur der Kurvenbogen.

Daarna 'Over transform. van oppervl'. III[46]

....

IX-33 In ⟨fig. 2 van⟩ 'Zur Analysis Situs' stellen op een horizontale snijlijn de zwarte banden voor de duale getallen, en een ruggegraat wordt bepaald door een irrationaal (d.w.z. niet duaal) getal, en de spiegelingen daarvan t.o.v. de duale getallen. In het bijzonder de roode band door de versch. getallen, die in het duale stelsel eindigen op $\not 0$ $\not 1$[47]

....

Twee punten ⟨van de horiz. snijlijn⟩ van fig. 2 kunnen dán continu worden verbonden door een *deel* van de kromme, als van de bijbehoorende getallen het verschil of de som een duaal getal is.

....

....

....

(Tot slot volgen nog enkele bijlagen, d.w.z. als losse bladen en als apart staande laatste pagina's in dit laatste schrift gevonden.)

IX-A Physica is bestudeering van causale reeksen in de vaste lichamen. Wat ligt dus meer voor de hand, dan de ingewikkelde onder die reeksen in inductief verband te brengen met de eenvoudige, n.l. de rigide dynamica? Nu, en anders is de mechanische physica niet.

....

IX-B *(geschreven achterop een rekening voor 5 lampenglazen, op 16 augustus 1906 gekocht bij de wed. de Goey-Blom)*

Hamilton-Whewell

Wie *niet* philosopheert, raakt (rustig gezond) waanwijs gevangen.

citaat Fries (p. 450), slot, r. 5 v.o.
is er fout theosofisch.

p. 450 r. 10 v.o. goed om verstrooidheid af te leeren en attentie te leeren (wispelturigheid komt bij *die* veruiterlijking.

⟨23⟩doordat niet ⟦duidelijk⟧ met de afsplitsingsprod., doch met de resten wordt gewerkt),

p. 451, the 'schoolman' ziet fijne verschillen; d.w.z. breidt steeds het wisk. systeem uit, dat voor een bepaalde fantasie nog niet precies blijkt te passen.

(Fouten de 'Gottesbeweise' naar aanleiding hiervan.

p. 453 citaat Xenophon. Maar niet juist; al het andere verknoeit je leven ook.

p. 454 citaat Seneca

p. 274 (dl. 2) r. 4–2 v.o.

....

Stelling 1 Een R_p in R_n kan altijd worden uitgebreid tot een R_q in die R_n $(p < q < n)$ **IX-C**

Stelling 2 Een R_n is in zichzelf af te beelden (sec. *(?)* biuniform en continu), waarbij een bepaalde R_p kan gezegd worden over te gaan in een bepaalde andere R_p $(p < n)$

Stelling 3 (volgt uit 1 en 2) Twee R_p's in R_n $(p \leq n)$ kunnen in een bepaalde puntcorrespondentie in elkaar worden overgevoerd, zóó, dat alle punten der R_p langs een enkelen parameter enkelvoudige kromme lijnen beschrijven en, als de grootste totaal-verrücking van R_p naar ${}^iR_p'$ ε is, zich bij den overgang niet verder verwijderen dan $f(\varepsilon)$

⟨*Stelling 3a* Nadert een ω–rij van R_p's tot ρ_p, dan kan ik de elementen (d.w.z. hoekpunten, ribben, zij- ^{q}ruimten) van een maatnet in q_p laten benaderen door maatnetten, telkens in elk der R_p''s.⟩

(kantlijn:) ⟨en wel voor afstand ε van R tot ρ is de te eischen afstand der elementen: $\varepsilon +$ maxim. uitbuiging v.e. ε⟩

Stelling 4 Wordt een R_n geheel gevuld met een afgesloten, dus perfecte verzameling van R_p's, dan kunnen die R_p's genomen worden als parallellen aan coördiaatruimten bij zeker coördinatenstelsel.

Stelling 5 Laat een systeem van R_p's in R_n zich biuniform en continu laten afbeelden op een R_m, dan vormt dat systeem eem R_{p+m}, en dus volgens stelling 4 zijn daarin de R_p's parallellen aan coördinaatruimten bij zeker coördinatenstelsel.

Bewijs van stelling 4

Trek een willekeurige kromme en zet daarlangs de R_p's (na eventueele uitschakeling der overbodige stukken). We gaan bewijzen, dat we zoo een R_{p+1} krijgen, waarin de gevormde R_p's kunnen worden genomen als parallellen aan coördinaatruimten.

Neem daartoe twee dier R_p's, α en β zóó, dat afst. $\alpha\beta = \varepsilon_0$ *)

*) *(kantl.:)* ⟨d.w.z. ieder punt van $\binom{\alpha}{\beta}$ heeft minstens één punt van $\binom{\beta}{\alpha}$, dat op afst. $\leq \varepsilon_0$ er van is verwijderd⟩

Beeld α en β op elkaar af, en verbind ze door een ε_1-*ketting* van R_p's, d.w.z. alle overeenkomstige punten hebben afstanden $\leq f(\varepsilon_0)$ van elkaar, waarin f met ε_0 verdwijnt, en alle overeenkomstige opvolgende punten hebben afstanden $\leq \varepsilon_1$. We doen dat als volgt: We voegen tusschen α en β een reeks R_p's in zóó, dat elke volgende zich op de voorgaande laat afbeelden met afstanden $\leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$ tusschen de overeenk. punten. Dat dit kan, volgt uit stelling 3a. Op elk van die R_p's zetten we een afbeelding van α en β zóó, dat elk punt van het overeenk. punt in α en β een afstand $\leq \varphi(\varepsilon_0)$ heeft, waarin φ met ε_0 verdwijnt. Dan hebben alle overeenk. punten in die R_p's van elkander een afstand $\leq 2\varphi(\varepsilon_0)$.

Zij γ de eerste R_p, die volgt op α. Op γ hebben we nu zijn eigen afbeelding en een met afstand $\leq \varepsilon_1$ van de overeenk. punten op α. Die beide zijn continu in elkaar over te voeren, dus ook ⟨in m tusschenstanden⟩ met onderl. afst. van opvolgende overeenk. punten $\leq \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Neem vóór γ_1 (in de rij der R_p's) $m+1$ R_p's aan, die zich op γ_1 laten afbeelden met onderl. afstanden van overeenk. punten $\leq \frac{1}{4}\varepsilon_1$. Beeld dan daarop op die wijze van volgorde af de $m+1$ afbeeldingen, die we op γ_1 buiten haar eigen afbeelding hadden geconstrueerd.

De ε_1-ketting loopt dan van α naar γ_1 over de $m+1$ tusschen-R_p's, enzoovoort naar γ_2, γ_3 enz. Tusschen de ε_1-ketting voegen we tusschen elke twee schakels een ε_2-ketting in (ε_2 b.v. $= \frac{1}{1000}\varepsilon_1$), daartusschen een ε_3-ketting ($\varepsilon_3 = \frac{1}{1000}\varepsilon_2$), enz. Zoo krijgen we een R_{p+1} — Zet langs een tweede kromme ook de R_p's uit, dan krijgen we een tweede R_{p+1}. Trek in beide een kromme, die uit elk der R_p's slechts één punt bevat. En leg tusschen die beide krommen ⟨α en β⟩ een R_2, die geen verdere punten met de R_{p+1}'s gemeen heeft. Trek dan tusschen α en β krommen met onderl. opvolgende afstand $< \varepsilon$ zóó, dat de R_{p+1}'s er door geheel buiten elkaar liggen. Dit kunnen we doen, door de eerste kromme γ op vereischte afstand ⟨te houden⟩ van α.

IX-D Deze kan noch de R_{p+1} van α noch die van β raken ⟨evenmin als de volgende tusschenkrommen δ enz.⟩ . Maar de R_{p+1} van γ kan nu verdere punten van de R_2 bevatten. Construeer om de óp of rechts van de volgende kromme δ liggende stukken daarvan approximeerende veelhoeken in afst. η ($\leq \varepsilon$), maar alleen voor die stukken, wier approximeeringen bij onbepaalde afname van η *niet* eenmaal geheel rechts van δ zouden komen te liggen. Deze approximeeringen loopen telkens van een punt van δ naar een ander punt van δ, en we vervangen de tusschenliggende stukken van δ door de overeenk. stukken der approximeering, en krijgen zoo in pl. van δ: δ'. Voor de nu volgende kromme ζ moeten we letten op de stukken van de R_{p+1}'s van γ en δ' die er op of rechts er van vallen. Maar overigens gaat het op dezelfde manier. Zet nu op al die krommen een ε_1-ketting als boven beschreven, en laten de punten daarvan in R_2 overeenk. punten zijn op $\alpha, \gamma, \delta' \ldots \beta$ van een $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net in de R_2. Behalve de eigen ketting op γ, kunnen we er zetten een $(\varepsilon_1 + 2\varepsilon)$-ketting, door in ⟨de R_p van⟩ elk punt een zoo nabij mogelijke afbeelding van de R_p van het overeenk. punt van α te zetten. Verbind de overeenk. punten der beide kettingen in γ door ε-kettingen met n schakels elk. Dan komen tusschen de beide kettingen van γ als overgangskettingen n tusschenkettingen, maar in 't algemeen met grooter schakels dan ε_1 en ook niet $= f(\varepsilon_1)$. Door voor alle n echter eenzelfde en voor alle voldoend aantal punten op γ in te schakelen zijn al tusschenkettingen tot ε_1-kettingen te maken $\langle$wier overeenk. punten den ε-afstand behouden. Immers het komt hier $\langle$nu$\rangle$ feitelijk nog maar aan op het construeeren van $\langle$twee$\rangle$ ε_1-kettingen $\langle$in eenzelfde R_p,$\rangle$ wier uiteinden den ε-afstand van elkaar hebben, en wier overeenk. punten dat ook moeten houden.$\rangle$ Analoog brengen we in γ den overgang van de eigen ketting naar de op γ uit de ketting van δ afgeleide. Zorgen we nu in den eigen ketting $\langle$van $\gamma\rangle$ de noodige tusschenpunten aan te brengen zóó, dat met die tusschenpunten de $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-netovergang naar beide nevenkettingen in γ mogelijk is. Analoog als voor γ, de tweede kromme in R_2, voegen we tusschenpunten in de vierde, zesde enz. kromme in R_2, en ten slotte voegen we nu in alle krommen in R_p (d.w.z. $\alpha, \gamma, \delta' \dots \beta$) het maximum-tusschenpunten overal in, dat tusschen twee daarmee overeenk. punten maar op een der krommen noodig is geweest. Zoo komt een $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net van afbeeldingen der R_p's op de R_2. (Want het is niet noodig weer te herinneren, hoe de bijkettingen, die naast de eigen kettingen op γ resp. een andere der krommen voorkomen, worden verplaatst elk op een verschillende voldoende vlak naast γ gelegen kromme.) Binnen elke maas van het $(\varepsilon, \varepsilon_1)$-net zetten we analoog een $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$-net met ($\varepsilon_2 = \frac{1}{1000}\varepsilon$; $\varepsilon_3 = \frac{1}{1000}\varepsilon_1$) enz. Zoo krijgen we een uit onze R_p's gevormde R_{p+2}. – Nu moet uit de R_2 een R_3 en dan uit de R_{p+2} een R_{p+3} worden gevormd. Het laatste gaat gemakkelijk analoog aan zooeven, als eerst maar de R_3 is gevormd. Maar het laatste levert bezwaar volgens de vorige methode, want de $\langle$overstekende$\rangle$ stukken van de γ in R_3 kunnen $\langle$nu$\rangle$ alle mogelijke Riemannsche samenhang hebben, en zijn dan niet door een δ' op afst. ε te benaderen zóó, dat δ' een gewone enkelv. samenhangende R_2 blijft. Maar reeds de methode om R_2 te vormen was niet juist. Immers men kan $\langle$daar$\rangle$, als men de krommen–reeks overal dicht maakt, onbepaalde nadering krijgen van punten in R_n, terwijl de bijbehoorende krommen elkaar *in hun rij* niet onbepaald naderen. Daarvoor moet dus reeds voor R_2 een betere methode worden gezocht.

....

(De pagina begint met een onleesbare doorhaling) **IX-E**

De stelling van het uitgesloten midden.

Empirisch Een roos is rood of niet rood; d.w.z. bij het bekijken der roos is het al of niet mogelijk een wiskundig systeem te projecteeren, dat aan de andere reeds $\langle$in de wereld$\rangle$ gebruikelijke systemen gebonden is door benaderd analoge beteekenissen van 'roos' en 'rood'.

Dit zijn in de empirie (d.w.z. bij empirisch uit te maken oordeelen) echter slechts wiskundige systemen van enkele nevenschikking $\langle$causale volgreeksen$\rangle$ (analoog met de klankrij één–twee–drie),⟨24⟩ waarbij nooit op *wiskundige* onmogelijkheid wordt gestuit. Het kan zijn, dat door reeds gevormde hypothesen de te verrichten experimenten zeer samengesteld worden; dat doet aan de zaak niets af; het *ja* of *neen*, dat exact wordt beantwoord, heeft slechts geldigheid voor een benaderde beteekenis van de onderzochte vraag. De een zal *ja*, de ander

⟨24⟩ (analoog met de klankrij één–twee–drie ⟦of althans ...*(onleesb.)* ingewikkeld systeem⟧)

neen kunnen zeggen, maar zeker ieder een van beide. Tenzij: de experimenten onuitvoerbaar worden, zonder zekerheid, ooit uitvoerbaar te zullen zijn. Dan geldt de stelling niet.

Wiskundig. Hier geldt de stelling in 't algemeen alles behalve. Immers het aantal probeeringen is ⟨in 't algem.⟩ ω, en alleen in sommige gevallen is die ω door inductie, d.w.z. overzicht van ω *gelijke* dingen, te beheerschen. Het *ja* of *neen* is dus in 't algemeen nooit op te lossen. (b.v. bij de ontwikkeling van π komen daar meer cijfers 3 dan 4, of omgekeerd?), en de stelling van het uitgesloten midden geldt niet. Ook is niet elke reeks òf convergent òf divergent; zuiverder uitgedrukt: òf convergent òf niet-convergent.

(kantlijn:) ⟨Men zoekt òf de invariabilitiet van p òf een invariant q, waarin de wisseling van p als element optreedt, zoodat die wisseling zich in de progressie onbepaald laat verschuiven.⟩

(doorgehaald:) ⟦Tusschen de n^{de} en de $n^{n^{de}}$ term is de speling òf $< \varepsilon$, òf $\Delta\varepsilon$. En hierbij kan ik n zoo groot, en ε zoo klein maken als ik wil. En de toepassingen van het principe van tertium non datur, die ik eventueel maak, kan ik altijd op analoge wijze omschrijven. Men kan dus voor de practijk (d.i. afleiden van onbekende probeer resultaten ⟨van 1 – n⟩ uit bekende dito, zoodat, als de eerste verricht zijn, de laatste niet meer verricht behoeven te worden) veilig het principe v.t.n.d. toepassen.

IX-F *(nog steeds doorgehaald)* Zal men nu ooit van een vraag kunnen bewijzen, *dat* ze nooit uitgemaakt kan worden? Neen, want dat zou moeten uit het ongerijmde. Men zou dus moeten zeggen: Gesteld, dat het was uitgemaakt in zin a en daaruit afleiden, tot een contradictie kwam. Dan zou echter bewezen zijn, dat *niet* a waar was; en de vraag bleef uitgemaakt.⟧

Onderscheid bij decimaalbreuken voor het n^{de} cijfer.

Met het onbepaald groot worden van n neemt het werk om uit n het n^{de} cijfer te bepalen niet onbepaald toe. Is nu b.v. het aantal vieren bij de ontwikkeling van π uit te drukken door een functie van n? Is dit te bewijzen, dan is hiermee de stelling v.t.n.d. eerst bewezen.

(kantlijn:) ⟨Hoe wil men probeeren, of er geen functie van een zekere (met een progressie) variabele bestaat, die op den duur invariant wordt ⟨waaruit de al of niet invariantie der var. volgt.⟩ Die functies zijn niet aftelbaar, dus zeker niet door inductie te beheerschen, dus de kwestie is niet door inductie uit te maken.⟩

....

(volgt nog een onleesbaar doorgehaalde kanlijntoevoeging.)

....

Als ik een stelling kan aantoonen over ω, heb ik een *invariant* (b.v. het woord *grooter dan*, bij voortdurende probeerkeuze tusschen *grooter dan* en *kleiner dan*) aangetoond bij den voortgang der getallenrij. Maar hoe moet ik nu aantoonen, dat een of ander ding *niet invariant* is op den duur? Alleen door een ander ding, dat er aan verbonden is, en dat *wel invariant* is.⟨25⟩

Kunnen we voor een invloed (b.v. op het relatief aantal cijfers 1 bij benadering door duaalbreuk van π) aantoonen, dat hij (discontinu) ten slotte gaat naderen tot een continue, die onder het bereik der probabiliteit valt dan is *daar* zeker geen invariant. Is dit b.v. het geval voor het aantal ondeelbare getallen ten opzichte van de limietformule, dan kunnen we niet zeggen, of hij ten slotte al of niet blijvend in een bepaalde zin van de limiet afwijkt.

(kantlijn:) ⟨Is elk discontinu vraagstuk soms in een continue om te zetten? Dan weer geldt de causaliteit, dus de inductie, dus de st. v. t.n.d. Echter voor het precieze toch weer niet⟩

....

Stellingen **IX-G**

1^0 Clausius (*die Potentiaalfunction und das Potential*, 4^e Auflage, Leipzig 1835 p. 127.) ⟨legt,⟩ opdat $V = \frac{1}{4}\pi \int \frac{\nabla^2 V}{r}$ zij,⟨26⟩ aan de functie V o.a. de voorwaarde op dat $\nabla^2 V$ binnen een geheel in het eindige gelegen ruimte willekeurige eindige waarden kan hebben, maar buiten die ruimte tot aan 't oneind. overal 0 is.

Van deze 4 voorwaarden zij de laatste 3 overbodig.

(kantlijn:) ⟨1^0 $\lim V = 0$.
2^0 $\lim R\frac{dV}{dR} = 0$.
3^0 V en haar eerste en tweede afgeleide mogen nergens oneind. worden.[48]⟩

2^0 Ibid p. 125 leidt Clausius ⟨het eenduidig bepaald zijn der⟩ Green'sche functies u ⟨af uit de p. 118 gestelde voorwaarden,⟩ dat in 't oneindige $\lim Ru$ en $\lim R^2 \frac{\partial u}{\partial R}$ niet oneindig ⟨groot mogen⟩ worden; *(onleesb. doorhaling)*

Voldoende is hier echter de voorwaarde, dat u in 't oneindige 0 moet worden.⟨27⟩[49]

3^0 In Salmon-Fiedler, *Anal. Geometrie des Raumes* II p. 61 staat ten onrechte: Jede ebene Krümmungslinie ist geodätisch'.

4^0 De beide formules van Maxwell (*rot.* en *div.*) zijn in één quaternionformule

---

⟨25⟩ Alleen door een ander ding, dat er aan verbonden is, en dat *wel invariant* is. ⟦Gesteld nu alle invarianten (... invarianten) zijn af te tellen, dan ook alle beslist niet-invarianten⟧

⟨26⟩ 1^0 ⟦De voorwaarde, die⟧ Clausius ⟦aan een functie u oplegt, opdat $V = \frac{1}{4}\pi \int \frac{\nabla^2 V}{r}$ zij⟧ (*die Potentiaalfunction und das Potential*, 4^e Auflage, Leipzig 1835 p. 127.), ⟦aan de functie die v oplegt,⟧ opdat $V = \frac{1}{4}\pi \int \frac{\nabla^2 V}{r}$ zij,

⟨27⟩ Voldoende is hier echter de voorwaarde, dat u in 't oneindige 0 ⟦wordt⟧ moet worden.

samen te vatten.

