Formeel Denken 2005
I00030
Tentamen voor eerstejaars studenten

Deze toets bestaat uit tien onderdelen die allemaal één punt waard zijn. Veel succes!

Propositielogica

1a. Geef de waarheidstabel van de volgende formule:

$$\neg(a \vee b) \to \neg a \wedge \neg b$$

1b. Is het zo dat als $\models f \vee g$ dat dan ook ($\models f$ of $\models g$)?

Als dit geldt, leg dan uit waarom. Als het niet zo is, geef dan expliciete f en g die laten zien dat het niet geldt.

Predicatenlogica

2a. Gegeven de interpretatie:

M	domein van de mensen
$V(x)$	x is vrouw
$O(x,y)$	x is een ouder van y

Formaliseer in de taal van de predicatenlogica met gelijkheid de zin:

Ieder mens heeft precies één vader.

2b. Geef een model M en interpretatie I zodat

$$(M,I) \models \forall x \in D \exists y \in D[\neg R(x,x) \wedge \neg R(x,y) \wedge R(y,x)]$$

Talen

3a. Geef een reguliere expressie voor de taal:

$$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat een even aantal } b\text{'s}\}$$

3b. De taal L_2 wordt gedefinieerd door de grammatica

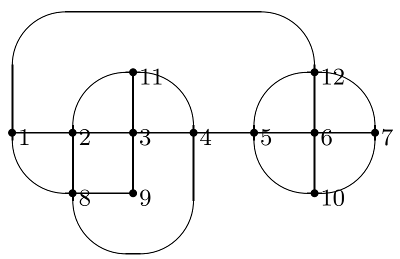
$$\begin{array}{lcl} S & \to & aSb \mid A \\ A & \to & aA \mid bbb \mid \lambda \end{array}$$

Geldt $abb \in L_2$? Zo ja, bewijs dat door een productie te geven. Zo nee, bewijs dat door een geschikte invariant te gebruiken.

Geldt $aabbbb \in L_2$? Zo ja, bewijs dat door een productie te geven. Zo nee, bewijs dat door een geschikte invariant te gebruiken.

Combinatoriek

4a. Hier is een plattegrond G van een dorpje, waarbij de straten aangegeven worden door lijntjes. Op ieder hoekpunt bevindt zich een kroeg. De kroegen zijn aangegeven door punten, genummerd van 1 t/m 12:



– Is het mogelijk, een wandeling te maken waarbij je iedere straat precies één keer doorloopt?

– Bestaat er een kroegentocht waarin iedere kroeg precies één keer voorkomt?

Verklaar je beide antwoorden. (Zowel bij de wandeling als bij de kroegentocht hoeft het beginpunt niet samen te vallen met het eindpunt.)

4b. Definieer met recursie de rij a_n door:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n \end{aligned}$$

Bewijs met inductie dat voor alle $n \geq 1$ geldt dat

$$a_n = 2^{n-1}$$

Automaten

5a. Definieer door het tekenen van een diagram een deterministische eindige automaat die de taal L_3 herkent die gedefinieerd wordt door

$$L_3 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{iedere } a \text{ in } w \text{ wordt direct gevolgd door een } b\}$$

5b. Voor iedere taal gedefinieerd door een reguliere expressie bestaat er een non-deterministische eindige automaat met precies één eindtoestand die deze taal herkent.

Stel nu dat zulke automaten gegeven zijn die $\mathcal{L}(r_1)$ en $\mathcal{L}(r_2)$ herkennen. Hoe combineer je die dan tot een dergelijke automaat die $\mathcal{L}(r_1 \cup r_2)$ herkent?

Evenzo, stel dat zo'n automaat gegeven is die $\mathcal{L}(r)$ herkent. Hoe maak je daaruit een dergelijke automaat die $\mathcal{L}(r^*)$ herkent?

(In deze vraag zijn r en r_1 en r_2 willekeurige reguliere expressies.)