Formeel Denken 2006
Uitwerkingen Tentamen

1.
$$\neg K \wedge (Z \vee W \to H)$$

In deze oplossing is '*a want b*' vertaald als '$a \wedge b$', maar dit maakt niet expliciet dat a uit b volgt. Een vertaling die dit wel laat zien is $(b \to a) \wedge b$ zijn, maar dit is logische equivalent met $a \wedge b$.

Een interessante vraag is of uit 'a *want* $(b \to c)$' volgt dat b waar is (want anders is de '*want*' raar.) In dit tentament zijn zowel formules logisch equivalent aan '$a \wedge (b \to c)$' als formules logisch equivalent aan '$a \wedge b \wedge c$' goed gerekend.

2. Deze formule moet gelezen worden als $(\neg a \vee (b \wedge a)) \to b$:

a	b	$\neg a$	$b \wedge a$	$\neg a \vee (b \wedge a)$	$(\neg a \vee (b \wedge a)) \to b$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

3. Nee, dit geldt niet: in het model met $v(a) = 1$ en $v(b) = 0$ geldt $v(a \vee b) = 1$ maar $v(a \to b) = 0$.

4.
$$\exists x \in C \left([\forall y \in C \ \neg G(x,y)] \wedge \forall x' \in C \ ([\forall y \in C \ \neg G(x',y)] \to x' = x)\right)$$

5. *Er zijn twee werelddelen zonder gemeenschappelijk aangrenzend werelddeel.*

6. Neem bijvoorbeeld $M = (\mathbb{N}, \cdot)$ en neem voor I:

$$\begin{array}{rcl} M & \to & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \to & x \cdot y = 0 \end{array}$$

Dit model maakt de formule waar, want je kunt voor x het getal 0 nemen, en dan geldt $0 \cdot y = y \cdot 0 = 0$.

7.
$$L = \mathcal{L}\big(((a \cup b)(a \cup b))^*\big)$$

8.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aS \mid B \\ B & \to & bB \mid \lambda \end{array}$$

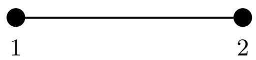
9. Ja, die bestaat, want er zijn contextvrije talen die niet regulier zijn, en iedere rechts-lineaire grammatic beschrijft een reguliere taal.

   Het standaardvoorbeeld van een contextvrije taal die niet regulier is is $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deze taal heeft de grammatica:

$$S \quad \to \quad aSb \mid \lambda$$

   Dus bij deze contextvrije grammatica bestaat geen rechts-lineaire grammatica die dezelfde taal beschrijft.

10. Ja, dat bestaat. Neem bijvoorbeeld de boom:



   Een Euler-pad in deze boom is $1 \to 2$.

11.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(2) &= 1/2 \\ f(3) &= 2/3 \end{aligned}$$

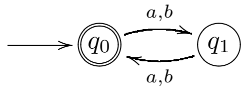
   Het bewijs van $0 < f(n) < 1$ gaat met inductie naar n als volgt:

   - Basisstap, $n = 2$: $f(2) = 1/2$ en dat ligt inderdaad tussen 0 en 1.
   - Inductiestap, $n = m + 1$ met $m \geq 2$:
     We hebben als inductiehypothese dat $0 < f(m) < 1$. Dan volgt dat $1 < 1 + f(m) < 2$, en dus dat $\frac{1}{2} < \frac{1}{1+f(m)} < 1$, dus ligt $f(m+1)$ tussen $\frac{1}{2}$ en 1, en dus zeker tussen 0 en 1.

12. Dat kan op $\binom{5}{3} = 10$ manieren, zoals te vinden is in de driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & \boxed{10} & & 5 & & 1 \end{array}$$

13.



14.

$$M = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$$

met

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{a, b\} \\ Q &= \{q_0, q_1\} \\ F &= \{q_0\} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_1 \\ \delta(q_0, b) &= q_1 \\ \delta(q_1, a) &= q_0 \\ \delta(q_1, b) &= q_0 \end{aligned}$$

15.