5^0 De redeneeringen van Euclides zijn als redeneeringen eerst gerechtvaardigd nadat de Cartesiaansche opbouw is uitgevonden.

⟨Immers de *gevoels*entiteiten, waarmee wordt geredeneerd zouden kleur wisseling kunnen krijgen en dan zouden Kantische antinomieën kunnen komen.⟩

6^0 In Mathem. Ann. 61 bewijst Blumental ⟨met behulp⟩ van de eindigheid en differentieerbaarheid *(van)* vectordistributies, die in 't oneindige 0 worden,[50] dat ze zijn

$$= \nabla_{2} \int \frac{\nabla_{1} V}{r} + \nabla_{1} \int \frac{\nabla_{2} V}{r} + \ldots$$

Deze stelling *(onleesb. doorhaling)* is onafhankelijk van de eindigheid en de differentieerbaarheid.[51]

7^0 Hij bewijst daar tevens, dat de solenoidale en de wervelvrije vector,[⟨28⟩] waarin door de genoemde formule de distributie verdeeld wordt, beide ⟨op een vectorieele constante na⟩ eenduidig bepaald zijn door hun rotatie resp. divergentie.

Deze stelling is een bijzonder geval van de meer algemeene.

⟨Een⟩ scalardistributie,[⟨29⟩] in 't oneindige van lagere orde dan r^{n+1}, is door haar divergentie bepaald op bolfuncties na ⟨van⟩ ten hoogste de n^{de} orde.[⟨30⟩]

8^0 Tusschen phenomenologische en theoretische beschouwingen in de natuurkunde bestaat geen scherpe grens.[52]

IX-H

Verbeteringen

Hoofdst. 1.

De Hilbertsche 'Basiswinkel im gleichsch. Dreieck'; ik schreef: een hoek laat zich wel omleggen, een gelijkb. driehoek niet; nu is van omleggen heelemaal geen sprake in het platte vlak; ik moet dus van een hoek heelemaal niet spreken, en van den gelijkb. driehoek gewoon zeggen, dat zijn basishoeken ongelijk zijn.[⟨31⟩]

(kantlijn:) ⟨Daarentegen dient uitdrukkelijk opgemerkt, dat bij de Helmholtz'sche spiraal *niet*, bij de Hilbertsche *wel* een segment zich laat omleggen.⟩

. . . .

Toevoegen bij de inleiding tot Hilbert Grundl. M.A.: ook al is het misschien niet onwaarschijnlijk, dat vaak de differentieerbaarheid uit de groepeigenschap volgt. ⟨Hilbert vervangt overigens ook de differentieerbaarheid door uniformiteit.⟩

. . . .

⟨28⟩ *Gelardeerd met enkele onleesbare doorhalingen.*

⟨29⟩ ⟦Is van een scalardistributie,

⟨30⟩ is door haar divergentie bepaald op bolfuncties na ⟦van⟧ ten hoogste ⟦van⟧ de n^{de} orde.

⟨31⟩ ik moet dus van een ⟦ongelijkb.⟧ hoek heelemaal niet spreken, en van den gelijkb. driehoek gewoon zeggen, dat zijn basishoeken ongelijk zijn.

Toevoeging bij Hamel: hoe ik nu in 't algemeen uit een Cart. meetkunde stelsels pseudo-rechte lijnen krijg.

....

Continuum niet te beelden door discrete woorden, want die geven discrete voorstellingen, tenzij juist door het woord 'continuum' verbonden.

....

Continuumprobleem door Cantor reeds in 1873 gesteld.

....

Klein ongelijk, waar hij zegt, dat Lie zich tot anal. functies mocht beperken. (cf. IX, ongenumm. pag.)

....

Onderzoeken in Crelle 70, 71, 72 (1869, 1870), of Christoffel's en Lipschitz' onderzoekingen werkelijk kunnen worden veroordeeld.

....

Mannoury **IX-I**

Er zijn twee mogelijkheden;

òf je hebt het over levende voorstellingen, dan zijn er geen onherleidbare begrippen; hier is niet alleen het continuum ⟨en het oneindige⟩ onherleidbaar, maar al het andere.

òf je hebt het discrete taalgebouw; en daar heb je genoeg aan *ding* en *relatie*, dus aan *eenheid* en *nog eens* van pag. 180. Daar treedt ook b.v. de definitie van oneindig, en van het Cantorsche (discrete) continuum op, die evenwel de levende begrippen van continu en oneindig niet bevatten. *Enzoovoort* bevat hier behalve de definitie van oneindig (die herleidbaar is) in 'zoo' een relatie tusschen relaties, eveneens onherleidbaar.

Antwoord

Van de levende voorstellingen wordt toegegeven.[⟨32⟩] Maar de wiskunde bestaat nòch in de levende voorstellingen, nòch in het taalgebouw, maar in de intuitieve constructie in het intellect, die onafhankelijk is van levende voorstellingen aan den eenen kant, en van de taal aan den anderen kant. Ik heb trachten toe te lichten, dat hier de elementair-

operatie, het scheppen der veeleenigheid het niet meer te verkleinen element is, en dat daar èn *eenheid* èn *nog eens* èn *continuum* èn *enzoovoort* (d.w.z. niet die woorden, maar de er door gewekte levende voorstellingen) niet uit zijn weg te

⟨32⟩ Van de levende voorstellingen wordt toegegeven. ⟦Van het taalgebouw ook, maar geen van beide⟧

denken, dus als onherleidbare voorstellingen moeten worden verklaard. Van *eenheid* behoeft dat geen nadere toelichting, van *nog eens* evenmin. Maar toch ook niet de voorstelling, dat de eerste en de tweede eenheid worden *samen* gedacht, dat dus bij het denken van de tweede ook de eerste nog in de voorstelling nawerkt. Die samenhoudingsvoorstelling, continentievoorstelling geeft nu direct de opvolging van drie dingen,[33] n.l. eerste ding – samenhoudingsmedium – tweede ding; letterlijk vertaald: primum – continuum – secundum[34] (vgl. Veroneses elementairformuleering: Ich denke zuerst ein Ding, nachher ein Ding); we kunnen ook zeggen: eerste ding – asymmetrische relatie – tweede ding; in andere klanken: eerste ding – tweede ding – derde ding; we hebben dus als onafscheidelijk attribuut van de mogelijkheid van samendenken van *twee* herkend de mogelijkheid van tusschenvoeging, die steeds verder kan worden voortgezet, zonder dat het samenhoudingsmedium ooit geheel zal worden overdekt door elementen. Op dezelfde wijze is onafscheidelijk attribuut van de samendenkingsintuitie of continuumintuitie de oneindige voortzetbaarheid; zooals elk ding kan worden gevolgd door een ander, zoo ook natuurlijk het bij het eerste genomen tweede ding. Al deze dingen zijn dus onherleidbaar, want zijn verschillende facetten van het kleinste element van den wiskundigen opbouw.

IX-J De geachte opponens heeft echter niet de wiskunde zelf,[35] maar het begeleidend taalgebouw op het oog, en de vraag blijft vooreerst of hij recht heeft, met eenigen zin de wiskunde door dat taalgebouw te vervangen, en ten tweede of in dat taalgebouw werkelijk met de beide elementen *eenheid* en *nog eens* kan worden volstaan. Natuurlijk hebben we nu nog maar alleen de **woorden** 'continuum' en 'enzoovoort', niet meer de **begrippen**. Daar we in de taal slechts een eindig aantal woorden gebruiken, kan in het taalgebouw het begrip 'enzoovoort' werkelijk worden gemist, en hebben we slechts te maken met een eindig aantal dingen, door een eindig aantal relaties gebonden. Maar door relaties gebonden dingen vooronderstellen de intuitie: eerste ding–tijdsverband–tweede ding, zonder de continuumintuitie gaat het hier dus evenmin, als in de wiskunde zelf. We geven dus toe, dat in het taalgebouw, zooals het b.v. in het logisch teekenschrift, staat opgebouwd, de intuitie *enzoovoort* kan worden gemist, en het woord *enzoovoort* herleidbaar is; de intuitie van *continuum* kan echter niet worden gemist en het woord *continuum* ⟨in onzen zin⟩ blijft onherleidbaar; in den Cantorschen zin wordt het herleidbaar, maar daar krijgt het de zinloosheid van zooveele woorden der wisk. logica.

Maar nu: hoe komt u er toe, om het taalgebouw zoo op te trekken als u doet? Hoe komt u er toe, te zeggen:

---

[33] Die samenhoudingsvoorstelling, ⟦d.w.z. ding – nog⟧ continentievoorstelling geeft nu direct de opvolging van drie dingen,

[34] letterlijk vertaald: ⟦eerste ding⟧ primum – continuum – secundum

[35] De geachte opponens heeft echter niet de ⟦door mij bedoelde wiskunde⟧ wiskunde zelf,

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{c} \underbrace{\underbrace{\underline{\text{a voor b}}}\quad\underbrace{\underline{\text{b voor c}}}} \\ \\ \downarrow \\ \\ \boxed{\text{(avant)}} \\ \\ \text{a voor c} \end{array}\right.$$

$$(\beta)\left\{\begin{array}{c} \text{of: a voor c} \\ \\ \downarrow \\ \\ \boxed{\text{parallel}} \\ \overbrace{\underbrace{\overbrace{\text{a voor b}}}\quad\underbrace{\overbrace{\text{b voor c}}}} \end{array}\right.$$

en op deze wijze eenigen tijd voort te bouwen, waarbij het blijkt, dat nooit p voor q en tegelijk q voor p is af te leiden, zoodat de asymmetrie der relatie *voor* blijft gehandhaafd. M.a.w. het axioma der asymmetrie intact blijft? En evenzoo dat der transitiviteit?

Omdat u hier schijnbaar vrij *nabouwt* de begeleidende taal van intuitieve puntsystemen op het continuum, ⟨of de tijdsintuitie⟩ , daardoor komt het dat uw taalgebouwen *leven* en meer zijn, dan zinlooze figuurtjes of gestamel.[53]

Ging u anders bouwen zóó, dat de asymmetrie ⟨of transitiviteit⟩ niet gehandhaafd bleef, dan zou u het systeem verwerpen, contradictoor vinden. Waarom? Op grond van de wiskundige intuitie, die u van te voren hadt. De niet-contradictoriteit van uw symbolisch systeem is dus slechts een afspiegeling van het *bestaan* van het er door afgebeelde wiskundig systeem. *(onleesbare doorhaling)*

Intusschen, zelfs al wilde men de wiskundige intuitie als *leiding* bij het logisch teekenschrift erkennen, maar toch volhouden, dat een teekensysteem gewettigd is, als het maar niet–contradictoor is, dan zou ook die illusie nog moeten verdwijnen, want niet–contradictoriteit waarborgt geen wiskundig bestaan.

Wat u ten slotte zegt, dat enzoovoort in *zoo* slechts een relatie tusschen **IX-K**
relaties en niet een relatie zelf ziet, is geloof ik evenmin vol te houden. Wiskunde zou niet kunnen bestaan, als ik niet meermalen weer *hetzelfde* ding kon denken, b.v. eerst Jan, dan Piet, en dan weer diezelfde Jan. Zoo kan ik ook meermalen *dezelfde* relatie denken, en zoo bestaat wel degelijk tusschen 5 en 7 dezelfde relatie als tusschen 7 en 9, n.l. '+2 ='.

En nog dit: Wil u voor uw teekensysteem de niet–contradictoriteit *bewijzen*, dan heeft u de intuitie *enzoovoort*, die tot nog toe kon worden gemist, weer noodig.

. . . .

Barrau

Het *samendenken van twee punten* is het eenige wiskundige.

Dat de irrationale punten werkelijk bestaan, blijkt pas, *nadat* u ze hebt geconstrueerd. Van te vooren het *bestaan van alle* irrationale punten te anticipeeren is wel optimistisch, maar ongerechtvaardigd.

Uw transformaties van het continuum zijn voor mij slechts transformaties van de daarop gedefinieerde punten.

Wat bedoelt ge met 'matrix'? Niet de verzameling der punten, iets anders dan de punten, maar dat kan met de punten geen wiskundige relatie hebben, daar de wiskunde alleen relaties tusschen punten kan definieeren.

Antwoord.

Reeds den vorigen opponent antwoordde ik, en in het proefschrift wordt herhaaldelijk uitgesproken, dat het discrete continuum van Cantor niet bestaat; hierin ga ik volkomen met u mee.

Maar het door mij bedoelde continuum is niets dan de intuitie van samenhouding, en die verschijnt in de wiskunde slechts als ding–tijdsovergang–ding, of ding–asymmetrische relatie–ding. Het samendenken in symmetrische relatie, d.i. zonder volgorde, dat u schijnt te bedoelen, is uit het vorige afgeleid. Als u b.v. zegt: ik denk de twee *samen*, dan voert u – en uw woorden begeleiden dit zeer duidelijk – een derde ding, het 'samen zijn' in, waaraan u beide dingen, die te voren waren gegeven, door een asymmetrische relatie verbindt. U kunt dus niet samen denken zonder meer, maar *moet* samen denken in den tijd als punt–tijdscontinuum–punt, ⟨en hierna is de schepping *twee* zonder meer of card. get. *twee* secundair,⟩ en het is duidelijk, dat ik deze intuitie matrix kan noemen van meer punten, dan ik feitelijk heb geschapen, wegens de *(onleesb. doorh.)* in één oogenblik te overziene schepping van het ordetype ⟨ω of het ordetype⟩ η, en dan wegens de in één oogenblik te voelen vrijheid bij het scheppen der aftelbaar onaffe verzamenling,⟨36⟩ waarvan *alle* elementen aan den eisch, op het continuum te liggen, voldoen. Op die manier is het continuum, hoe paradox dat ook voor sommigen moge klinken, een *matrix* van nog niet bestaande punten; wat kunt u daar overigens tegen hebben?

Kan van het ordetype ω niet hetzelfde worden gezegd?

Intuitief zie ik van het continuum, dat nog *onbekende* gedetermineerde benaderingen er op liggen, als zoodanig is het *matrix* van nog ongeboren punten.

⟨36⟩en dan wegens de in één oogenblik te voelen vrijheid ⟦die wordt gevoeld⟧ bij het scheppen der aftelbaar onaffe verzamenling, (vgl. mijn bewijs op pag. 9). Het bestaat dus onafhankelijk ‖ van de er op te **IX-L** bouwen punten, is dus ook heel iets anders dan de verzameling van die punten; immers dan zou zijn schepping op die van de punten volgen.

Men gaat uit, behalve van discrete dingen, van relaties daartusschen, en alle verschillende relaties zijn slechts mogelijk op grond van de oer–relatie, de asymmetrische band door het tijdscontinuum. Zelfs de woorden, die u spreekt, door allerlei relaties onderling gebonden, zijn ⟨daartoe noodzakelijk⟩ in de eerste plaats door de tijdsintuitie samengehouden klanken; niets meer dan dat zijn de *opvolgende* klanken één, twee, drie, . . .

Zelfs al zou het mogelijk zijn, uit de taal der wiskunde het woord *continuum* verwijderd te houden, wat zeer lange omschrijvingen zou noodig maken, en waardoor men zich zou moeten beperken tot eigenschappen over reeds geschapen punten en niet eigenschappen over nieuwe te scheppen punten zou anticipeeren, dan nòg zou men het begrip continuum, overal waar men meerdere dingen tegelijk beschouwt, dus in relatie tot elkaar beschouwt, m.a.w. overal waar men wiskunde doet, met zich meedragen.

Dat we nooit twee zonder meer denken, maar altijd twee, gebonden door een continuum, maakt ook dat men uit het cardin. getal *twee* vanzelf tot het cardin. getal *drie* komt:

òf zoo: één – twee

$$\text{één} \;-\; \left.\begin{array}{c}\text{twee}\\[1em] \text{een}\end{array}\right\} - \text{twee}$$

òf zoo: één – twee

één – tusschen – twee

Anders zou het na de mogelijkheid van het denken van *twee* weer een nieuw wonder zijn, dat men ook *drie* kan denken.

. . . .

. . . .

Notes

[1]Zie ook VI–28. Het betreft hier twee artikelen van Poincaré in de *Revue de Métaphysique et de Morale:*
Les mathématiques et la logique, het eerste in jaargang 13 (november 1905) en het tweede in jaargang 14 (januari 1906), over nieuwe ontwikkelingen in het grondslagen onderzoek van m.n. Couturat, Russell, Whitehead en Burali-Forti. Het eerste artikel behandelt voornamelijk Couturat en het tweede voornamelijk Hilberts Heidelberg lezing; zie hier vooral § 20.

[2]Verwijst naar Hilberts 'Heidelberg lezing' in de Franse vertaling; zie o.m. voetnoten bij VI–35 en VIII–33.

[3]Het opbouwen van de wiskunde; de verbeterde versie, na een hierboven doorgehaalde versie. Dit is Brouwers opvatting, zoals neergelegd in diverse artikelen; zie bijv. *Willen, Weten, Spreken,* (1932). De verschillende lagen van wiskunde en wiskundige taal en de regels van de laatste (de logica!) komen ook uitvoerig ter sprake in het derde hoofdstuk van Brouwers dissertatie, pag. 169 e.v. De in dit negende aantekenschrift gegeven tekst is ongetwijfeld een eerste schets hiervoor.

[4]Enseignemets Mathématiques 7,2, onder V ...

[5]Over de taal in de wiskunde. Taal als niet logisch, zie bijv. het genoemde artikel *Willen, Weten, Spreken.*

[6]Zie voetnoot over Hilbert bij IX–1

[7]Tot en met pagina 14 van dit schrift worden de grondslagen van de (projectieve) meetkunde besproken.

[8]Hamel in M.A. 57: het artikel *Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind.*

[9]Die differentiaalvergelijking hangt af van de soort meetkunde (van de eenheid van lengte). Zie het in de vorige voetnoot genoemde artikel van Hamel, § 2.

[10]Brouwer verwijst naar Klein, *Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie,* editie 1893, over de projectieve meetkunde. De meest algemene projectieve transformatie is $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

[11]De verzamelingstheoretische constructie van de 'niet-Pascalse geometrie': zie Hilberts Festschrift, hoofdstuk VI, § 34, waar de stelling van Pascal (zie § 14 van het Festschrift) niet geldt.

[12]Klein, M.A. 6: *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* De meetkunde wordt bepaald door de transformatie groep. Zie ook Hilberts Festschrift.

[13]Voor de 'Streckenrechnung' van Hilbert: zie diens Festschrift § 15.
Voor de 'Endenrechnung', zie Anhang III van het Festschrift: *Neue Begründung der Bolyai-Lobatschevski Geometrie.*

[14]Schoenflies in de *Bericht,* pag. 46 spreekt over de hogere getalklassen (hoofdstuk 7). Het bewijs van de bewering dat elk getal van Z (de tweede getalklasse) tot E (de klasse, die we met behulp van de twee Erzeugungsprinzipien krijgen) behoort, is volgens Brouwer fout.
Schoenflies stelt de stelling als volgt (pag. 45):
'Um die oben angegebene Definition der zweiten Zahlenklasse als berechtigt zu erweisen, ist es zu zeigen, daß das zweite Erzeugungsprinzip für die Bestimmung der zweiten Zahlenklasse characteristisch ist. Wir zeigen zunächst, daß wir mit diesem Prinzip in Verbindung mit dem ersten Erzeugungsprinzip zu jeder Zahl der zweiten Zahlenklasse gelangen.'
De twee 'Erzeugungsprinzipe' zijn die van Cantor.

