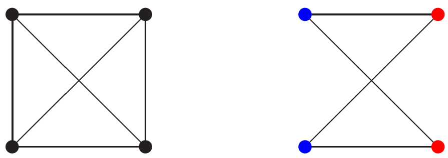
Formeel Denken 2005
Uitwerkingen Toets 4: Combinatoriek

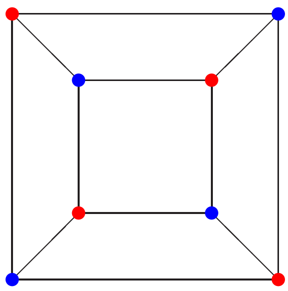
1.



K_4 $\qquad$ $K_{2,2}$

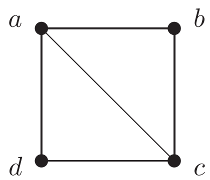
Nee, deze grafen zijn niet isomorf. In de K_4 hebben alle punten graad 3 en in de $K_{2,2}$ hebben alle punten graad 2, en onder een isomorfisme blijven graden behouden, dus bestaat er geen isomorfisme tussen de K_4 en de $K_{2,2}$.

2.



Ja, de kubus-graaf is een bipartite graaf. Er bestaat een kleuring (zie de figuur) waarbij de punten blauw en rood gekleurd zijn op zo'n manier dat er nooit een lijn is tussen twee punten met dezelfde kleur.

3.



Ja, die bestaat. Een voorbeeld van zo'n graaf staat in de figuur. Een Hamilton-circuit in deze graaf is bijvoorbeeld $a \to b \to c \to d \to a$. Maar de punten in deze graaf hebben niet allemaal even graad (punten a en c hebben graad 3), en dus bestaat er volgens de stelling van Euler geen Euler-circuit.

4. **Stelling.** *$n! \geq 2^{n-1}$ voor $n \geq 1$.*

   Bewijs. Inductie naar n. We nemen $P(n) := (n! \geq 2^{n-1})$ als inductiepredicaat.

   Basisstap: $n = 1$.
   $1! = 1$ en $2^{1-1} = 2^0 = 1$, dus $P(1) = (1! \geq 2^{1-1})$ geldt.

   Inductiestap: $n > 1$.
   Gegeven de inductiehypothese IH: $P(n-1) = ((n-1)! \geq 2^{n-2})$ moeten we laten zien dat $P(n) = (n! \geq 2^{n-1})$ geldt.

   We weten dat $n > 1$, dus geldt $n \geq 2$, en dus geldt $n \cdot (n-1)! \geq 2 \cdot (n-1)!$.

   Verder zegt IH dat $(n-1)! \geq 2^{n-2}$ en dus geldt dat $2 \cdot (n-1)! \geq 2 \cdot 2^{n-2}$.

   Als we dit allemaal gebruiken, dan kunnen we afleiden wat we moeten bewijzen:

$$n! = n \cdot (n-1)! \geq 2 \cdot (n-1)! \geq 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$$

$\square$

5. Er zijn

$$\binom{5}{2} = 10$$

   manieren om 2 objecten te kiezen uit 5 objecten. In de driehoek van Pascal staat dit getal op positie 2 van rij 5 (waarbij je zowel de rijen als de posities vanaf nul moet tellen):

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$