Formeel Denken 2005
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica

Deze toets bestaat uit vijf opgaven met samen tien onderdelen die allemaal één punt waard zijn. Veel succes!

In de eerste twee opgaven gebruiken we de volgende interpretatie voor de atomaire proposities:

R	het regent
Z	de zon schijnt
RB	er is een regenboog
N	ik word nat
D	ik blijf droog
Bui	ik ben buiten
Bin	ik ben binnen

1. Vind formules van de propositielogica die hetzelfde betekenen als de volgende zinnen:

   (a) Ik ben binnen noch buiten.

   Deze zin heeft dezelfde betekenis als de zin: Ik ben niet binnen en niet buiten. En die zin is eenvoudig om te zetten in $\neg\mathrm{Bin} \wedge \neg\mathrm{Bui}$. Met de wetten van De Morgan of waarheidstabellen zie je dat bijvoorbeeld $\neg(\mathrm{Bin} \vee \mathrm{Bui})$ hiermee logisch equivalent is.

   (b) Ik blijf zeker droog wanneer het niet regent of ik binnen ben.

   Deze zin heeft dezelfde betekenis als de zin: Als het niet regent of als ik binnen ben, dan blijf ik droog. Merk op dat het woord 'zeker' eigenlijk niets toevoegt.

   $(\neg\mathrm{R} \vee \mathrm{Bin}) \to D$ is dan de meest voor de hand liggende vertaling.

   Vertalingen die '$D \to \ldots$' bevatten, zijn fout aangezien er in de gegeven zin nooit een conclusie wordt getrokken wat er gebeurt 'als ik droog blijf'.

2. Vertaal de volgende formules uit de propositielogica naar het Nederlands:

   (a) $\mathrm{Bin} \vee \neg\mathrm{Bin}$

   Ik ben binnen of ik ben niet binnen.

   (b) $\mathrm{Z} \wedge \mathrm{R} \leftrightarrow \mathrm{N} \wedge \mathrm{D}$

   De zon schijnt en het regent dan en slechts dan als ik nat word en ik droog blijf.

   De tekst 'dan en slechts dan als' kan eventueel vervangen worden door 'slechts als', 'alleen als' of 'precies als'.

3. Geef de waarheidstabellen voor:

(a) $\neg a \vee b$

a	b	$\neg a$	$\neg a \vee b$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

(b) $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow b$

a	b	$a \leftrightarrow b$	$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow b$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

4. Laat f en g proposities zijn. Ga na of de volgende uitspraken kloppen. Als je denkt dat de uitspraak klopt, dan hoef je alleen maar 'ja' op te schrijven, maar als je denkt dat de uitspraak niet klopt, geef dan een voorbeeld van een f waarvoor het niet zo is.

   (a) Als $\vDash f$, dan heeft de waarheidstabel van f alleen maar énen.

   Ja. De definitie van $\models f$ zegt dat f alleen maar 1-en bevat. Dus klopt de bewering.

   (b) Als het niet zo is dat $\vDash f$, dan heeft de waarheidstabel van f alleen maar nullen.

   Niet waar. Als 'niet $\models f$' dan weten we dat de waarheidstabel van f minimaal één 0 bevat. (Het kan zijn dat die tabel zelfs alleen maar 0-en bevat, bijvoorbeeld met $f = a \wedge \neg a$, maar dat hoeft niet.) Tegenvoorbeeld: Neem $f = a$. Dan ziet de waarheidstabel van f eruit als

a
0
1

   en het is meteen duidelijk dat dan 'niet $\models f$' en toch niet alleen maar 0-en in de waarheidstabel van f.

   Als er geen expliciet tegenvoorbeeld wordt gegeven levert dit 0 punten op.

5. Zijn de volgende uitspraken waar? Als je denkt dat de uitspraak waar is hoef je alleen maar 'ja' op te schrijven, maar als je denkt dat hij niet waar is, geef dan ook een model waarin de linkerkant van de $\vDash$ waar is, maar de rechterkant niet.

(a) $a \wedge b \vDash a \vee b$

Ja. Bekijk de waarheidstabel voor $a \wedge b$ en $a \vee b$.

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Het enige model v waarin $v(a \wedge b) = 1$ is $v(a) = 1$ en $v(b) = 1$. In dat model v geldt ook $v(a \vee b) = 1$. Dus is $a \wedge b \models a \vee b$ per definitie een ware bewering.

(b) $a \vee b \vDash a \wedge b$

Niet waar. Bekijk dezelfde tabel als bij de vorige opgave. Hierin zien we het model v waarbij $v(a) = 1$ en $v(b) = 0$. Voor dit model v geldt $v(a \vee b) = 1$ en $v(a \wedge b) = 0$. Maar dan is v dus een tegenvoorbeeld van de bewering $a \vee b \models a \wedge b$ en is die bewering dus niet waar. Een ander tegenvoorbeeld is het model v waarbij $v(a) = 0$ en $v(b) = 1$.

Als er geen expliciet tegenvoorbeeld wordt gegeven levert dit 0 punten op.