[15]§ 4 handelt over de stijgende en dalende fundamentaalrij en over 'Hauptelemente' van een verzameling en het grenselement van een rij.

[16]Dit stuk van Hamel is een uittreksel van zijn dissertatie uit 1901, die bovendien door hem bewerkt is ten behoeve van de publicatie in de Mathematische Annalen.
Voor het monodromie-axioma van Helmholtz, zie Russell *Fondements de la Géométrie,* pag. 31.
Zie ook Hamel, M.A. 57 *Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind.*

[17]Hilbert, *Festschrift*, Anhang IV, een publicatie uit M.A. 46.

Hamel, zie zijn dissertatie en M.A. 57.

[18]Hamel, M.A. 57 en Hilbert, eveneens uit M.A. 57.

[19]Voor de 'getallengeverij van Klein': zie Klein, *Nicht–Eucl.* t. 1 pag. 337 e.v.
Voor Hilberts 'Streckenrechnung', zie *Grundlagen der Geometrie* (zijn 'Festschrift'), § 15.
Voor Schur: zie Mathematische Annalen 55, *Über die Grundlagen der Geometrie.*

[20]Voor de genoemde verwijzing naar Darboux, Mathematische Annalen 17, zie zijn artikel: *Sur le théorème fondamental de la Géometrie projective,* pag. 55 e.v.
Voor Couturat, zie *Les Principes des Mathématiques*, § C *la Mesure des Grandeurs.*

[21]Voor het L.-Z. bewijs van de projectieve hoofdstelling: Zie Klein, *Nicht–Eucl.* pag. 308. Er zijn bewijzen van:
– von Staudt, niet toereikend volgens Brouwer, zie de tekst hierboven.
– Lüroth–Zeuthen, zie M.A. 7, § 2 van een artikel van Klein *Nachtrag zu dem*

'Zweiten Aufsatze über nicht Euklidische Geometrie', (dit artikel, waarnaar verwezen wordt, verscheen in M.A. 6, pag. 112 e.v.).
– Darboux, M.A. 17
– Schur M.A. 18.

[22]Dit gaat dus over de projectieve hoofdstelling. Voor Kleins bezwaar tegen het bewijs van Lüroth: zie hierboven in de tekst. Darboux toonde in de Mathematische Annalen 17 aan dat Kleins bezwaar niet geldt.

[23]Brouwers analyse van de projectieve hoofdstelling. Voor Kleins getallen: zie pag. 318 e.v. van *Nicht Eucl.*

[24]Hilbert, Enseignements 7. Zie voetnoten bij VI–35, VIII–33, VIII–35 en IX–1.

[25]Hilbert, Enseign. 7; zie vorige voetnoot.

[26]Poincaré, *La Valeur de la Science,* hoofdstuk XI, *La Science et la Réalité,* § 5 *Contingence et Déterminisme,* over het postuleren van functies, die de natuur beschrijven en die onbegrensd interpoleerbaar zijn.

[27]De vraag naar de diffrerentieerbaarheid op atomair niveau, waar de natuur discontinu wordt.

[28]Een (gedeeltelijk) citaat uit pag. 242 onderaan, pag. 243 bovenaan van *La Valeur de la Science,* hoofdstuk X, *La Science, est-elle artificielle?* Hiervan § 4, *Le nominalisme et l'invariant universel.* De Euclidische ruimte wordt hier door Poincaré als contingent gesteld, als het resultaat van een keuze.

[29]§ 6 van het tiende hoofdstuk van *La Valeur …*getiteld *Objectivité de la Science.* Een esthetische emotie bij personen A en B bij observereing van hetzelfde object of van dezelfde gebeurtenis is er wel bij beiden, maar de kwaliteit van onze zintuigelijke waarneming hoeft dan niet bij beiden gelijk te zijn.

[30]Op deze en de volgende bladzijde wordt wiskunde algemeen filosofisch beschouwd en tamelijk negatief beoordeeld.

[31]Voor Veroneses intuïtieve opbouw, zie zijn *Grundzüge der Geometrie von mehrere Dimensionen.*

[32]Goethe, *Gespräche mit Eckermann.* Dit gedeelte van Eckermann bevat enkele brieven van Goethe aan Eckermann, die de laatste tijdens zijn reizen ontving. Het citaat staat in de derde brief, geschreven in Weimar, 18 oktober 1830.

[33]Over de vermenigvuldigingsgroep, zoals uitgewerkt in de dissertatie, pag. 20 e.v.

[34]Brouwers opbouw van het systeem van de natuurlijke getallen, zoals dat

ook uitgelegd wordt in de dissertatie: De twee–eenheid van continu en discreet.

[35]De gehele volgende pagina behandelt potentiaaltheorie.

[36]Over de polemiek in de *Revue de Métaphysique et de Morale* tussen Russell, Poincaré, Couturat e.a. naar aanleiding van Russells *Principles of Mathematics.*

[37]Een enkele paragraaf potentiaaltheorie temidden van de grondslagendiscussie.

[38]'Jablonowski Gesellschaft Math. Ann.' Dit staat voor *Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1906* in de M.A. 57. (In de M.A. 64 stond de opgave voor het jaar 1910, en in M.A. 71 die voor het jaar 1913.

[39]D.w.z. dat ω alleen op te bouwen is op het tijdscontinuüm. Dit is het idee zoals uitgewerkt in de dissertatie: de ur-intuïtie van continu en discreet.

[40]Vahlen, *Abstrakte Geometrie*, hoofdstuk 1, *Die Grundlagen der Arithmetik.* Het staat er, zolas vaker, niet letterlijk.

[41]Dit verwijst naar § 18 van het eerste hoofdstuk. Zie pag. 4 van de 1940 uitgave.

[42]Wederom een geïsoleerde paragraaf met enkele opmerkingen over potentiaaltheorie.

[43]Deze hele pagina gaat over de decimaalontwikkeling van π. Deze decimaalontwikkeling komt later vele malen terug in Brouwers 'tegenvoorbeelden'.

[44]Elk getal van de tweede getalklasse kan afgebeeld worden op ω, dat wil zeggen, het blijft aftelbaar, is van cardinaliteit $\aleph_0$.

[45]Deze laatste pagina's uit het laatste schrift zijn kennelijk nog nuttig gemaakt voor korte aantekeningen die gemaakt zijn na de promotie van 1907; zij stammen uit de jaren kort daarna.
Over de structuur der perfecte puntverzamelingen, is een publicatie van Brouwer uit 1910 in de KNAW verslagen nummer 18.
De verwijzing naar Baire slaat op diens *Leçons sur les fonctions continus,* uit 1905.
Mahlo *Leipziger Berichte 09* en Denjoy *Compte Rendu 09* lijken op publicaties in die periodieken uit 1909 te slaan. Mahlo publiceerde over verzamelingen van grote cardinaalgetallen.

[46]Schoenflies II, hoofdstuk 5 § 3 klopt met de uitgave uit 1908.

[47]*Zur Analysus situs* is een publicatie van Brouwer uit 1910 (C) in de M.A. 68.

[48] Zie st. XIV der dissertatie

[49]Zie st. XV der dissertatie

[50]In Mathem. Ann. 61 bewijst Blumental ⟦op grond⟧ van de eindigheid en differentieerbaarheid ⟦der⟧ vectordistributies, die in 't oneindige 0 worden,

[51]Zie st. XVI van de dissertatie.

[52]Zie st. VI van de dissertatie.

[53]dan zinlooze figuurtjes of ⟦stamelingen⟧ gestamel.

Chapter 10

De Synopsis van de negen schriften

10.1 Axiomatische Grondslagen

– Bij anderen de wiskunde bekeken, blijkt een hersenschim en hol, natuurlijk! I 7.
– Het ”er mee uitscheiden”. I 7.
– Toch moet dat bekijken van anderen het uitgangspunt zijn. I 9.
– De oneindig voortl[opende] reeks kunnen wij in gedachten construeeren, om daarop onze eindige systemen als deelsystemen te betrekken. Het is alweer een intuitief denkinstrument. Het continuum is het “andere” van het plaatsen van tijdstippen; en op een andere manier is ook het oneindige het ”andere” daarvan. Zoo komen ze intuitief, dat is tegen–wiskundig; maar de gevorderde wiskunde neemt ook hen op in het wiskundig extract der werkelijkheid. Den nagang van het middelselsel heel iets anders dan het nieuwe ijdele middelsysteem, dat het axiomatisch is, zooals bij Dedekind. I 25.
– Oude logica op zichzelf onvoldoende, maar ze was ook slechts essentieel een hulpmiddel, dus onzin te willen volmaken. I 26.
– Feiten en waarheden, ook logische, zijn er niet. I 26.
– Logische grondslagen bewijs, dat het bedrijf niet meer centraal was. I 27.
– Dedekind bij zijn voorbeeld, bouwt feitelijk ω op. I 27.
– Iets anders dan het opbouwen van het systeem van axioma’s, zijn de axioma’s als dwangbuis bij het bouwen (het vooraf eischen stellen aan het te bouwene, zooals ook wel bij huizen), waardoor uniciteit blijkt. Het bouwen zelf is dan nog een tweede kwestie. I 27 onderaan.
– De gewone axiom[atische] opbouw echter is een schim, geeft geen genetische en geen moreele centralizeering. I 27.
– Het axiomatisch systeem van symbolen dikwijls nuttig voor andere deelen der wiskunde, heeft dus wel vaak eenige generalizeerende kracht, nu ja. I 28.
– Even dwaas als het is in een boom slechts een gewicht aan planken te zien,

even eenzijdig in de wiskunde een axiomasysteem. [Dit is het bekijken der wiskunde bij anderen zoals de medicijnen het lichaam van anderen bekijken, even hopeloos. I 29.
– Als je weet met de axiom[atische] grondsl[agen] geen grondsl[agen] te vinden, wordt de zaak erg oninteressant, maar in ons leven van bepaaldheden gaat alles. I 30.
– De axiom[atische] wisk[unde] is een eindige combinatoriek. – Ook Dedekind bewijst alleen uniciteit. "Afbeelden", wat is het al veel verder begrip, dan het getallenhuis zelf. Eigenaardig was, dat Mannoury in zoveel syllogismes het getal afleidde. I 38.
– Daar het systeem allerlei facetten, allerlei axiom[atische] (symbol[ische]) opbouwing van hetz[elfde] systeem. Voorbeelden. Maar dan ook geen grondslagen. Bij grondslagen zou geen keus zijn. I 38.
– Onlevend, want werkt niet op tegendeel. I 39.
– Het syllogisme is gewoon voorbeeld van: het bouwen gaat niet anders, dan zoo. Het berust op den Widerspruch. Zoo ook als ik redeneer over mijn nog te bouwen niet–Eucl[idisch] krachtveld dat bepaald door rot. en div., ik begin dan vast een buitenwerk te bouwen en merk daar al onmogelijkheden. De dwaasheid dat R_∞ primair zou zijn komt ook uit die dwaze axiom[atische] grondsl[agen]. cf. II 14.
– De axiom[atische] gr[ondslagen] zijn de wisk[undig] aangestaarde toevallige gedragswetten van de combinaties der woordklanken, die worden gebruikt in verstandhouding over de wisk[undige] gebouwen. Waarom de axiom[atische] grondsl[agen] vaak nodig. II 30.
– Logica niet alleen niet achter het leven (immers is wisk[undige] abstractie uit dat leven zelf) en levende observatie, maar ook niet achter wisk[undige] observatie, waarmee zij gelijk staat, te stellen. II 30.
– Een "Existenzbeweis" is niets, dan de inbouw van het logisch systeem in een wisk[undig] systeem. Daarmee is dan meteen bewezen, dat het logisch gebouw.
– Fouten van Russell en Peano, die Hilbert niet heeft (de eersten kunnen op contradicties stuiten; en ze kunnen ook niet zeggen: "Ik neem als wiskundige dingen alleen aan de contradictievrije", want ze beweren, dat de gronden zelf zitten in hun symbolisme, ze willen nl. de gewone wiskunde verbeteren en aanvullen; namen ze ze alleen als parallel met de bekende wiskunde, d.i. pretendeerden ze daaraan geen dienst te bewijzen, dan zouden ze nooit aan die contradictore dingen zijn gekomen.) – De fout van Dedekinds "unendlich", die niet opgebouwd kan worden. Maar gesteld hij kan zijn dingen wél opbouwen: dán loopen zijn axiom[atische] redeneeringen parallel met bouw–redeneeringen, en zijn de laatste te verkiezen. II 30.
– Lob[atschefsky] – Beltrami. II 31.
– Zelden onafh[ankelijkheids]bewijs van onafh[ankelijke] axioma's. I1 31.
– Alleen postulaten goed, die vrije bouwsteenen. II 33.
– Axiomatizeering door de woorden. II 35.
– Het "schaffe Künstler, rede nicht". II 38.
– Het logisch redeneeren over de transf[iniete] get[allen] ongeoorloofd. III 3.
– Hoofdst[elling] rekenk[unde]. III 10.

– Axiom[atische] wisk[unde] tot vereenzijd[iging]; zo goed als de staat, de axiom[atische] samenleving. De vrije opbouw resp. vrije passie wreekt zich toch, en dan vervorming. III 13.
– Niet spreken over niet opgebouwde machtigheid. III 16.
– Mengendefinities en class of classes van Russell. III 17.
– Met de axiom[atische] wisk[unde] hangt samen niet architektonische maar het proefondervindelijke bedrijf ervan, d.w.z. dat met wisk[unde] 1^e orde handelt als scheikunde met de stoffen. III 18.
– De alternatief (wèl of niet; liegen of waarh[eid] spreken) kan ik alleen stellen voor hetgeen ik zelf heb opgebouwd. Want die alternatief is het àl of niet mogelijk zijn van een bouw in een bouw. Want mijn eigen opbouwsels (bepaald door gestelde voorwaarden) zijn in het aftelbaar onaf zelfgebouwd systeem per sé of mogelijk of onmogelijk; al kan de empiricus of de bouw–oefening het niet altijd gauw uitmaken, of soms zelfs nooit uitmaken (wegens het aantal $\aleph_1$ der wegen). Maar voor de cretenzerparadox heeft de alternatief geen zin. III 18.
– Het puzzle–onderzoek van kleinigheden zonder centraliz[eering]. III 21.
– Het algemeene gebouwd op 't bijzondere, niet omgekeerd. III 34.
– De condenseering van de wereld tot wiskunde is Onhegelsch; evenzeer die van de wiskunde tot woorden, d.i. logische axioma's en stellingen. – Onzin te zeggen: "dekt zich logisch". IV 15.
– Van de geordende groepen (cf. Vahlen) Existenzbeweis eerst bij gew[one] getallen. IV 15.
– De axiom[atische] grondsl[agen] waarsch[ijnlijk] ontstaan, doordat de dwang–bouw nonchalant werd beschreven; de logistiek belette dat; en was zoo zelfs een goede contrôle voor dwalende geesten; maar voor vrije opbouw is de logistiek een onding. – Weiger althans aan mathem[atische] log[ica] mee te doen. IV 16.
– Verschil tusschen arithm[etische] en geom[etrische] axioma's. IV 16, 17.
– Redeneering die juist is, wordt onjuist, als men de wisk[unde] een orde verspringt, m.a.w. niet meer op den inhoud, maar op den vorm let. Zoo Euclides. Toch wordt die vorm weer juist, als we op de woorden letten. Zoo hangt ook het woord "juist" af van de bijgedachte. IV 17.
– Quaternionen niet primair aan gewone getallen. IV 17.
– Fout van Zermelo. IV 18.
– Fout van Dedekind. IV 18.
– Verbetering van Dedekind. IV 18.
– De abstracte veralgemeende redeneeringen worden geboren uit reeds aanwezige bepaalde veralgemeeningen. IV 19.
– Over de G.G.H. en het getal 2. IV 20.
– Over Existenzbeweise. IV 20.
– Symbolen–projectie bedriegelijk en eenzijdig. IV 24.
– Mannoury gebruikt in zijn redeneeringen de hoofdeig[enschap] der rekenk[unde] toch niet (al zou hij het mogen doen). (Dit correctie van iets boven). – Mannoury geeft geen Existenzbeweis. V 2.
– Math[ematische] Log[ica] en psychologie. V 6, 7.
– Math[ematische] log[ica] als contrôleren. V 2.
– Vahlen geen bouwdwang (hij bouwt niet). V 5.

– Wijst de math[ematische] inductie toch niet op de mogelijkheid, dingen als absoluut gelijk te denken, dus op de directheid van de hoofdst[elling] der rekenk[unde]? V 13.
– In elk geval kunnen we haar bewijzen; het is niet noodig, haar voorop te zetten. – Hoe de hoofdst[elling] der rek[enkunde] direct volgt uit de begeerte, die het tellen is. V 14,15.
– Hoe Dedekind bij zijn voorb[eeld] van oneindig inductie toepast. V 15.
– Geen syllogismen uit stellingen, waarbij ik niets kan denken. V 15.
– De 3 rangen van exactheid. V 16.
– Een niet–voorgestelde commut[atieve] relatie onzin. V 16.
– Niet spreken over "ruimte" of "niet", pas daarop je wiskunde niet toe. V 16.
– De foutieve overgang van empirisch feit tot onwiskundig logisch feit, waaruit de Russellse onzin. V 17.
– De oordelen in 1^e, 2^e en 3^e. V 18.
– De gewone logica vooronderstelt òf eindigen of opbouwbare getallen, òf gebieden met grenzen, dus continuiteit. – Citaat Grassmann. V 24.
– Veronese zegt, p. 126, dat het eerste axioma der meetkunde is, de mogelijkheid versch[illende] punten van elkaar te kunnen onderscheiden. Wat een futiliteit. Die mogelijkheid is een daad zelf, en in logica ga je uit van een stelling, niet van een daad. Daad is de logica zelf, het doen dat geen grond heeft.– Hoe weet Mannoury, dat GGH's en OGH's bestaan? V 29.
– Hoe men met inductie kan bouwen. V 29.
– Mannoury's bewijs met O.G.H, daar vervangt O.G.H. eenvoudig het gewoonlijk genoemde "enz."– Misbaksel van axiom[atische] behandeling, Vahlen p.178, zoo gek dat Dehn niet kon begrijpen dat zoiets bedoeld werd, en dacht, dat het fout was; dit overkomt in 't begin ieder bij zulke theorieën; naar aanl[eiding] hiervan de misschien mogelijke reductie der Peanistische axioma's, Schur M.A. 55 p.268. – Mathematische logica op zichzelf exact (geen misverstand mogelijk), in de toepassingen niet. VI 23,24.
– Bij het afleiden in de mathem[atische] logica zonder aan de beteekenis te denken, mist men alle leidende stimulans. – We moeten haar telkens weer geabstraheerd denken uit iets levends, en dat gaat alleen voor iets wiskundigs. VI 24,25.
– De wisk[unde] van geheel en deel. VI 25.
– Couturat over Hilbert. VI 26.
– Couturat over epistemologie. VI 26.
– Couturat over werkmethoden. VI 26.
– Over de Russellsche contradictie. VI 26,27.
– Citaat Couturat. VI 27.
– Citaat Russell. VI 27.
– Een definitie kan alleen zeker doel treffen binnen een reeds opgebouwd wisk[undig] systeem, cf. Russell. Princ. p.497. – Citaat Russell. VI 27.
– Hij leert nooit, wat je bij classes moet denken. VI 28.
– Defin[itie] van getal postuleert de abstractie (principe d'abstraction), de toepassing der wiskunde. VI 28.
– Citaat Couturat. VI 28.

