# Formeel Denken 2006
# Uitwerkingen Toets 2: Predicatenlogica

Het cijfer voor deze toets is het aantal punten gedeeld door tien, waarbij de eerste tien punten gratis zijn. De eerste twee opgaven zijn ieder 32 punten waard, de derde opgave is 14 punten waard, en de laatste opgave is 12 punten waard. Veel succes!

In de eerste twee opgaven gebruiken we het volgende 'woordenboek':

| | |
|---|---|
| $W$ | wezens |
| $V$ | voedsel; eetbare dingen |
| $i$ | ik |
| $j$ | jij |
| $K(x)$ | $x$ is een (klein) kind |
| $H(x)$ | $x$ is een heks |
| $S(x)$ | $x$ is een spook; $x$ is een geest |
| $C(x)$ | $x$ is snoep ('candy' in het Engels) |
| $L(x, y)$ | $x$ lust $y$; $x$ vindt $y$ lekker; $x$ houdt van $y$ |
| $B(x, y)$ | $x$ is bang voor $y$; $y$ maakt $x$ aan het schrikken |
| $G(x, y, z)$ | $x$ geeft $y$ aan $z$ |

1. Formaliseer de volgende zinnen in predicatenlogica met gelijkheid:

   (a) *Heksen zijn geen spoken.*
   $\forall x \in W\,(H(x) \to \neg S(x))$

   (b) *Heksen zijn dol op kleine kinderen.*
   $\forall x, y \in W\,(H(x) \wedge K(y) \to L(x, y))$

   (c) *Als je me geen snoep geeft dan maak ik je aan het schrikken.*
   (In het Engels is dit '*trick or treat!*')

   $(\forall x \in V\,(S(x) \to \neg G(j, x, i)) \to B(j, i)$

   (Merk op dat het haakje sluiten van de $\forall$ vóór de $\to$ moet staan. En merk op dat het geen $B(i, j)$ moet zijn.)

   (d) *Er is precies één spook waar ik niet bang voor ben.*
   $\exists x \in W\,\big(S(x) \wedge \neg B(i, x) \wedge \forall y \in W\,(S(y) \wedge \neg B(i, y) \to x = y)\big)$

   (Merk op dat $\exists x \in W\,(S(x) \wedge \neg B(i, x))$ niet genoeg is. Dat zegt alleen dat er *minstens* één spook is, en niet dat er *precies* één spook is. En $\exists x \in W\,(S(x) \to \neg B(i, x))$ is echt héél fout. Dat is al waar als er een niet-spook bestaat.)

2. Vertaal de volgende formules naar het Nederlands:

(a) $\exists x \in V\, \forall y \in W\, \neg L(y,x)$
*Er is iets dat niemand lekker vindt.*

(b) $\forall x, y \in W\, (S(y) \to B(x,y))$
*Iedereen is bang voor spoken.*

(c) $\forall x \in V\, (C(x) \leftrightarrow \forall y \in W\, [K(y) \to L(y,x)])$
*Snoep is wat alle kinderen lekker vinden.*

(De vertaling *kinderen vinden alle snoep lekker* is niet genoeg. Dat is alleen de $\to$ kant van de $\leftrightarrow$. En de vertaling *kinderen vinden alleen snoep lekker* heeft er echt niets mee te maken. Dat zou $\forall x \in V\, \forall y \in W\, \big(K(y) \to (L(y,x) \leftrightarrow C(x))\big)$ zijn.)

(d) $\exists x \in V\, \forall y \in V\, (y = x \leftrightarrow G(i,y,j))$
*Ik geef je precies één ding om te eten.*

3. (a) Geef een model $M_3$ en een interpretatie $I_3$ in dit model zodat

$$(M_3, I_3) \models \forall x \in E\, (R(x,x) \to \forall y \in F\, R(x,y))$$

De eenvoudigste manier om dit voor elkaar te krijgen is een model en interpretatie waarbij $R(x,x)$ nooit waar is. Dan doet het er namelijk niet meer toe of $\forall y \in F\, R(x,y))$ waar is of niet vanwege de $\to$ die gebruikt wordt.

Dit kan bijvoorbeeld door $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$ en $R(x,y) = x < y$ te nemen. Omdat $R(x,x)$ voor geen enkele $x \in E$ geldt, is de totale bewering waar.

Je kunt natuurlijk ook voorbeelden bedenken waarbij $R(x,x)$ soms wel waar is. Zeker omdat $E$ en $F$ niet hetzelfde hoeven te zijn heb je veel mogelijkheden. Neem bijvoorbeeld $E = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ even}\}$ en voor $F = \{2\}$. En als $R(x,y)$ neem je $x$ is deelbaar door $y$. Het is duidelijk dat voor alle $x \in E$ $R(x,x)$ geldt, omdat ieder getal (dus zeker ieder even getal) deelbaar is door zichzelf. En verder is het zo dat voor alle $y \in F$ $R(x,y)$ geldt, omdat dat feitelijk niets anders is dan zeggen dat elk even natuurlijk getal deelbaar is door 2. En dat is waar.

(b) Geef een model $M_3'$ en een interpretatie $I_3'$ in dit model zodat

$$(M_3', I_3') \not\models \forall x \in E\, (R(x,x) \to \forall y \in F\, R(x,y))$$

Hier kun je bijna hetzelfde voorbeeld gebruiken: $E = \mathbb{N}$, $F = \mathbb{N}$ en $R(x,y) = x \leq y$. Omdat nu juist voor alle $x \in E$ wel $R(x,x)$ geldt, gaat het erom dat je voor een of andere $x \in E$ een $y \in F$ kunt aanwijzen waarvoor $R(x,y)$ niet waar is. Neem bijvoorbeeld $x = 37$ en $y = 0$. Dan geldt wel $R(37,37)$, maar er geldt niet $R(37,0)$. En in het bijzonder geldt $R(37,37) \to R(37,0)$ dus ook niet.

Natuurlijk zijn ook hier weer een hoop andere goede mogelijkheden. Echter, als je per ongeluk een model en interpretatie neemt waarbij

$R(x, x)$ nooit waar is, heb je duidelijk een foute keuze gemaakt omdat in die situatie de formule $\forall x \in E\,(R(x, x) \to \forall y \in F\, R(x, y))$ juist wel altijd waar is.

4. (a) Geldt: $\forall x \in D\, P(x) \models \exists x \in D\, P(x)$ ?

   Onder de tijdens het vragenuurtje gestelde aanname dat $D \neq \emptyset$, is dit waar. Immers in iedere situatie waarin $\forall x \in D\, P(x)$ geldt, geldt ook $\exists x \in D\, P(x)$. Als alle elementen van $D$ de eigenschap $P$ hebben, dan is er, omdat $D$ niet leeg is, zeker één element in $D$ dat die eigenschap heeft.

   (b) Geldt: $\exists x \in D\, P(x) \models \forall x \in D\, P(x)$ ?

   Dit geldt niet in zijn algemeenheid. Neem maar het model en de interpretatie waarbij $D = \mathbb{N}$ en $P(x)$ betekent $x$ is even. Het is duidelijk dat er inderdaad wel een $x \in D$ is waarvoor $P(x)$ geldt, bijvoorbeeld $x = 24$. Maar het is eveneens duidelijk dat $P(x)$ niet voor alle $x \in D$ geldt. Neem bijvoorbeeld maar $x = 13$.

   Verklaar beide antwoorden. (Leg uit waarom het zo is, of geef een model en interpretatie in dat model die laten zien dat het niet zo is.)