– Peano met zijn primaire ∈ komt nog niet tot fouten, maar Russell door zijn primaire ∋ tot zijn contradicties.– Poincaré over Hilbert. VI 28.
– Citaat Poincaré. VI 29.
– Verdediging der logistiek. VI 29,30.
– Hoe de logistiek steeds nieuwe symbolen zal moeten invoeren. VI 30.
– Getal als klas van klassen. VI 31.
– Poincaré over definities. VI 31.
– idem over Hilbert. VI 31.
– Mathem[atische] log[ica] werkt niet naar 't hart terug. VI 31.
– Replâtrage overbodig. VI 31.
– Verklaarbaarheid der contradicties. VI 31.
– Symbolische formules niet toe te passen. VI 32.
– Citaat Poincaré. VI 32.
– Over Couturat. VI 32.
– Over de Russellsche contradictie. VI 33.
– Nog eens: Wisk[unde] niet af te leiden uit logische relaties. VI 35.
– De invoering van **V** (Couturat Princ p.12) mag niet eens binnen een wisk[undig] systeem, want "alle wisk[undige] waarheden" kan ik niet af denken. En dan verder is deze **V** der math[ematische] logica een andere als die staat in: p = (p = **V**), daar bestaan maar 2 gebieden **V** en **Λ**, en alles is identiek met een van beide; de stilzwijgende voor–conditie is daar: "in het werkelijk bestaande, eenige, afgebouwde wereldsysteem" (Cout. Principes, p.14). – Over de nulklas. VI 39.
– Citaat Couturat. VI 40.
– Het verschijnsel van de splitsbaarheid der axioma's heeft niets met de grondslagen te maken, zo goed als het iets toevalligs is, dat CO_2 is een oxyde en dan nog iets, en dat er ook andere oxyden mogelijk zijn. Vl 40.
– Russell legt de eindige getallen niet beter vast, dan Cantor. Vl 40.
– Hoe impliciet het werk der math[ematische] log[ica] al gedaan is. VlI 2.
– Math[ematisch] substr[aat] der logica. VlI 3.
– De matrices. VlI 3.
– Het ax[ioma] van Archim[edes]. VlI 3.
– De dwazen die niets merken dan een relatiesysteem. VlI 3.
– Axiom[atisch] systeem is combinatoriek. VlI 7.
– Naar aanl[eiding] van Hilbert–Festschrift. VlI 7.
– Hilbert über den Zahlbegriff geeft geen Existenzbeweis. VlI 18.
– Citaat Poincaré. Vll 20.
– Onzin van Hilbert p.90. Ens[eignement] over Frege. Vll 20.
– Fout op p.92 Ens[eignement] van Hilbert. Vll 20.
– Nooit te bewijzen, dat axioma's niets overtolligs bevatten. Vll 21.
– Onzin van Cantor. Vll 23.
– Wat het syllogisme is. Vll 24.
– Verband tusschen een symbolisch gebouw en zijn wisk[undig] origineel. Vll 24.
– mag niet en moet niet. Vll 24.
– Geen syllogismen beredeneeren. VII 24.

– Niet zeggen "a is waar". Vll 24.
– De stelling van een nieuw symbool Vlll 1.
– Alle alleen bij aftelbaar. Vlll 1.
– Ontkenning der intuitie. VIll 2.
– Citaat Couturat. Vlll 2.
– Hoe Couturat bouwt. Vlll 3.
– Relatie zonder meer. Vlll 4.
– Tegen Couturat. Vlll 11.
– Onmogelijkh[eid] om logistisch het int[uitieve] cont[inuum] na te bouwen. VIII 3.
– Couturat ziet de orde–intuitie in wisk[unde] van de 2^e orde op versch[illende] manieren, d.w.z. met versch[illende] woorden, die alle op hetz[elfde] neerkomen. cf opm[erking] Vlll 11.
– Log[ische] wetten alleen over het zelf opgebouwde. Vlll 19.
– Het bestaan der asymm[etrische] relatie. VIII 27.
– Over Unabh[ängigkeit], Vollst[ändigkeit] en Widerspruchslosigk[eit]. Vlll 21,32 (cf. Vll 21)
– Zinloze axioma's soms contradictoor. Vlll 33.
– Korselt–Hilbert. Vlll 33.
– De wetten der logica alleen voor intuitieve klassen. Vlll 44.
– Fout van Couturat tegen Burali Forti (Principes, p.110), de geheele getallen zijn wel nominaal gedefinieerd, maar daarom weet ik nog niets van hun ev[entuele] "toepassing" (werkelijke daad) op geheele getallen.– Citaat Couturat. Vlll 49.
– Hoe de Unabhängigkeit van Hilbert is te verstaan. Vlll 49.
– Onzin van Couturat. VIII 49.
– Mannoury in "Hegelen of Cijferen" wil filosofiserend de logistiek verdedigen. VIII 55.
– Couturat over dualiteit. VIII 56.
– De logistiek toont het eenvoudige ingewikkeld. VIII 56.
– Couturat over lijndefinitie . VIII 56, 57.
– De axioma's waren ook niet het primaire bij de wiskunde, maar worden achteraf gevonden; als we lukraak de natuur hebben gevangen, gaan we eerst dán dat gebouwde systeem op axioma's onderzoeken, ook al hebben ons soms in den vorm van "bouwdwang" sommige van die axioma's geleid. Bij de gewone meetkunde echter niet; we hebben immers het boogelement gebouwd, en daar hadden we al onze formules tot maatbetrekking, betrekking van schalen op elkaar. VIII 57, 58.
– Twee aanmerkingen op Hilbert Ens[eignement]. VIII 65.
– Nog aanm[erkingen] op Hilbert Ens[eignement]. VIII 65,66.
– Hoe Hilbert niet in de Russelsche paradox kan vallen. VIII 66.
– De replâtrage van Hilbert. Vlll 67.
– Logisch bestudeeren van anderen. VIII 67.
– Hilbert geen vooruitgang; houd bij voorkeur de wisk[undige] taal vaag, al beeldt ze strenge, gespecialiseerde gebouwen. VIII 67,68.
– Hilbert zoo wijs geweest, bij aanduidingen te blijven. VIII 68.
– De axiomatische bouw onaesthetisch. VIII 71, 72.

– Alleen over wisk[unde] is logisch te schrijven. VIII 79.
– Bestrijding van Hilbert door Poincaré. IX 1.
– Wat Hilbert Ens[eignement] eigenlijk is. IX 1.
– Wat de taal is. IX 2.
– Nòch je eigen, nòch een anders taal wiskundig bekijken. IX 3.
– Hilbert heeft zich aan het continuum weten te onttrekken. IX 3.
– De klassieke logica komt bij de wiskunde maar op enkele plaatsen te pas. IX 3.
– Hilbert in Ens[eignement] werkt ten onr[echte] met Existenzbeweis door middel van "le nombre deux". IX 15.
– Hij postuleert de gesloten gekoppelde hoeveelheid. IX 16.
– Niet-contradictoriteit bewijst nog geen "zin". IX 16.
– De Hilbertsche pseudo–geometrieën zijn (in tegenst[elling] met de niet–Euclidische) van weinig beteekenis, omdat ze zijn gebouwd in een erg "gezocht" gebouw (terwijl de niet–Euclidische in de gewone Cartes[ische] ruimte). – Twee dingen, gelijk aan een derde zijn onderling gelijk. Zoo'n trivialiteit kan alleen worden uitgesproken, omdat men naar de taal zonder–meer kijkt. – Misschien kan voor Hermite en Weierstrass het logisch (dat is van de 2^e orde wiskundig) gebouw een hulpmiddel zijn geweest; men kan nooit zeggen, dat het een grondslag voor wisk[unde] van de 1^{ste}-orde zou zijn. – De "theorie cardinale" is juist, maar alleen op grond van het "alle" intuitief te kunnen denken, en dat gaat alleen voor eindige getallen; de opbouw–wiskunde leert dus verder de hoofdst[elling] der rekenk[unde]; en ook, dat het alle ook doorgaat voor aftelbaar oneindig.–

10.2 Voorbeelden van Axiomatische Uniciteits–Bewijzen

Hierbij nooit zeker, dat nog niet iets overtolligs in de axioma's. – In Russell fouten. Zoo Princ. p. 391 en 403 blijkt hij geen juist inzicht in de hyperbol[ische] meetk[unde] te hebben. – Voor unic[iteits] bewijzen moet al een gebouw klaar zijn, waarin men wil bouwen. Daarom gaat de aanmerking van Russell (Princ. p.389) tegen Klein niet op, en is het onzin, om volgens Pieri met behulp van gewrongen axioma's (die toch hun recht van bestaan aan het Existenzbeweis eerst zouden ontleenen, maar juist daardoor onzinnig evident worden) de volgorde op de r[echte] lijn te definieeren. – Lie het zuiverste voorbeeld der uniciteits bewijzen. II 4.
– Het axioma van geod[etische] lijnen tot geodet[ische] vlakken samenliggend. II 37.
– Hieruit volgens Klein alleen mogelijk een meetkunde, die met de mengmeetkunde samenloopt. II 37.
– In den zin van axiomatische uniciteitsbewijzen, d.i. zien van de meetkunde of een ander wisk[undig] gebouw als bijz[onder] geval van een algemeen gebouw, zijn nog allerlei Begründungen mogelijk. III 3.

– De getallen geverij van Staudt en Klein. III 23.
– id. III 24, 25.
– De 2 punts–invarianten van Lie te herleiden tot een infinitesimaal–invariant. III 25.
– Klein's bewijs. III 27.
– Hamel. III 29.
– Fiedler darstellende Geom[etrie]. 138 – 142 cf. Killing pag. 123. –Helmholtz zelfs niet voldoende, om uit de proj[ectieve] groep de bewegingsgroep te bewijzen. – Kritiek van Lie op Helmholtz mocht wel eens bedenken, dat Lie maar steeds aan de differentieerbaarheid vasthoudt. – Lie uit de proj[ectieve] groep. III 32, 33.
– Hilbert M.A. alleen uniciteit. III 33.
– Hilbert M.A. III 36.
– Axioma Hilbert M.A. IV 1.
– Men kan ook zeggen, de ∞^3 geod[etische] vlakken hebben maar ∞^4 in pl[aats] van ∞^6 snijlijnen. IV 1.
– Klein getallen invoering, lineaire vergelijking der rechte lijn; ideale elementen volgens Schur. IV 2.
– Enige krommen met proj[ectieve] groep de kegelsneden. IV 2.
– Euclides als bouwdwang – tractaat (het stilzwijgend materiaal verondersteld) is onberispelijk. – Kwadr[atisch] boogelement uit Eucl[ides] in oneindig kleine. IV 30.
– Relatieve dichte minimum voor proj[ectieve] meetkunde. IV 30.
– Opbouw van η. V 5.
– Hilbert M.A. voor elk oppervl[ak] V 5.
– Citaat Russell. V25.
– Hilbert Festschrift ook uniciteit. VI 7.
– Het "*c* rechts van *ab*" van Vahlen. VII 3.
– Het vlak geraamte VII 4.
– cf. Bewegingsgroep der rationale punten. VII 7.
– Hoe de projectiviteit der Endenrechnung en daarom haar plaats in den "opbouw" en nog veel minder het direct leren van opt[elling] en verm[enigvuldiging] uit een groep bij Hilbert niet blijkt. VII 5.
– Niet–Desarguesche ruimte–geometrie. VII 8.
– Wat noodig is voor proj[ectieve] grondsl[agen]. VII 20.
– Overzicht van Schur. VII 22.
– Leelijke grondsl[agen] van Peano–Schur–Hilbert. VII 22.
– Hilbert M.A. VIII 21.
– Het steeds "beperkte" gebied . VIII 27.
– De twee meetk[unde]s van Hilbert Festschr[ift]. VIII 27.
– Aanm[erking] van Frege vervalt in den zin van uniciteitsbewijs, cf. Schopenhauer. Vlll 29.
– Frege l.c. p.321 rügt het woord "Grundtatsachen" der Anschauung; terecht: moet zijn grondbeperkingen in het gebouw. Ook rügt hij terecht de definitie van "zwischen" want "zwischen" hoeft niet door beperkingen te worden gebouwd, maar is direct intuitief. VIII 29.

– Zin der uniciteitsbewijzen. VIII 51.
– Uniciteit der hyperb[olische] meetk[unde] voor oppervl[akken]. VIII 51, 52, 53.
– Uitbreiding van het niet–Eucl[idische] boogelement op meer dimensies. VIII 54.
– De Riemannsche boogelementuitdr[ukking] hiervoor gepostuleerd. VIII 54.
– Euclides en Bolyai ook uniciteitsbewijzen. VIII 54.
– Andere uniciteit voor het niet–Eucl[idische] boogelement uit de kromtemaat. VIII 55.
– Idiote uniciteitsbewijzen van Pieri en Vahlen. VIII 55.
– Uniciteit proj[ectieve] meetk[unde]. Lie. III p.524 noot. Over een axioma der descriptieve meetkunde. VIII 59.
– Vahlen en de reciprociteit der paralleliciteit. VIII 60.
– Puntverg[elijking] van Hilbert invol[utie] in oneind[ige]. VIII 62.
– Schur over Pappus. VIII 64.
– In uniciteitsbewijzen geen grondslagen. VIII 64
– Parallellenaxioma één punt en lijn. VIII 65
– Wat het principe van inductie is, voor stellingen en uniciteitsbewijzen. VIII 65.
– Invoering der ideale elementen door Schur. VIII 72, 73.
– Hilbert's afleiding van diff[erentieer]baarheid uit groepeig[enschap]. VIII 73, 74.
– Helmholtz leert volgens Lie niet eens kiezen uit de proj[ectieve] groep. VIII 74.
– Een krommenstel heeft altijd een var[iatie] probleem (cf. Hamel). IX 4
– De zuivere uniciteitsopbouw van Hilbert en Lie en mijne van de optel– verm[enigvuldigings]–groep. IX 7.
– Niet–Pascalsche meetk[unde] nog niet opgebouwd. IX 7.
– De Hilbertsche Festschrift slot van de Kleinsche discussie. IX 7.
– De Hilbertsche Streckenrechnung en Endenrechnung hetzelfde. IX 7.
– Het grensovaal van Lobatsch[efski]. IX 8.
– Of Verknüpfung zonder Anordnung bestaan kan. IX 8.
– De niet–Archimedische reeks niet perfect. IX 9.
– Rechte lijn als kortste. IX 9,10.
– De Kleinsche getallen en de Streckenaddition van Hilbert en Schur. II 12.
– Bewijs van Darboux. IX 12.
– Lüroth -Zeuthen. IX 13,14.
– Eenduidigheid van de quadril[aterale] constr[uctie]. IX 14.
– De proj[ectieve] hoofdst[elling] volgt direct voor kromme lijnen. IX 14,15.
– Onvolkomenheid der niet-Pascalsche meetkunde. IX 15.-

10.3 Genetisch in de Geest en Empirische Grondslagen

(Poincaré)

– Wisk[unde] als humane veruiterlijking, onafh[ankelijk] van de degen[eratie] door de samenleving.
(oorspr[onkelijk] nog scheiden: in eigen geest, en in die van anderen). Tijd en ruimte zijn de omhulsels van het wiskundig bekijken der wereld. Alle weten zijn grond in de wil. Alleen het eindige: het oneindige als vuilnisbak (waaraan men niet denkt, zooals elk mensch de wereld buiten eigen sfeer als v.b. [vuilnisbak] behandelt). I 1.
– Het bouwen (drieh[oek]. 4,5,6). I 1.
– Alleen komt zoo in eigen geest de gedachte wiskunde. De geschrevene kan toevallig goed bestaan als verstandhouding.
Van Eeden – Mannoury. – Het zoeken van deze gronden moet je houden buiten verstandhouding. I 2,3.
– Mathem[atische] phys[ica]. I 2.
– Een wisk[undige] gelijkheid is een doel–middelsprong. I 3.
– Faraday nog zuiver, het intellect nog niet op zichzelf. I 4.
– Hypothesen op punt, r[echte] lijn en getal. I 4.
– 3–dim[ensionaliteit] vanzelfspr[ekend]. I 5.
– Sleur tot afgrenzing, die de ruimte bouwt, als iets werkelijk–objectiefs, terwijl alle objectiviteit alleen comp[onent] van onze wil is. I–6.
(– Analoog wordt het verleden als het herinnerde object afgescheiden. I 39.)
– Dit alleen door retireren te zien. I 6.
– Eenheid van verscheidenheid en wil tot (ééndim[ensionale]) meetbaarheid. I 6.
– Beheerschen willen vàn de wereld (dit geeft zien, bekijken van de wereld in wiskunde) komt uit vrees voor de wereld. Die vrees maakt, dat je je klauwen van wiskunde ertegen uitslaat. – Rekensnelheid door gemeenheid. I 8.
– De eenh[eid] van tegend[elen]. I 11.
– De 3 schalen, die continu in elkaar overgaan (de vervolkomende proj[ectieve] geom[etrie]). I 11.
– Zoo heb ik in een ^{n}Mannigfaltigkeit maar n schalen op elkaar te betrekken (de coörd[inaten] n.l.), en ik heb een proj[ectieve] meetkunde. I 13.
– Telkens wordt de theorie verdiept, d.i. gecentralizeerd, d.i. wiskunde wordt op wiskunde toegepast, al wordt dat vaak Anregung tot directe, niet slechts tweede graad –(à la Peano)– wiskunde, en daardoor weer alles uitgebreid. I 19.
– B.v. het zien in iets van een element van een reeks (3 –dim.) geeft uitbreiding op de heele reeks; het zien in iets van een symbolenspel (hoofdbew[erkingen] der getallen) geeft andere dingen te denken voor die symbolen (vectoren b.v.). – Grootste wisk[undige] kracht in den ouderdom; philosophie verlies je na je 18e jaar (behalve in de handigheid van toepassing op enkele dingen. I 28.
– De nieuwe leerling leert het instrument eerst hanteeren, later begrijpen, zooals

voor alle "practische" (niet voor "goede") handelingen. I 28.
– Begeleiden, niet leiden. I 30.
– Schop[enhauer] ongelijk. I 30.
– De geometrie een overgeërfde methode. I 31.
– Het onbegrensde systeem van "altijd maar door" kan men mathematisch goed gebruiken, maar als natuurbekijking moet het zijn einde vinden (zoo goed als de roofbouw), want het is toch alleen een relatieve beweging, die als iets relatiefs moet kunnen worden gezien, als een één, dat uiteengaat tot een gesloten geheel (theosofisch). I 32.
– Scheiding hoofd door hals. I 33.
– In een substraat kan 2 maal hetz[elfde] worden gesteld, in het centrum nooit; zoo $2 = 2 \times 1$ en twee r[echte] lijnen gelijk gezien. I 33.
– Oppervlakkige kennis. I 34.
– De genesis in het menschengeslacht van het empirisch geometrisch systeem is iets heel anders als de "opbouw" van nu, de diepste gronden van nu zijn de kroon van de genesis. – In wiskunde oordeelt ouderdom beter; in het leven de jeugd. [doorgestreept: Men doe in het leven wiskunde niet langer dan op je] Wetten zal men vinden (het hoort bij je hoofd), zooals men steenen zal vinden om te gooien, als je zoekt (die hooren bij je arm). I 34.
– De practische meetkunde leer je oppervlakkig, d.i. empirisch overnemen; evenzoo neem je de theorieën van de hoogere natuurkunde eerst onbegrepen over van je meesters. Wiskundige inzichten alleen zijn afgegrensd (van 't moreel) in 't hoofd; deze alleen kunnen je net zoo goed door een schurk gegeven worden. – Citaat Poincaré. I 36,37.
– Alleen de actie op den waarnemer. I 35,37.
– Bij "herhaling" wordt alleen die projectie van het ding gevoeld, die werkelijk identiek herhaald wordt, en dat is niets, dan de traagheid. Beharrung van een vaste wilsstemming. Uit die herhaalgewaarwording het wiskundig substraat van vier, teken 4, zo ook 37 enz.. Bij grootere getallen leeft in de praktijk langzamerhand niet meer het getalbeeld, maar de onderlinge relaties van de cijfergroepen, door onze faculteit om in plaats van een primair getal een eenheid, een cijfer te denken, d.w.z. het wiskundig raam kan ik niet meer overzien, maar kan (inductief zgn.) zooveel elementen opnoemen, als ik wil, en weet, hoe er mee te handelen; (de oude relaties; waaruit ik nog nieuwe relaties kan maken). I 37.
– Eindige getallen los van de "Kette" van Dedekind I 37.
– Ook bij het "meten" (zoals bij tellen) wordt de constantheid van de maat gepostuleerd. I 38.
– Eenheden van tegendeelen. I 39.
– Hoe het is met wisk[undige] grondsl[agen] kan A aan B niet zeggen over B wel over derden; dát moet de grondtoon zijn. I 39.
– Het "gelijk zien" van 2 dingen is waarsch[ijnlijk] voorn[amelijk] ontstaan door behoefte aan verstandhouding, maar toch ook door lichtzinnigheid. I 40.
– Maatcont[inuum] onafh[ankelijk] van getal idee. I 40.
– Kringloop van stadia. I 40.
– Eerst uit het gelijk zien van eenheden of deelen kwam macht over de verschalkte natuur, maar ook kwam men zelf onder het begeleidingsidee als een

waan en kwam verlangen naar bezit. I 40.
– Hond alleen nadoen. I 40.
– Door het getal (aantal) van een hoeveelheid te noemen weten wij niet alleen zijn relatie van $>, <, =$ ten opzichte van andere voorhandene dingen (die weet een hond ook), maar t.o.v. alle denkbare hoeveelheden van de soort. En door dat begrip: $>$ denkbare dingen komt ook de begeerte naar altijd meer bezit. Zoo ook in meetkunde; als ik zeg: C rechts van A op afstand van $1,4$ M, dan weet ik ook de betr[ekking] van ligging t.o.v. alle denkbare punten. Hierbij is intusschen nog geen schaal, dus geen bewerkingen mogelijk. I 40.
– 3 d.i. ik moet driemaal iets wegnemen, voor alles weg is. – Nieuwe grondslagen voor functietheorie? Alsof de wiskunde handelt over andere functies, dan over de reeds opgebouwde (met of zonder inductie). Zoo leert de var[iatie] rek[ening] alleen (en kan alleen leren) een keus doen uit een groep reeds opgebouwde functies, en voor elk probleem dient die groep opnieuw genoemd. (Alle functies kan het nooit zijn, dat is een non–sens; alle stetige is al het meeste. cf. Hilbert over princ[ipe] van Dirichlet, maar deze stetige, niet diff[erentieer]bare opl[ossingen] zijn niet in de natuur voorkomend. – Hoe meer de empirie weg, en het systeem zelfopgebouwd, hoe meer het wisk[undig] flair nieuwe verrassende combinaties kan vinden, dus hoe meer de macht over de natuur toeneemt. – Door uitbr[eiding] van het systeem vaak het oorspr[onkelijke] beter beheerscht (3 dim[ensies] voor Desargues; Eucl[idisch] als lim[iet] van niet-Eucl[idisch]; 't oneindige opnemen bij het eindige tot ell[iptische] ruimte). II 6.
– Poincaré. II 6,7.
– Nieuwe termen. II 8.
– Waarom niet net zoo goed een kromme ruimte aan te nemen (b.v. voor kin[etische] gastheorie)? II 9.
– De groep der vaste lichamen blijft dan toch empirisch een Euclidische – Het is een Darwinistische "gewoonte" de natuur in haar mathem[atische] kwetsbaarheid aan te tasten. – De "verklaring" der natuur. II 10,11.
– Naar aanl[eiding] van Poincaré; de 3 dimensies zouden wij voor een steentje ook zien, onafh[ankelijk] van ons spiergevoel (want dat "bekijken" wij niet dimensionaal, we "voelen" het alleen, in den wil). II 9.
– Over Poincaré. II 12.
– Tellen tot 3, en tot 3 dimensies. II 12.
– Er zijn geen grondslagen, alleen is er een gebouw, dat altijd groeit, de eenige grond is de menschelijke veruiterlijking. – Over Poincaré. II 14.
– De wil staat stil en gaat dan trillen; dan ontstaan samen tijd, aanschouwingswereld en wisk[undig] systeem; daarin allerlei dingen gewissermassen tegendeelen met een opheffing; zoo is herinnering zoo'n opheffing, maar ze is dat pas als ze zoo wordt gezien; ze leert ons niets; wat ze ons leert, is er al vóór zijzelf. *(?)* II 15.
– Het woord komt dan ook niet, door bewustwording van eigen herinnering, maar van anderen. – Herinn[ering] en spierbew[eging]. II 15.
– Uit gemak tracht men Eucl[ides] te behouden. – Bew[eging] van ideale vaste lichamen als norm ingevoerd; maar men merkt die gemakkelijk als limiet, waarvan alleen toevallige afw[ijkingen]. In zooverre is de ruimte Euclidisch. II 16.
– De experim[entele] proj[ectieve] meetk[unde] van gesp[annen] touwtjes en

de experim[entele] driehoeksmeting niet zoo nauwkeurig als de exper[imentele] waarn[eming] van de groep; en die groep is de meetk[unde] volgens Lie, freilich Eucl[idisch] of niet–Eucl[idisch]. – Eucl[idisch] = mogelijkh[eid] van gelijkvormigheid, of ook: alle lijnen die één lijn onder dez[elfde] hoek d.i. dez[elfde] ..bs. *(?)* coëff[icient], snijden, doen dat met alle lijnen. – De minimumlijnen t.o.v. de groep, in de praktijk worden gew[oonlijk] de lichtstraallijnen gebruikt, gebruiken wij in onze veruiterlijking, stoelen enz.; de natuur (boomen) hebben heel andere min[imumlijnen]. II 17.
– Het zijn juist de beperkingen voor de bouw, bij het bouwen ondervonden (de diff[erentiaal] invarianten of gewoon invarianten) die de eigenschappen van het gebouw uitmaken. –Cit[aat] Poincaré. II 19.
– Niet de corrig[erende] lichaamsbew[eging]. II 18.
– De aprioriteit. II 18.
– Vgl. het rijwiel. II 19.
– Het stellen van het woord "kracht" wijst nog op de oude invoering der wiskunde, als tegenkracht tegen de natuur. II 19.
– De 3 -dim[ensionale] lichaamsbew[egingen] en assoc[iativiteit]. II 2I.
– Als 't middel er is, ook gebruiken. II 23.
– Poincaré alleen beschrijvend. II 25.
– Door ondoord[enkendheid] absurditeit. II 25.
– Eerst in een afgegrensde begeerte zie ik een constantheid (n.l. t.o.v. die begeerte), en dan t.o.v. die constantheid wisseling (in de samengang met andere constantheden), als ook > en <, en verschillende eenheden van hetzelfde (2 steenen, een grooten en een kleinen); de wisselingen in het centrum hebben geen betrekking op een constantheid. De wil naar vastheid ziet vervolgens in de wisselingen weer een nieuwe constantheid, het wiskundig systeem der wisselingen; dit is ook een vast gevoel van bezit, n.l. in het hoofd van de voorspellingskracht, dus de macht over de verschijnselen. – Dit alles met opoffering van het ándere leven. II 27.
– Bet[ekenis] van "rust". II 30.
– Waarheden vervallen bij veralgemeening en daardoor wijziging der nomenclatuur. II 32.
– Ook in mech[anica], als versch[illen] gebieden in één causaal systeem samenkomen.
– Nooit de heele wisk[unde] te verhelderen. II 32.
– De fout der oude meetk[unde] was het gemis der samenvattende zelf opgebouwde hypothesen. III 3.
– Een algebr[aïsche] herleiding voorbeeld van bouwen tot je stuit. – Fout van Klein. III 4.
– De tijd apriori, de ruimte is er niet. – De R_3 blijft nog altijd het middelpunt. III 6.
– Hoe grooter gebied onder de "exacte" wet[enschap] wordt gebracht, d.w.z. hoe meer verschijnselen zich laten zien als een herhaling van telkens hetzelfde (en datzelfde dan gezien door een hypothese) (geschiedenis hoort er niet toe, maar speelt ook geen rol in de menselijke strijd van het ogenblik), hoe grooter de macht van de mensch wordt. – Het "grooter en kleiner" altijd in betr[ekking] tot een zekeren "wil". III 13.

– De echte wiskundige voelt nooit een "los gebouw" in gebouw, maar alles tezamen tot één harmonie. De mathematische fysica een stimulans bij het bouwen.
– Faraday–Maxwell. III 14.
– De afgegrensde wiskunde ook alweer noodig als arbeidsverdeling. – De gewone krommen alleen voor sommige dingen. III 15.
– Harmon[ische] akkoorden zijn in het mathem[atische] bouworgaan. III 15.
– De synthese der geometrie, in tegenst[elling] tot proefonderv[indelijke] feiten, of de org[anische] verb[indingen]. III 16.
– Rekenarij afbeelding der versch[illende] dimensies van de wereld op elkaar. III 18.
– De tijd uit samenknijping. III 19.
– Waanrust van 10 ritt[en] boek. III 19.
– Wisk[unde] uit het actieve leven. III 20.
– Eenzijdigheid der causaliteit. III 20.
– Eenzijdigheid der mathem[atische] phys[ica]. III 20.
– Het is onzin, dat de dag[elijkse] bew[eging] van de hemel "schijn" zou zijn, de cosmografie brengt het wisk[undig] systeem van die beweging onder in een grooter systeem. – De fysische ruimte. III 22.
– Citaat Poincaré. III 22.
– Over Poincaré. III 23.
– Poincaré's uitleg van de 3–dim[ensionale] ruimte heeft het foute grondidee, dat dingen als de genesis de menschelijke cathegorieën eenvoudig physisch verklaarbaar moeten zijn. – Over de differentieerbaarheid. III 30,3I.
– Het eten van het systeem. III 30.
– Herleiding op vaste lichamen. III 3I.
– De physisch meetbare grootheden. III 3I.
– Bij de limiet wetten niet meer doorgaan. (in 't kleinere andere wetten). III 31.
– Grond voor diff[erentieer]baarheid. III 32.
– De bewegingsgroep meer dwingend empirisch, dan de evenw[ijdige] lijnen. III 32.
– Lichtzinnig voortzetten van het tellen. III 36.
– Een molecuul zou ook een niet–Euclidische groep kunnen hebben. IV 5.
– "Zoo is de wereld". IV 15.
– Weerlegging van Poincaré bijz[onder] fijn. IV 19.
– Het wetten gedeelte maar miniem. IV 21.
– Men kon de ruimte net zoo goed alleen rationaal nemen; de irrationale punten worden, om de gedachte vast te houden bij de operaties, ingevoerd. En eigenlijk worden daartoe ook de rationale punten alleen ingevoerd als bestaand. IV 2I.
– Rechtvaardiging van continue krommen bij vele variatieproblemen. IV 22.
– Betrekkelijkheid van ruimte– en tijdsmaat. IV 22.
– Physische wet als van entropie toename wijst alleen een richting aan; we weten nooit of ze zich niet weer in een kringloop zal kunnen oplossen (bijv[oorbeeld] degenereering van warmte of zoo). Maat voor ons eigen geluk van geen belang (zelfs niet in aantal levensjaren). IV 23.
– Het tellen en meten als tuimeling. IV 24,25,26.

– Wiskundige blik of kruideniersblik. IV 32.
– Citaat Poincaré. V 7.
– Faraday –Maxwell. V 7. – 2 citaten Poincaré. V 3.
– Geometrie is physica. V 3.
– Citaat Poincaré. V 4.
– Grondaxioma de continue splitsbaarheid. V 4.
– Niet toenemen van de waarde van het systeem. V 4.
– Natuurwetten zijn er, anders waren de menschen er niet. V 4.
– Stationairiteit en continuïteit. V 5.
– De natuurwet wordt vooral gepostuleerd, om uit een eindig oorzakenstel (dát kunnen wij ons alleen physisch denken, en ook kunnen wij nooit ω dingen bestrijden) een uitwerking over ω, of η of ϑ te kunnen laten volgen; waardoor wij dan ω, η of ϑ, na ze te stellen in de natuur, ook kunnen bestrijden cf. V 7.
– Het onderaan aanstampen van de wisk[undige] dijk. V 8.
– De vlakken in de ruimte eerst te bouwen. V 13.
– De differentieerbaarheid der physica vooreerst om de verschijnselen te kunnen vermeesteren (maar dat kan ook met sommige niet–differentieerbare), maar vooral wegens mijn spiergevoel, dat het inertie–idee geeft. En mijn waarnemingen geven, mits genoeg verfijnd, ook “Streifen” met gemiddelde golvingen van veel grooter amplitude, dan de fouten door waarneming. Zo’n functie is dus altijd door een differentieerbare te benaderen. – De absolute ruimte. V 18.
– Het int[uitieve] cont[inuum] en de Hilbertsche ruimte empirisch maar voor weinig punten te contrôleren. V 19.
– Benaderde verifieering van de Abgeschlossenheit in één dimensie. V 20.
– Over de diff[erentieer]baarheid der mech[anische] functies. V 2I.
– Een functie heeft geen diff[erentiaal] quot[ient], maar een mechan[ische] kromme lijn wel. V 22.
– Hoe oordeelen eerst exact worden, als ze mathematisch zijn, hoe dán eerst de hoorder rust en zekerheid kan hebben. V 23,24.
– Hoe dus de wetenschap alleen in zijn eindige systemen blijft. V 24.
– Citaat Russell. V 24.
– Hoe wij het “continu physique” direct “grijpen” met het int[uitieve] cont[inuum]. V 24.
– Kristallen pleitend voor niet–Eucl. V 25.
– Onzin van scheiding van geom[etrie] en causaliteit door Russell. V 25.
– Citaat Grassmann in Russell Fond. p. 172,173. Hoe differentieerbare functies ook zijn op te vatten. V 30.
– De homogeniteit der ruimte leiden wij eerst af uit de vrije bewegelijkheid (Zonder die zou toch nog wel b.v. een ruimte met alleen translatiebewegingen mogelijk zijn). V 32.
– Physische onmogelijkheid eener 2–dim[ensionale] ruimte. V 35.
– In hoeverre arith[metiek] en geom[etrie] empirisch blijken. VI 18.
– Weierstrass niet van invloed op empirische krommen. VI 20.
– Eucl[idische] meetk[unde] overzicht van zekere verschijnselen uit de buurt. VI 22.
– Experim[entele] constructie der rat[ionale] schaal. VI 22.

– Het empirisch feit der physica. VI 24.
– Een eerste voorbeeld van "bouwen in bouwen". VI 30.
– Bij de var[iatie] rek[ening] maar keus uit aftelbaar aantal. VI 39.
– De singul[ariteiten] der eenv[oudige] algebr[aische] krommen. VIII 1.
– Met welke functies, heb ik eigenlijk uit te maken, wij bouwen functie–systemen op en trachten daaruit te kiezen (eventueel geholpen door var[iatie[rek[ening]), om de natuur te dekken (dat wil moreel zeggen, te vangen). – Alleen het eendim[ensionale] cont[inuum] is mijn veruiterlijking. VII 4.
– De niet–cont[inuiteit] in het zéér kleine. VII 7.
– De molec[ulaire] hypothesen. VII 7.
– Wetenschap en Wiskunde. VII 16.
– Het tellen. VIII 3,4.
– Het stellen van gelijke dingen. VIII 4.
– De beperktheid der functieleer. VIII 11.
– Waarom de var[iatie] rek[ening] niet streng hoeft te worden. VIII 14.
– De "objecten". VIII 15.
– We kunnen ons niet anders dan continuiteit in de natuur denken, maar moeten discont[inue] functies voor afbeelding gebruiken. VIII 18.
– Waarom geen gescheiden punten. VIII 18.
– Beperking der werkfuncties voor natuuronderzoek. VIII 26.
– Het steeds beperkte gebied bij wisk[undig] onderzoek. VIII 27.
– Tweede citaat Klein. VIII 28.
– Disc[ontinue] en niet–anal[ytische] functies. VIII 29.
– Citaat Klein Prinz[ipien] p. 369 midden. – Functies met eindig aantal max[ima] en min[ima]. VIII 39.
– Hoe men voor statische problemen de continuiteit der functies eigenlijk alleen voor 't gemak postuleert, zonder de gronden uit een hypothese voldoende klaar te hebben. VIII 39,40.
– Grandeurs intensives et extensives. VIII 48.
– De axioma's niet primair. VIII 57,58.
– De werking der axiomatische onderzoekingen voor de praktijk. (Maar de in de voorafgaande noot genoemde zijn niet werkelijke axiomatische onderzoekingen, door de praktijk geboden; ze worden alleen expres achteraf in den vorm eener axiom[atische] onderz[oeking] gebracht. VIII 6I .
– Op grond van onze rigide veruiterlijking trachten wij uit molec[ulaire] hypothesen, en wetten van groote getallen natuurverklaringen te maken. VIII 63.
– Getalverheerlijking van Pythagoras. VIII 63.
– Nog eens de "objecten". VIII 63.
– Faraday, Maxwell. VIII 64.
– Wij hebben alleen vat op onze bouw–werken, vandaar molec[ulaire] hypoth[esen]. VIII 69.
– Stetigkeit in de natuur. VIII 69.
– Anal[ytische] diff[erentiaal]vgl. [vergelijkingen] der 2^{de} orde. VIII 69.
– Molec[ulair] hypoth[ese] heeft niets te maken met niet–anal[ytische] functies. VIII 69.
– Invoering der "grootheid" in de rigide mechanica, en vandaar in de heele phys-

ica, al lukt die overgang door molec[ulaire] hypothesen en groote getallen voor sommige problemen, b.v. voor potentiaal, niet direct. VIII 70,71.
– Ruimte als geordend agglomeraat van eendim[ensionale] grootheden. VIII 71.
– Van het dierlijke "leeren door ondervinding" tot het menschelijke "getal". VIII 72.
– Ruimte overgeërfd. VIII 78.
– Differentieerbaarheid van y naar x. VIII 78,79.
– Tijd als nooit stilstaand gepostuleerd. VIII 79.
– Differentieerbaarheid voor groote getallen. VIII 79.
– Niet–pathologische functies zijn alleen geschikt gebleken. VIII 79.
– Misschien later met een begrensde ruimte te werken. VIII 79.
– De Eucl[idische] ruimte is wel degelijk bij groote benadering empirisch gebleken (wat Poincaré niet hervorhebt). VIII 79.
– Dertien als $10 + 3$. IX 16.
– Naar aanl[eiding] van "La Valeur de la Science". IX 17.
– Iedere veruiterlijking heeft haar wiskunde. IX 19.
– We denken de natuur brutaalweg wiskundig. IX 20.
– We komen niet altijd met anal[ytische] functies uit. IX 20,2I.
– Poincaré over inertiebeginsel. IX 2I.
– Uitbreiding en verband met het leven. IX 22.
– Veroordeeling van Helmholtz door Lie is onzin; H[elmholtz] noemt maar telkens suggesties, lei[d]draden om een systeem op te bouwen: een al of niet stilzwijgend axioma meer of minder hindert niet; je kunt tóch niet een voldoend stel axioma's uit de werkelijkheid halen, je moet tóch aanvullen. – In de rigide mechanica heeft men het continue gestopt, en men wou van daaruit verder met eindige (zij het groote) getallen uitkomen. –

10.4 WIiskunde en Samenleving

(Hoe de sam[enleving] er door vervormd wordt en steeds ellendiger gecompliceerd, en hoe de wisk[unde] verstandhouding is, en hoe aan den anderen kant de wisk[unde] in de samenleving wordt bedreven). [*In plaats van ?*] de grondslag der samenleving te zijn, is wiskunde een gewoon handelsartikel. Om carrière te maken, zakenman (d.w.z. slechts brengen, wat betrekkelijk nut heeft, maar in 't algemeen waardeloos geknoei wordt van absoluut standpunt, brengt geen meer doorzicht in de gebouwen). I 1.
– Het werk is eigenl[ijk] uitspattingen. I 1.
– Maakt indruk als van ver afgelegen gebied. I 1.
– Hoe de doordrijving van het wisk[undig] instinct buiten de gevallen, waarin de directe strijd het eischt, tot dommigheden voert. I 2.
– Mannoury (Hist. Mat.). Natuurwet[enschap] eenzijdig. I 3.
– Opname van storingen. I 3.
– Wiskunde op de natuur toegepast, geeft de techniek, en de warenwereld en handelsconcurrentie. I 5.

– Nooit falikant. I 5.
– De vrije uitbreiding der wiskunde als centraalsysteem van gebouwen geeft een warenproductie, waar moeilijk meer goed en slecht valt te schiften. Invloed van vrije concurrentie en reclame. I 6.
– Hoe de joden door wiskunde de boeren, en de boeren door wiskunde de koeien beheerschen. Wiskunde een deel der cultuurtechniek, die in den handel is gebracht. I 22.
– Newton systeem. I 25.
– Prijsvragen en zakloopen op de kermis. I 26.
– Holbewoners gelukkiger. I 29.
– Tenslotte om de gewoonheid en waardeloosheid der wiskunde geen reden, niet mee te doen. – Zijn waardeloosheid, als het andere, blijkt ook hieruit, dat de beoefenaars de waarde er van uit "eer" willen halen (Veronese, Lie). I 35.
– Wiskunde dát substraat der veruiterlijking waarin verstandhouding goed gaat. Daarom de taal als middel van verstandh[ouding] oorspr[onkelijk] wiskundig, eerst dán van de taal meer gingen verwachten (wat nu ook wel moet, nu psychische verstandhouding weg is), kwam behoefte aan poëzie en philosophie in de taal. I 33.
– Als alle cultuur ontaarding eerst in lichtzinnigheid door de rijken. I 34.
– Thans is ze noodig en wordt door een stand geleverd waarbinnen eerzucht en kliekgevoel kan komen, zoo goed als in de eveneens noodige, maar afgegrensd bedreven politiek. I 34.
– Zelfs de onbepaaldheid tegenwoordig slechts door assoc[iatie] aan bepaaldheid weer te vinden. I 34.
– Administr[atie] en instrumenten door joden uitgevonden. I 39.
– Het geloof in wiskunde begeleidt de verstandh[ouding] zooals het geloof in Calvinisme het mak blijven. II 9.
– De maatschappij slokt pathologische types op (heeft ze noodig), die wiskunde om zichzelf beoefenen. II 10.
– Een Germaan kan het niet uit zichzelf, maar doet mee. II 11.
– De joden eenmaal beginnende met de 3 afm[etingen], als de wereld rijp, is moeten wij mee. II 12.
– Bij volkshoogescholen gauw ontmaskering. II 17.
– Er is geen beroemdheid, of hij heeft zijn afkammer, en deze heeft gelijk. – Vervorming der natuur. II 19.
– Nog eens: gang van lichtzinnigheid naar cultuur noodzaak. II 22.
– De universiteit en aula. II 28.
– Het wisk[undig] zien van je eigen dingen (niet je vijanden) voert tot de vervalsching der levensmiddelen. – Berusting voor wisk[undig] werk. III 2.
– Physica en techniek verdurende veruiterlijking. III 6.
– 3 soorten van wetenschap. III 2I .
– Ontw[ikkeling] wisk[unde] in de wereld. III 2I .
– Zelfs journalistiek is er. III 26.
– Het samenleven in de ruimte. III 30.
– Afgrenzing en carrière. IV 5.
– Hersen–energie en afsterven der aarde. IV 19.

– De dieren middenstand; versch[illende] fasen van wiskundigen. IV 20.
– Vroeger alles gelukkig in momenteele wisselwerking. – Wisk[unde]: alleen zoo op te drijven door kweeking, dus vervuiling. – Exportartikel, aan mode onderhevig. V 22.
– Alleen de verminkten kunnen concurreeren, dus kwam tot weelde en voortplanting. – Hoe je vooruit komt in de wereld. VI 15.
– Iets van de eeuwige gerechtigheid is dat, wat de wereld "vooruit" brengt, niet betaald wordt; (immers het doet alle menschen kwaad); alléén dat, wat óp de eenmaal bestaande beschavingsniveau's als wapen in den strijd kan dienen. Het gepartieerd terrein zo kwaad niet. VIII 29.
– Engeland en Russell. VIII 32.
– Wisk[undigen], theosofen en socialisten. VIII 33.
– Wisk[unde] gaat niet vooruit. IX 19. – Als we geen wiskunde werken, konden we schampoelam naar de negers. –

10.5 De Opbouw Zelf

Klein ten onr[echte] over functies zonder diff[erentiaal] quot[ient]. I 9.
– De proj[ectieve] meetkunde gebruikt nog geen continuiteit; en ook niet de metrische; immers neem maar een fund[amentaal] kegelsnede uit 2 rationale schalen in bundels, en beschouw alleen rationale punten. (Maar deze transformatiegroep voldoet niet aan alle Hilbert'se congruentie-axioma's). – De coördinaten bouwen de meetkunde menschelijk op, daarom geven ze zoo'n groote macht; de andere meetkunde blijft altijd iets onbegrepen empirisch houden (met axioma's en daardoor wat machteloozer). I 9.
– Versch[illende] coörd[inaten] stelsels, versch[illende] werkhypothesen. – De analyse gebruikt de eendim[ensionale] maat, is eigenlijk maat zonder meer. Meerdim[ensionale] maat echter gebruikt ze niet. Ze kent geen "lengte" van hellende r[echte] lijnen. – Proj[ectieve] meetkunde is vrij van maat; beeldt alleen een eindig aantal schalen (voor 't pl[atte] vlak b.v. drie) op elkaar af op een willekeurige wijze, dit blijft zoo als reeds het platte vlak met zijn aftelbaar aantal punten op de fund[amentaal] kegelsnede. Bij de analyse daarentegen onderstelt men de physische continuiteit, die de maten op elkaar betrekt (al is ook dát weer slechts een nieuwe veruiterlijking van ons om de dingen te beheersen). De opt[elling] en verm[enigvuldiging] als een 2–ledige groep te beschouwen; de proj[ectieve] hier als 3–ledige hieruit afgeleid. I 14.
– Omgekeerd is ook de proj[ectieve] groep op te bouwen en dan licht uit de algemeene proj[ectieve] groep op een lijn de optel– en verm[enigvuldigings]groep terug te vinden (Schur). Waarin uit de 2 polaire schalen vanzelf de dubbelverhouding. I 15.
– Hoe ze projectief blijkt I 16,17.
– Zoo bouwen we de heele projectieve (snijpunts–)meetkunde op. We hebben hier te maken niet met punten a : b : c maar met relaties tusschen twee punten: $\frac{a':b':c'}{a:b:c}$. I 18.

– De samenhang een geheel nieuwe kwestie. I 18.

– Intusschen kan ell[iptische] vlak in R_3 alleen worden verwezenlijkt als bol cf. Liebmann Gött. Nachr. 1899 en Hilbert Grundl.; en volgens Hilbert de hyp[erbolische] ruimte heelemaal niet. – Proj[ectieve] transf[ormaties] zijn die welke zijn te krijgen door enkele wisseling der grondpunten. I 22.

– Op 't contin[uum] verstaan de menschen elkaar. II 1.

– Eigenlijk was sinds Descartes de opbouw der meetkunde klaar. – Bij opbouw het ∞ alleen eendim[ensionaal] gegeven. II 7.

– Uit het continu de schaal en uit 3 schalen de proj[ectieve] meetk[unde]. II 7.

– Het r[echte] lijn en afstandsverband (volgorde onversch[illig]). II 8.

– De operaties met geheele getallen: (discontinue) groepen in ω; die met rationale: groepen in de üb[erall] dichte Mengen ; met de reëele: groepen in het continuüm. – Aftelbaar onaf zijn ook de cathegorieën van Bolland; lengte als polygoon–limiet geschikt, wat touwtjes uit kleine rigide deeltjes. Het intuitieve cont[inuüm] als het andere v[an] h[et] punt; het onbekende, waarover geen gemis aan verstandh[ouding] mogelijk is. II 25.

– Alle eindige getallen is te omvatten. II 28.

– Hoewel haar toepassing als inductie in de natuur een $\pi\rho\omega\tau o\nu\ \psi\epsilon\upsilon\delta o\varsigma$ is. II 28.

– Waardoor de proj[ectieve] meetk[unde] op de voorgrond (Russell). ll 33.

– Proj[ectieve] en Ell[iptische] ruimte sitaal hetzelfde. II 33.

– Op te bouwen de rat[ionale] meetk[unde] ook met congruentie transform[atie], maar dan niet dat langs elke r[echte] lijn elke Strecke kan worden afgepast, want niet elke r[echte] lijn kan langs elke r[echte] lijn worden gezet; wel als ik $\sqrt{\ }$ (d.w.z. alle mogelijke vormen met een eindig aantal $\sqrt{\ }$-teekens) er bijneem, ook als ik $\sqrt{\ }$ en $\sqrt[3]{\ }$ erbij neem. II 33.

– Defin[itie] van punten binnen $\triangle$ uit de polaire splitsing. II 34.

– Defin[itie] punten tusschen D en AB resp. AC. II 35.

– "Rekenen" d.w.z. werken met transformaties van verschillende ééndimensionale (de alleen intuitieve) continua in elkaar; we kunnen ook zeggen: afhankelijkheid der eenledige groepen op verschillende continua (die natuurlijk op verschillende wijzen op de versch[illende] continua door dubbelpunten kunnen zijn beperkt). II 38.

– De groep der complexe operaties op te bouwen volgens Klein. Nicht Eucl. p. 179. cf. Lie deel 3. – Het aftelb[aar] onaf geconstr[ueerde] cont[inuum] onderscheidt zich van het intuitieve alleen hierdoor, dat het alle gevallen van eventueel ter aanvulling te construeren punten uitdrukkelijk zegt, reeds te voorkomen. Dat in 't infin. van een oppervlak de proj[ectieve] meetkunde geldt is essentieel, maar niet door bewegingsgeom[etrie]: dat komt alleen omdat we het oppervlak met metriek en al denken geplaatst in een bewegings–R_3. Immers bij de Hilbertse en Minkowskise meetkunde gaat het niet door. Hoe direct de stelling van Desargues volgt. III 16,17.

– Proj[ectieve] meetk[unde] eenvoudigst denkbaar gebouw. II1 17.

– Als niet polaire splitsing, enz. III 18.

– Phys[isch] cont[inuüm] en η. III 24.

– Mijn opbouw onderstelt schalen, maar de Klein'sche gaat uit van continuüm, dus ook van schalen. – Groepseigenschappen zijn sitale eigenschappen. – Opbouw bew[erkingen] gehele get[allen] volgens Dedekind, alleen uitgaan van inductie. – Dan de rat[ionale] get[allen] als reeksen van getallenparen die die verhouding hebben. (en wel is bij definitie $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ als $6a = 5b$, en $\frac{a}{b} = \frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ als $6 \times 8 \times a = 5 \times 7 \times b$). Hieruit licht de deling te bewijzen, en de rat[ionale] get[allen] te rangschikken. Maar men kan ze ook direct tusschen de eenheden rangschikken, en definieeren als 5 6^{de} delen, waarvan echter het bestaan dan eerst wordt bewezen uit het int[uitieve] cont[inuüm]. – Eenvoudiger opbouw der Eucl[idische] meetk[unde]. III 34.
– Het functie begrip. IV 3.
– Hoofdst[elling] rekenk[unde]. III 10.
– Dit in math[ematische] logica geen plaats omdat het achter de math[ematische] logica staat, die zelf het ook vooronderstelt in haar formule systeem. IV 9.
– Maar toch juist. IV 10.
– Uit de optelgroep de mengmeetkunde. IV 11.
– Stelling van Desargues vanzelf in mengmeetkunde. IV 11.
– Perfecte Menge volgens Cantor. IV 12.
– Tusschen deze getallen geen nieuwe meer. IV 12.
– Uitkomen met rat[ionale] of $\sqrt{}$–getallen. IV 12,13.
– Ik kan niet spreken van jede Fund. Reihe anders dan experimenteel, en dan verder postuleerend, maar nooit opbouwend. IV 13.
– Het allerminst kan ik mij denken alle functies.– Afstands waarde $\int(xdx+ydy)$. IV 14.
– Uit de constructie van de groep blijkt meteen, dat schalen van onderl[ing] onmeetbare eenheden "in elkaar passen". Oppervlak van Clifford. IV 15.
– Volgorde der rat[ionale] get[allen] uit Vahlen I 52 en 126, d.w.z. met behulp van die eischen bouw ik de rat[ionale] getallen op. IV 16.
– Kan niet spreken over alle punten der r[echte] lijn dan in kansrek[ening]. IV 17.
– Grondeig[enschap] rekenk[unde] uit onmogelijkheid van Selbstähnlichkeit. IV 18.
– Alleen wie eenzijdig de taal van het wisk[undig] werken bekijkt zegt dat wisk[undig] werken is wisk[undig] bekijken van het wisk[undig] systeem; de formuleering van een theorema schijnt zoo, de daad der wiskunde is bouwen van het systeem of in het systeem. – De eindige hoeveelheden worden intuitief opgebouwd. Eendim[ensionaal] continuüm als groep, en ook ω als groep. IV 23.
– 4 oorspr[onkelijk] ordinaal getal. IV 24.
– De Punktmengen worden gebouwd op het ándere, het continuüm. IV 32.
– Beter bewijs der hoofdeig[enschap]. V 2.
– Opbouwing van η. V 5.
– Het int[uitieve] cont[inuüm] is niet van een machtigheid. V 18.
– Het int[uitieve] cont[inuüm] en de Hilbertsche ruimte. V 19.
– De Abgeschlossenheit volgt uit de continuiteit van de eendim[ensionale] groep, daaruit volgt ook dat de schaal üb[erall] dicht is. Omgekeerd volgt uit de Abgeschossenheit de continuiteit, ook bij Hilbert. V 20.

– Verschil tusschen lijncont[inuüm] door beweging en beweging van lichamen. V 21.
– Meetk[unde] niets als bewegingsgroep in 3 dim[ensies]. V 21.
– Over de identité des indescernables. V 29.
– De 4 hoofdbew[erkingen] rekenkundig en algebraïsch verschillend . V 31.
– In het aprioristisch weten dat $\frac{1}{4}$ van een steen bestaat, ligt de intuïtie v. h. contin[uüm]. – Over het fictieve continuüm. Vl 21.
– Eig[enschappen] v. h. int[uitieve] cont[inuüm]. Vl 21.
– Hyperb[olische] meetk[unde] in ’t imaginaire. VlI 2.
– De punten v. h. cont[inuüm] niet genoemd, maar aangewezen. Vll 3.
– Het meerdim[ensionale] coupure cont[inuüm] empirisch, niet intuitief. VII 4.
– De Endenrechnung alleen in 2 dimensies. Vll 5.
– Toepassingen van de groep van opt[elling] en verm[enigvuldiging] door haar in de Endenrechnung direct af te lezen. – Wat we intuitief hebben. Vll 17.
– “Opbouw” der rekenk[unde] uit de axioma’s van Hilbert. Vll 18.
– De mengmeetk[unde] werkt in coörd[inaten] en coëff[iciënten] met zuivere intitiva. VII 19.
– $\sqrt{2}$ onmeetbaar? Vll 22.
– De optelgroep. Vll 23.
– De groep uit ω. Vll 23.
– Ook op de meerduidige cont[inue] groep is wel een schaal te construeeren stuk bij stuk; we brengen n.l. terug tot een stuksgewijs eenduidige. VlI 23.
– Invoering der practische onmeetbare getallen. Vll 23.
– Reëele en math[ematische] ruimte. VllI 1.
– x^n een transform[atie]groep. Vlll 1.
– $7 + 5 = 12$. Vlll 2.
– Ordinaal vóór cardinaal. VlI 2.
– Open cont[inuüm] primair. Vlll 20.
– De “schalen” op de ruimte eerst achteraf geconstr[ueerd]. Vlll 24.
– Differentieerbaarheid. Vlll 28.
– Opbouw v. d. rechte lijn uit de mengmengmeetkunde. Vlll 37,38.
– De ruimte voorst[elling] includeert zekere stetige functies. Vlll 42,43.
– Cont[inuiteit] middel om elke schaal voor elke groep te behouden. Vlll 48.
– Opbouw optel– en verm[enigvuldigings]groep volgens Burali–Forti. Vlll 48.
– Identiteit van $+$ en $\times$. Vlll 49.
– Bewegingsmeetk[unde] niet direct, alleen uit uniciteit (bouwdwang <u>in</u> een direct gebouwd gebouw). Vlll 53.
– Het intr[insieke] mech[anisme] v. een groep schijnt de algebraïsche bewerkingen geheel te bevatten. Vlll 55.
– In hyp[erbolische] meetk[unde] geen maat voor punten in oneind[ig]. Vlll 60.
– Endenrechnung van Hilbert en Schur gelijk. Vlll 60,61.
– Over de Mengmeetk[unde]. Vlll 62.
– Over de verschuivingsgroep. Vlll 62.
– Opbouw der schaal waaruit meteen de uniciteit der optelgroep blijkt. Vlll 74,75.
– Uitbreiding met de transformatie $x_2 = -x_1$. Vlll 75.

– De verm[enigvuldiging] is een mogelijke differentieerbare aanvulling tot tweeledige groep. Vlll 75,76.
– Uitbreiding der verm[enigvuldiging] met $x_2 = \frac{1}{x_1}$. Vlll 76.
– Uniciteit der verm[enigvuldigings]groep, ook zónder aanname der diff[erentieer]baarheid. Vlll 76,77,78.
– Algebra tot meetkunde Vlll 78.
– Bewijs van de vgl. der r[echte] lijn uit proj[ectieve] hoofdst[elling]. IX 4,5.
– Vgl. plat vlak in de ruimte. IX 6.
– Twee polaire splitsingen die weinig verschillen. IX 12.
– Een groep kan niet discontinu zijn. IX 13.–

10.6 Wiskunde en Geestesvrijmaking en Philosophische Waardeering der Verschillende Exacte Wetenschappen

Verband tusschen Levens-Logica en Wiskunde. (*doorgehaalde titel:* Leven en Wiskunde.)

Recensie van Whewell. – De wil tot levens-syllogisme (niet tot wisk[unde]-syllogisme) is wil tot gelijkst[elling] van doel en middel. I 28.
– Men doe wisk[unde] niet langer, dan op je weg, want het is van de praktische wereld, en je hooger zelf onwaardig (niet "cet éclair qui est tout"). – Over <u>wiskunde</u> mag de leek niet in bijz[onder] oordelen, hij mag alleen zeggen: iets van de dwaze menschen, wat ik ook zou kunnen leeren nadoen, maar waar ik me buitenhoud. – Deze belijdenis een <u>wil</u>. I 37.
– "Gemakkelijke" redeneeringen. II 10.
– Wiskunde is niet blinde logica, maar bouwen. – Bolland is ook wiskunde, een soort combinatoriek. – Wisk[unde] direct weer vergeten. II 18.
– De waarde. II 19.
– Beter direct de <u>groep</u> te voelen, dan indirect, door het andere als mogelijk te zien. II 20.
– Wiskunde leeren om af te leeren; zoo nodig aanleeren om de mogelijkheid ervan af te leeren. II 23.
– De physicus is dat slechts ná en op grond van, en met behulp van de wisk[undige] gebouwen, waarover hij beschikt, maar heeft de passie en talent van "toepassen" – een soort van daad–irritabiliteit erbij noodig. – De logica geldt alleen voor de wiskunde. Alle wereld bekijking een wiskundige. II 27.
– Bij het verleeren geen omkeeren. II 28.
– Logica kan, ook in probabiliteit, nooit het leven helpen verklaren, want is geabstraheerd uit het leven, en nog wel alleen uit het door een wiskundige bril geziene leven. – Hoop, om af te leeren. II 31.
– Wat ieder mensch in zijn leven uit het leven aan kennis vergaart, is nog zoo misselijk niet, maar het is het net van de machinaal overgeleverde en aangeleerde

kennis, dat de samenleving vernietigt. Zoo spreekt ook tegen de theosofie, dat ze overlevering in 't intellect zonder liefdesondergrond gebruikt. → Vgl. met die "overlevering" de bestaanbaarheid van locomotieven. III 26.
– Wisk[unde] fout bedreven, als men door ondervinding en schade en schande tot zijn conclusies komt; dan late men het (voor zijn eigen geest) liever. – Ook spanne men zich niet in. III 32.
– Het natuur-bekijken in wisk[undige] hypothesen leeren de kinderen, en verliezen daardoor alle moreele ontw[ikkeling] van den blik naar buiten. – Griezelig wiskunde -bedrijf. III 36.
– Inzicht door werken, als vergezicht door trappenklimmen waardeloos. – Paedagogische wetenschap. IV 5.
– Hoe de logica een daad is, maar: wiskundig bekeken wordt tot een algebra van complexen (vgl. Laurent in Ens. Math. 7). – Een beetje rekenen moet je allerdings voor den levenstijd kennen, maar de verdere wiskunde is iets maatschappelijks. – Als men levens-logica goed zou willen doen, of zou willen leeren, zou ze bepaald, dus mis zijn. – Slotsom van het leven. VI 23.
– Met gewone logica moeten we wisk[unde] niet vergelijken, want die logica is zelf wisk[unde] (der 2e orde). – Over de universiteit. VII 6.
– Wiskunde geen logica. VII 22.
– De toep[assing] der wisk[unde] nog in 't wilde. VIII 34.
– Gevecht tegen windmolens. VIII 34.
– Verlies der begeerenswaardheid. VIII 34, 35
– Kennis sleurgewoonte. VIII 35.
– Over "fout" of "goed" is natuurlijk geen mode in wisk[unde], maar wel over "waarde" of "onwaarde". – Denklichtzinnigheid en daadlichtzinnigheid. VIII 47.
– Zoeken naar verrassende relaties. VIII 49.
– Twee soorten mathem[atische] publicaties. VIII 50. – "Kein Königsweg." VIII 64.
– Logica alleen op wisk[unde] toe te passen. VIII 68, 69.
– Houden van een vak, b.v. Aardrijkskunde . VIII 73 .
– Iets leeren zien of waardeeren. VIII 78.
– Alleen over wisk[unde] is logisch te schrijven. VIII 79.
– Eerste deel van "Het Bevrijde Leven" uit de lezing. Wat de toepassing van wiskunde op "contingent matter" eischt. IX 18.
– 3 soorten van wiskunde. IX 18.
– Wiskunde nooit zuiver. IX 18.
– De wiskundige is voor één relativiteit blind. IX 18, 19 .
– De "various grounds of conviction". IX 19.
– Wiskunde bij spiritisme onzuiver. IX 19.
– De praktijk van een universiteitsfaculteit. IX 22.

10.7 Zogenaamde Philosophische Grondslagen

Dit in de tekst meer met citaten dan redeneeringen toelichten.

Hierbij ook: Wiskunde volgens Bijbel, de Waarheid en de Kunst.

Kritiek op Russell's zgn. aprioristische rechte lijn. – Zgn. "relation d'extériorité". Wat voor reden zouden we hebben, om nu eens primair een relation d'extériorité te willen opbouwen? Wat de aesthetica er van is. II 3.
– Alleen religie als tegenpool. II 7.
– Volgens evangelie "dulden". II 10.
– De Hereeniging moet staan buiten de wetenschap, moet niet "knap" zijn. II 9.
– Het onbedorven instinct wil zich afkeeren, maar de religie doet geduldig mee, en kritiseert intusschen als steun voor zichzelf. II 11.
– Ware wijsheid en practische wijsheid. II 12.
– De eenheid der tegendeelen voelt ieder dier nog bij zijn daden. Wij door de afgrenzing in 't hoofd vaak niet, maar trachten te hervinden. – Niet verklaren, maar inzien als doem. II 14.
– De beperkingen als straf. II 14.
– Intuitief is het onbegrensd wisselende primair (dus ook onbegrensd in aantal dim[ensies], wat, als je wisk[undig] mocht bekijken, maar je mag niet, zou worden R_∞), maar in de wiskunde R_1 en R_2 ten spijt van Peano en Couturat. Want aan het bouwen is het "met meer dan dit" direct inhaerent. II 14.
– Zalig degenen, die (als de bloemen) vertrapt worden, die in de wereld niet kunnen schermen, en geen wiskunde kennen, die altijd doodarm zwoegen, en ellendig (in schijn) sterven. – Vraag de waarheid aan de sterren, niet aan de wiskunde. Grondsl[agen] zoeken mag niet weer een nieuwe wetenschap worden. II 15.
– Hereeniging in 't hoofd op zichzelf gaat niet. II 17.
– Eucl[idische] meetkunde enkel facet. II 17.
– De theosofische oorzaak van de wiskundige doem, is niet te zeggen, alleen te voelen. – Wiskunde is alleen van zin in die gedeelten van het leven, die staan op het standpunt van de strijd met het een of andere te hebben aangebonden; maar de hoofdzaak in het leven is het niet openstellen en dan in centrale concentratie zoeken van het een als zuiver en bange vlucht van het andere. Hierbij heeft wiskunde geen zin. Maar ook geen metaphysische redeneeringen, want die hebben als ondergrond toch alleen de "certitude morale", en de zgn. "waarschijnlijke redeneeringen". (Ham.–Whewell) op die gronden zijn nog het best, indien wiskundig gehouden (Ki. . . , ib. geciteerd: "at an age, when it is so easy to derange the soul and the body in attempting to strengthen only a part"). Wiskunde kan ons niets leeren: is alleen een vechtmiddel in onderlinge strijd. – Dat wat over de grondslagen redeneert. II 20.
– Citaat Russell . II 20.
– Kants aprioriteit, overigens alleen geldend voor het bouwen (en dan ook voor

metrische geometrie contra Russell), is geen bekijking van zichzelf, maar juist een ontkennen van een mogelijkheid van een wiskundig (immers van objectief) bekijken. Maar zijn analytische is wèl het dwaze bekijken van zichzelf. – Het zich niet drukmaken over de grondslagen. II 21.
– De foute aprioriteit. II 21.
– Aesthetische en practische waarde. II 23.
– Niet doen voor jezelf. II 23.
– Dit alles in begrip niet scherp. II 6.
– Dit geen bijzaak. II 24.
– Niemand heeft wat te doen. II 24.
– Otium niet tot wijsbegeerte maar tot religie. II 25.
– Wat je óver de wiskunde zegt, is geen wiskundige bekijking van de wiskunde, maar van ándere wiskunde, mag je zoo zeggen, van ándere daden. – Alleen goed om elkaar een hak te zetten. II 27.
– Het ándere der wisk[undige] systemen is het $\pi\alpha\nu\tau\alpha$ $\rho\varepsilon\iota$, in 't bijzonder v. d. puntrijen het continuum. II 27.
– Wat belet phil[osophische] waarh[eden] in te zien. II 29.
– Ruimte begeerte en straf. II 29.
– Het int[uitieve] cont[inuum] is door Dedekind en Cantor niet verklaard, alleen zijn er nieuwe gebouwen op gebouwd. – Vraag, of men mag toepassen, zinloos. II 31.
– De joden. II 39.
– Het doordringen in de wiskunde en dan intellectueel afgooien, heeft schijnwaarde, beter instinctief je er direct van afkeeren; en ook de diss[ertatie] dient als slotsom eigen waardeloosheid te spreken. II 40.
– Naar aanl[eiding] v. Russell Fondements. II 40.
– De wisseling die het eendim[ensionale] cont[inuum] is wordt eerst mogelijk door de afgesloten partieering; maar het is juist die zonde van onszelf, die we gebruiken als strijd tegen het andere; wij houden ons staande door onze zonde. II 40.
– Tijd en ruimte trouwens zoo te gebruiken komt door imitatie en dwangsuggestie. II 40.
– Ik kan niet zeggen: 2 punten bepalen een puntreeks als hun verb[indings]lijn, als ik niet eerst een puntverzameling heb opgebouwd, waaruit ze door een of andere toe–ordening (var[iatie] probleem b.v.) die reeks bepalen. – Deze woorden moeten tot het hart spreken. III 1.
– De rol der grondsl[agen] zoeking. III 2.
– Het wisk[undig] willen zien, komt doordat men in 't hoofd is afgesloten, en rust zoekt binnen die afsluiting; die geeft (...) wiskundige hypothesen en de uitgevoerde berekeningen d.i. de voltooiing der benodigde gebouwen in het gebouw. III 4.
– Hypoth[esen] in phys[isch] wisk[undig] gebouw, en niet (v.d. W. jr.) een uitdr[ukking] van vreemde ideëen in familaire. – Wat ik zeg kan ik niet door "teekens" (d.i. toonen, hoe het als hypothesen de wereld verklaart, dus beheerscht) bevestigen. III 4.
– Niet denken over zijn gedachten. III 4.

– Twee manieren van schrijven. III 4.
– Hoe je wel wisk[unde] mag bedrijven. III 5.
– De gedegenereerdheid om math[ematische] log[ica] te zoeken. III 6.
– Elk deel uit versch[illende] centra. III 6.
– Alle waargenomen wetten, waarvolgens geleefd, straffen zich, door hun eenzijdigheid die eens moet blijken, en steeds werkt. – Om te lezen, nederige ziel. III 7.
– Zeggen: "de ruimte is er": welgedane afgeslotenheid. – Gevaar van het "oprechtelijk zien". III 5.
– Bij de opbouw tijd vóór ruimte. (ruimte is daar eigenlijk niet), maar moreel komt eerst de ruimte-zonde, waar een spierirritabiliteit in het hoofd is getrokken, en afgesloten blijven hangen ("grooter dan" en "bewegingnoodzakelijkheid" zijn ideeën die in de spierbeweging hun oorsprong hebben); de tijd volgt eerst dan direct met het waarnemen van "werking" (de vreesachtige erkenning waarvan trouwens al in de willek[eur] afgrenzing lag) onafh[ankelijk] v. d. wil; het vijandige, niet gevoeld, maar in 't hoofd gezien, en dan gauw beheerscht door de causaliteits categorieën. Het meten tot b.v. drie geeft ons het evenwicht in 't hoofd (d.i. niet meer onvaste wisseling, veroorzaakt door de afgrenzing, maar vaste plannen van spierbeweging), want geeft ons de noodige "relaties in 't hoofd van het gemeten ding tegenover andere dingen". III 7.
– Van "herinnering" zijn we ons in al die stadia nooit bewust; dat idee komt pas bij de verfoeilijke zelfbekijking. Ook de tijd kennen we alleen in de vloeiende buitenwereld, niet in ons denkende zelf. – Vervanging van de directe wilsbereiking. III 8.
– Ook de tijd wordt (en deze in de tweede plaats) gemeten. III 8.
– Alleen lange menschen, geen wisk[unde]. III 1.
– Sporen, voetreizigers. III 1.
– De taal moeilijk hulpmiddel over den tijd. Ill 9.
– Schopenhauers fout. III 9.
– Tijd als meer wisk[undig]. Ill 9.
– De ruimte van dieren en boomen is niet Euclidisch, heeft niet eens een beweg-ingsgroep. III 9.
– De zelfveroudering. III 10.
– Twee soorten van tijd. III 10.
– Poincaré daarover. III 10.
– De wisk[unde] bestrijdt alleen de wereld, maar ontneemt daardoor tevens de onbewuste voeding, die er van uitgaat. – Dit is de als feit geziene (verklaarde) Karmaverzwaring door het wisk[undig] bedrijf. III 11.
– In deze taal moet men iets anders hooren (b.v. in "eerst", in "veruiterlijking") dan in de gewone taal; dat gaat op goed geluk, maar och, de gewone taal gaat toch eig[enlijk] ook op goed geluk. Met negatieve dingen werkt natuurlijk de mystiek het best. – De drijvende waan–strijdleus. III 12.
– De verzuivering en vervuiling. III 12.
– Dit alles te voelen als men zijn cathegorieën (d.i.wiskunde) verbruikt. Het make ook geen "indruk", d.w.z. vinde geen nawerking in het leven zelf. – Het wisk[undig] zien ván wiskunde begint al (en daarom is dit erg onesthetisch),

waar men formules toepast, zonder aan de tusschenredeneering te denken, daar heeft men "herinnering" van zijn wiskunde als logistisch systeem, wiskundige "herinnering". De geest te zwak om het heele akkoord te omvatten. Bij groote getallen is dit trouwens steeds. Mag niet duidelijk. III 14.
– De doel–middel sprong eigenlijk hetzelfde als de sprong van natuur naar wisk[undig] systeem. – Iets werkelijk nieuws onbelangrijk. III 15.
– Wáren er geen vaste wetten in de natuur, dan waren wij er niet die ze konden waarnemen, die ons mét die veruiterlijking van ons konden in stand houden. Het philosopheren is een perverse handigheid, heel iets anders dan het zuiver zijn, immers de phil[osophie] kan vanuit het centrum zich neerstorten in de wereld, en dan weer terug, alle valfasen weer doormaken, en dan de projectie daarvan in mystieke taal neerschrijven. Erg lastig gaat het in de vrije natuur. III 17.
– De scheiding in verleden, heden en toekomst bestaat alleen 't wisk[undig] systeem, het heden is een willek[eurig] daarop aangenomen punt; heeft niets met een zgn. werkelijk heden te maken, wel is dat wisk[undig] systeem het begin van een daad met de spieren, maar in die daad bestaat niet die splitsing, daar is alles heden. Versch[illende] dingen van den tijd te zeggen. III 19.
– De causaliteit in de wereld komt door onze (Darwin!) constitutie, is dus weerspiegeling van onze zonde. Quasi-opheffing van narigheid. III 21.
– De R_3 en de theosofen. III 22.
– Kant's aprioriteit cf. II.81. III 22,23.
– De 4 fasen bij versch[illende] auteurs. III 23.
– Russell-Hamel. – Wisk[unde] rechtvaardigt zichzelf, heeft geen diepere gronden dan moreel mystieke. Grundlegend und bahnbrechend. III 31.
– Terugtrekken in schuilhoek. III 33.
– Dood door overwinning. III 33.
– Het Hegelsche verschijnsel (aRb en toch a – Rb) doet zich voor, waar men een voeding uit een zgn. "werkelijkheid" voor de taal zoekt, en niet vindt; die voeding sine steun zit in de eenzijdigheid, die de wiskundige blik is (tenslotte te reduceeren op een wilsuiting ter zelfverdediging). De opbouw van een onafh[ankelijk] taalraam voert dus tot de Hegelsche dwangloze eeuwige dubbelzinnigheid, die alleen dan groeit, het uitspreken van de Hegeliaanse keerzijde komt eigenlijk neer op bouwen van een nieuw gebouw in het oude, maar het is de wiskundige wil (die ergens héén wil ook alleen die het oude gebouw verzadigt). Projectie van mijn afkeer v. h. strijdende leven. III 36.
– Naturalisme en comedie zijn strijd veruiterlijkingen zoo goed als wiskunde.
– Russell's [phil]osofische dwangbepaling van een lijn door 2 punten kán niet anders zijn, dan een mechanische, en dan hebben we toch het algemeenste geval van het actieprincipe (dat zelf nog niet eens algemeen is). Maar dat actieprincipe alleen geeft al al de Hamelsche mogelijkheden. Trouwens is ook elke krommenschaar als minimummakend te beschouwen. IV 1.
– Om te disputeeren met kans op uitslag moet men de grondaxioma's gemeen hebben. – In de zon kijken. IV 2.
– Russell's found[ements] p. 46. Het zijn hier *zoogenaamde* philosophische grondslagen: ik kan mij niet anders denken, dán; maar feitelijk zijn het al verkapte axiomatische, die nog wachten op het Existenzbeweis. IV 3.

→ Feitelijk postuleert hij de groep waarvan de constructie nog moeilijkheden oplevert (nl. t.o.v. de grenspunten, of daar de groepeigenschap der geconstrueerde groep doorgaat). – Onzin om verschil te vinden tusschen hyperb[olische] r[uimte] en afb[eelding] op Eucl. IV 4,5.
– Alleen te reinigen als eerst vuil. IV 5.
– Al het door ons uit zijn levend verband met de natuur afgesnedene en afgegrensde wordt daardoor vatbaar, om ín onze wetten te worden gezien en gevangen, onze wetten, d.w.z. de wiskunde, om veruiterlijking. Dat gedrag v. h. lichaam is als het ware zijn zieltogen onder onze schendende hand. – Wetenschap in verband met de levende daad van zelfverdediging en zelfbevrijding, alleen die wetenschap is zuiver. – Uitbr[eidin v. h. bouwen en daarmee relativiteit v. h. oude gebouw aantoonen, heeft niets met ev[entuele] grondslagen van het oude gebouw te maken. IV 10.
– Centraliseering van fantazieën en zoo ook wiskundige uitbreiding (daarvan een bijz[onder] geval) steeds eenzijdig. IV 11.
– De tegenw[oordige] wiskunde dient meer de collectieve strijd tegen de natuur en de verstandhouding daarover, dan de persoonlijke strijd. – Mannoury–Bolland. IV 18.
– Verstand sluit de hartstochten in eigen veruiterlijking op. IV 26.
– Vrees en begeerte. IV 26.
– Herleiding tot "primaire" dingen onzin. IV 31.
– Het bouwen zelf is kunst, het toepassen op de wereld een kwade partieering. V 3.
– Het leven zonder vaste wetten. V 3.
– Poincaré "V. d. S." dialectiek. V 4.
– Om alles te willen herleiden op rigide deeltjes, is nog zoo gek niet, want de maat speelt bij de phys[ische] versch[ijnselen] een rol, maar de maat is iets, dat alleen zin heeft uit de bewegingsgroep der rigide deeltjes. – Ik wil de boel niet wiskundig weten, want ik weet dat ik daarmee slechts waan en schijnoverwinningen behaal. – Dat de meest gecompliceerde logische zin toch maar mag worder opgevat als een ongedeelde visie begeleidend, en wat verder oordelen zijn. IV 12.
– Wiskundig denken op zichzelf lijkt in een mijn. V 13.
– Wetensch[ap] kan nooit iets over onszelf leeren. V 13.
– Het menschelijk werken tracht rust te scheppen voor de toekomst, zoowel in arbeid als attentie–openstelling; voor het laatste zoeken ze zelfdressuur. V 13.
– Wiskunde doen, in bewusth[eid] van zondigh[eid]. V 13.
– Het tellen in begeerte, niet vrees. V 14.
– Niets goed doen. V 16.
– Kant over denken V 16.
– Phil[osofie] niet gewichtig. V16.
– Getal bij sjacheraars. V 17.
– A priori = constant = exact = wiskundig. V 17.
– Het empirisch feit. V 17.
– Hoe weet je dit alles: hoe weet je dat God bestaat? – Het aprioristische in 1^e, 2^e en 3^e. V 18.

– "Gründung" bij Riemann en Russell. V 18. – Wisk[undige] grondslagen niet "verklaren", maar je er af keeren. V 20.
– De veruiterlijking niet opstoven. V 20.
– Citaat Russell. V21.
– Kant's apriori en aposteriori. V 21.
– Citaat Russell. §80 en §79. V21.
– Over de extériorité projective bij Russell. V 21.
– Spreken over *zij*, niet *wij*. V 22.
– Dit parallel met iets in de logica. V 22.
– Postulaat v. Eucl[ides] bij defin[itie]. V 22.
– Tusschen wiskundigen geen vriendschap. V 22.
– Tegenst[elling] tusschen wisk[unde] en phil[osophie]. V 22.
– De aprioriteit van Russell krijgt eerst Existenzbeweis door mijn mengmeetk[unde].
– De meeste individuen slechts "organen". V 23.
– Citaat Bradley. V 23.
– Wat van Russell's Fondements overblijft. V 24.
– Philos[ophie] en int[uitief] geweten. V 25.
– Redeneerende philosophie. Verwijdering in het kwadraat. V 25.
– Russell Fondements is toepassing van Hegelen; wat niet mag (cf. p. 177); cf. zijn uitdr[ukking] geciteerd. V 26.
– Phil[osophisch] schrijven of zeggen in strijd met phil[osophie]. V 27.
– De Kantische ruimte, die der dichters, is de nog niet gemetene, de ons in dichterlijke partieering uit het leven vertellende. – Idioot citaat van Russell. §126. V 27.
– Volgend idioot citaat. V 27.
– Idioot citaat Kant. V 27.
– Onzin Russell. §129. V 27.
– Onzin Russell. §166. – Exterioriteit sleept mee oneindige deelbaarheid. V 27.
– Onzin Russell van "recherche des ééments". V 27.
– Over §131 Russell. V 28.
– Over p. 178 Russell. V 28.
– Over §138 Russell. V 28.
– Wat het kan beteekenen: proj[ectieve] meetk[unde] ligt opgesloten in exterioriteit. V 28.
– Ad §141 Russell. V 28.
– Ad §142 Russell. V 28.
– Wat het doel van alle meetk[undig] inzicht moet zijn. V 28.
– Ad §143 Russel. V 28.
– Bouwstijlen en onderdeelen wiskunde. V 29.
– Over p. 208–224 (vooral §172 1^e al[inea]) Russell. V 29.
– Alleen op p. 223 terecht iets. V 29.
– De logica ook een sitale extériorité. V 29.
– Onzincitaat Russell. V29.
– Over de puntantinomie. V 30.
– Punt als atoom. V 30.
– Restrictie voor Kant's aprioriteit. V 30.

– In §207 Russell terecht. V 30.
– Over p. 251 Russell. V 31.
– De mogelijke natuurverschijnselen zijn die wij kunnen of zouden kunnen (ons kunnen denken te kunnen) veroorzaken. V 31.
– Grondfouten van alle philosophen. V 32.
– Wiskunde als empirische wetenschap van Schuh en Cardinaal. V 32.
– Een betrekking is een nieuw gebouw. V 32.
– Invoeren v. getallen jodenstreek. VI 7.
– Primair in 't systeem is de ordinale rij. De cardinale rij blijkt daarop te kunnen worden afgebeeld (volgens hoofdstelling rekenk[unde]), ook al zijn het in 't leven waarsch[ijnlijk] de cardinaal waargenomen hoeveelheden geweest, die aanleiding gaven tot het vormen der ordinale rij. – Homogeniteit niet apriori. VI 20.
– Vreemdheid dat bewegingen mogelijk zijn. VI 20,21.
– "Waarheid". VI 21.
– Schuh bouwplezier. V1 21.
– Onzin bij grondsl[agen] te vragen: "Hoe weet ik dat?", en telkens "ergens van willen uitgaan". – De tijd als bestaand ding bestaat alleen in de verstandhouding; de heele zgn. bestaande wereld is een afgrenzing in de hoofden als middel tot verstandhouding, ze wordt ons ook opgedrongen in de verstandh[ouding] met anderen. Zoo bestaat de heele wetensch[ap] alleen in verstandhouding. Maar wat is dan mijn wetensch[ap] doen onafh[ankelijk] v. verstandhouding? Eenvoudig instinctief gluiperig doen, de kwetsbare plek der natuur treffen, aan een stuk natuur plak ik een stuk gluiperigh[eid] v. mij, d.w.z. van de natuur zie ik opzettelijk een deel, n.l. het onderhevig zijn aan "wetten" dat "zien der natuur als wetten" is projecteeren van een eigen emanatie op haar (een wilsgedachte, begin van een daad), een begin van vernietiging; ook het aantal zien van een hoeveelheid is het zien van een wet, waaraan ze onderhevig is. Ik bouw als medium van vernietiging eenvoudig het wisk[undig] gebouw, met gebouwen erin; maar daarom zeg ik nog niet dat de wetten wereld bestaat; dat komt pas in verstandh[ouding]. Feitelijk, hoe uitgebreider wisk[undig] systeem ik in een natuurding leg, hoe meer ik het kan dwingen of vernietigen of valkuilen ervoor kan graven (met al welke dingen je intusschen nooit, dan een schijnheerschappij bereikt). – Het "zien als wetten" is feitelijk een soort van "deel-zien" (doel–middel–part.), door de wiskunde bakken wij de wereld poetsen, maar poetsen bakken is geen beheerschen, en bij poetsen bakken zet je geen ernstig gezicht. In de materie geen bewegende punten . VI 22, 23.
– Fout argument van Russell (tegen Riemann) §64. r. 1–7 en §21, cf. ook §176, cf. VI 23.
– Het volkomen begrijpelijke der wisk[unde]. VI 23.
– De Hereeniging. VI 31.
– De oneindige materieele ruimte. V1 35.
– Dat je bij elke "uitspraak" eigenlijk denkt "in het wisk[undig] wereldsysteem n.l." blijkt ook hierin, dat als je daarvan vrij zou willen blijven, je bij het "doordenken" op een "uitspraak" in verlegenheden komt, denk b.v. aan de toekomst v. h. heelal, je eigen dood, de eeuwigheid, enz. – Wisk[unde] en empirisch feit.

VI 40.
– Wiskundige en artiest. VII 1.
– Het "en wat dan nog?" VII 3.
– Natuurk[unde] beter dan wisk[unde]. VII 5.
– Niet in het dag[elijks] leven. VII 6.
– Dit alles niet voor dag[elijks] leven. VII 6.
– Rechtl[ijnige] veruiterlijking. VII 6.
– Sprong van continue naar anal[ytische] functies. VII 7.
– Zin der philosophische ontwikkelingen. VII 21.
– Logistiek alleen bij gedegenereerd ras. VII 22.
– Wisk[unde] herinneren we ons exact. VII 23.
– Wiskunde zonde en schijnheerschappij. VIII 5.
– Na-bouwen en philosophisch dazen. VIII 5.
– Aantal en omvang weinig zin voor niet-joden, waarvan de joden gebruik maken. VllI 9.
– Geometrie en hindenissen. Vlll 9.
– Bespreking v. h. dessous. VIII 14.
– De wisk[undige] handelsdrang begeleid door verstandh[ouding] en medemenschen. VIII 15.
– Dat de exacte wisk[unde] niet zou zijn te veruiterlijken. VIII 15.
– Afbreken het naaste. VIII 18.
– Wisk[unde] een primit[ieve] valschheid. VIII 19.
– Goed en slecht. VIII 24.
– Citaat Klein; hoe alleen de anal[ytische] meetk[unde] "opbouwend" is. VIII 27.
– Citaat Klein over psychologen. VIII 28.
– De onzinnige "logische Ur–erscheinung" van Frege, p. 371. Jahresbericht XII, V111 30.
– Gedachte en begrip. VIII 29.
– Subject en praedicaat. VIII 30.
– Gebouw en natuurvernietiging. VIII 33.
– Onzin gebruik van "absurd" bij Russell. VIII 48.
– Grondsl[agen] rekenk[unde] phil[osophisch], v. meetk[unde] wiskundig. VIII 55.
– Onzin van Hegelen, maar ook van filosoferen à la Mannoury. VIII 56.
– Phil[osofie] onbeperkt, want de Hereeniging is nooit uitgeput in haar accompagneringen. – Intellectueel "doordacht", niet noodig. VIII 58.
– Catheg[oriën] niet onderzoeken. VIII 58.
– Causaliteit in leven en wetenschap. VIII 60.
– Zichzelf zijn en berusten. VIII 64.
– Weerleggen, door gelijk geven. VIII 64.
– In hoeverre alleen de aprioriteit van Russell bestaat. VIII 73.
– Men heeft bij phil[osophie] niets aan gebouwen en systemen (men wil direct worden aangeslagen met inzicht), want systemen hebben alleen waarde ter toepassing in strijd tegen een vijand; maar phil[osophie] moet niet worden toegepast. – Wijsbegeerte kan niet wiskundig in elkaar zitten. VIII 78.

– Het geschrevene doodeenvoudig. VIII 79.
– Kantsche aprioriteit bijzonder geval van mijn opvatting. IX 7.
– Citaat Hamilton. IX 9.
– Rechte lijn als kortste. IX 9, 10.
– Minkowskische en Hilbertsche meetkunden. IX 11.
– Ruimte zelf contradictoor? IX 16.
– Wat contradicties en antinomieën zijn. IX 19.
– De contradictie van "is niet herhaalbaar". IX 19.
– Want alle vragen hebben geen zin. IX 20.
– De contradictie van "ik lieg". IX 20.
– Vragen en samenvattingen alleen op het reeds opgebouwde. IX 20.
– Het Hegelianisme. IX 21.
– Al de schaden der doel-middel partisering. IX 22.
– Intuitieve opbouw van Veronese fout. IX 22.
– Het "herinneren". IX 22.
– De grond der philosophische verwarring. IX 22, 23.
– Goethe an Eckermann. IX 23.
– Wil je je handhaven in de wereld dan moet je meedoen met de wiskunde, maar je kunt je ook langzaam er laten vernietigen (vroeger door sluipmoord, nu door geldzorgen, in het weten dat je home ergens anders is. Om wat boven de wiskunde te stellen, moet je een niet-wiskundige intuitie voelen; niets daarvan heeft Russell, en toch begint hij maar onbescheiden te lullen. – In het eerste hoofdstuk heb ik met de wiskunde meegedaan, maar tijdelijk, de attentie bleef buiten. –

10.8 Aanmerkingen op de Mengenlehre

(gevolgen van de axiomatisch-logische behandeling daarvan).

Niet spreken van <u>alle</u> punten van een lijn. VI 23.
– Niet spreken van <u>alle</u> groepen uit een Menge. VI 33.
– Niet spreken van <u>alle</u> reëele getallen. VI 33.
– Hoe ik alleen van het cont[inuum] kan spreken, en van de relatie van gelijkmachtig door afbeelding, maar nooit van <u>alle</u> punten erop kan spreken, zelfs al zou ik kunnen spreken van "machtigheid", analoog als van een soort van "soort", maar aan <u>aantal</u> mag ik niet denken. VI 34, 35.
– T.o.v. het continuum-probleem", ik <u>kan</u> niet anders construeeren, dan een $\aleph_0$ schaal; het erbij nemen van grenspunten is een tweede kwestie, die ik altijd achteraf kan toevoegen; en het is nu maar de vraag, of op <u>één</u> der geconstrueerde <u>segmenten</u> (en het aantal segmenten is ook a) de machtigheid c komt door de bepalingen over grenspunten, of niet. Het cont[inuum] <u>met</u> de rationale schaal niet voor te stellen. VI 36.
– Hoe "alle irrationalen" alleen zin heeft. VI 37.
– Citaat Cantor uit de "Grundlagen". VI 37.

– Nog eens: het cont[inuum] heeft geen cardinaal getal. VI 37.
– Schoenflies vindt p. 65 zoo merkwaardig, dat de machtigheid v. Ω er tenslotte weer uitvalt; natuurlijk, die bestaat niet! – Over het Schoenfliesche bewijs der reducibiliteit. VI 37.
– De tweede getalklasse bestaat, maar $\aleph_1$ is zinloos. VI 37.
– $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}$ hoort tot de klasse II. VI 38.
– Over cont[inuuum] en klasse II. VI 38.
– Cont[inuum] geen machtigh[eid], want "nicht fertig". VII 4.
– Verschil tusschen 2^ω en $2^{\aleph_0}$. VII 14.
– Fout van Zermelo. VII 14.
– T en ω VII 16, 17.
– c en T VII 17.
– Wat we intuitief hebben. VII 17.
– Punten v. h. continuum niet als grenzen. VII 19.
– Opl[ossing] v. h. continuüm probleem. VII 19.
– Onzin Cantor VII 23.
– Alle aangeefbaar reëele getallen zijn aftelbaar onaf. VII 23.
– De klassen op het continuum. VII 24.
– Het continuum is de geheel volledig bestaanbare (stetige) optelgroep. – Aftelbare ordening tot indiv[idualiseering]. VIII 1.
– Logistisch cont[inuum] niet te begründen. VIII 11.
– Hoe het alleen te begründen is. VIII 13.
– Aangeleerde waan? VIII 14.
– Cont[inuum] niet door inductie op te bouwen. VIII 15.
– Onmogelijkheid om T te scheppen. VIII 16.
– Maar 2 machtigheden in c. VIII 16.
– Over de "perfecte" Menge en over T. VIII 17.
– Voor Stetigkeit niet noodig te spreken van "alle". VIII 19.
– Wat ik kan "af" denken. VIII 20.
– Cont[inuum] niet in logica. VIII 20.
– Open cont[inuum] primair. VIII 20.
– Hoe elke Teilmenge van c moet zijn uit te drukken. VIII 22.
– Het boomtakbewijs. VIII 23.
– c niet te scheiden van η. VIII 24.
– Aanvulling bij boomtakbewijs. VIII 24.
– c^c bestaat niet. VIII 25.
– Hoe ik alle mogelijke "Mengen van grenselementen" vind. VIII 25.
– Uitbreiding boomtakbewijs. VIII 25.
– ω op 2 manieren af te tellen. VIII 25.
– Definitief einde v. h. cont[inuum] probl[eem]. VIII 26.
– Bekende en onbekende irrat[ionale] punten. VIII 28.
– Dit ook de ware zin van laatste citaat van Klein. VIII 28.
– Geen individ[uele] opbouw van c mogelijk. VIII 35.
– Fout in 't bewijs voor 2^e machtigh[eid] van T. VIII 35.
– De Cantorsche "Freiheit" mag niet zijn Hilbertsche vrijheid tot het stellen

van symbolen en widerspr[uchs]freie axioma's daarvan (zóó is dan misschien de machtigh[eids]kwestie tusschen c en T onoplosbaar), maar alleen van symbolen, die iets intuitiefs "beduiden".– Zinlooze vraag naar aftelbaarh[eid] van T. VIII 36.
– Hoe het antwoord dan moet worden gelezen. VIII 36.
– Hoe te lezen $a^p > p$ VIII 36.
– Bernstein gaat ten onr[echte] uit van bestaan van $\aleph_1$. VIII 36.
– Hoe de üb[erall] dichte schaal intuitief vanzelf groeit. VIII 37.
– Perfecte kromme van Klein is het slechts in schijn. VIII 37.
– Bewijs voor intuitiviteit v. h. cont[inuum]. VIII 38.
– Definitie der irrationalen. VIII 38.
– Hoe onbekende irrationalen steeds door het stetigkeits postulaat in een functie gedefinieerd moeten blijven. VIII 40.
– Citaat Couturat. VIII 40.
– Tusschen überall dichte schaal en onbekende irrationalen bij de opbouw geen verband. VIII 40,41.
– Citaat Couturat. VIII 41.
– De foute intrinseque en de juiste definitie van perfekte Mengen. VIII 41,42.
– De ruimte voorstelling includeert zekere stetige functies. VIII 42,43.
– Dat ik mij een überall dichte lineaire Menge individueel gescheiden kan denken, impliceert voor het medium dier Scheiding het continuüm. – Hoe de machtigheid c kan worden gedacht. VIII 43.
– De machtigh[eid] f is contradictoor. VIII 43.
– De genereering van c en T te combineeren. VIII 43.
– Ook het aantal wisk[unde] stellingen aftelbaar onaf. VIII 44.
– Het continuum zonder of met hoofdbewerkingen. VIII 44.
– Er zijn evenveel ordetypen als wohlgeordnete ordetypen van $\aleph_0$. VIII 45.
– Wat Bernstein in M.A. 61 alleen bewezen heeft. VIII 45, 46.
– Wat men overigens nauwelijks een resultaat kan noemen. VIII 46.
– Ontoereikenheid van het Bernsteinsche Aequivalentiebewijs. VIII 47
– Wat wel voor Mengen van Hardy, niet voor die van Bernstein geldt. VIII 47.
– T en c gelijkmachtig, is niet contradictoor. VIII 55.
– Het is de foute Russellsche klasse–definitie (comprehension), die ook aan de Cantorsche T ten grondslag ligt (vgl. König, Math. Ann. 61. p. 159, 160).

Endnotes

Index