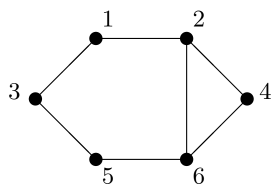
Formeel Denken 2007
Uitwerkingen Toets 4: Combinatoriek

1. (a) $\langle\{1,2,3,4,5,6\},\{(1,2),(1,3),(2,4),(2,6),(3,5),(4,6),(5,6)\}\rangle$

   (b) Nee, de graaf is geen boom. Een boom is een samenhangende graaf zonder cykels, en deze graaf heeft cykels, zoals $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$.

   (c) Ja, de graaf is planair, want hij kan zonder snijdende lijnen getekend worden als:



   (d) Nee, de graaf is niet bipartite. In een kleuring waarbij verbonden punten verschillende kleuren moeten hebben, hebben de punten 2, 4 en 6 alledrie verschillende kleuren. Dus er bestaat niet zo'n kleuring met ten hoogste twee kleuren.

   (e) Ja, de graaf heeft een Euler-pad: $2 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$. Dit pad bevat iedere lijn van de graaf precies één keer.

   (f) Nee, de graaf heeft geen Euler-circuit, want de stelling van Euler zegt dat dan alle punten een even graad zouden moeten hebben, en punten 2 en 6 hebben oneven graad.

   (g) Ja, de graaf heeft een Hamilton-pad: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3$. Dit pad bevat ieder punt van de graaf precies één keer.

   (h) Ja, de graaf heeft een Hamilton-circuit: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Deze cykel bevat ieder punt van de graaf precies één keer (behalve dan dat het beginpunt gelijk is aan het eindpunt, om het een cykel te maken).

   (i) Het kleurgetal van de graaf is drie. Het kleurgetal is *hoogstens* drie, want als je de punten 1 en 6 rood, de punten 2 en 5 groen en de punten 3 en 4 blauw kleurt, dan zijn er geen gelijkgekleurde punten verbonden. Hij is ook *minstens* drie, want de graaf was niet bipartite, dus heeft geen kleurgetal kleiner of gelijk aan twee.

   (j) Nee, de twee grafen zijn niet isomorf. De ene graaf heeft een cykel ter lengte drie, zoals $2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2$, en de andere graaf niet.

2. (a) $a_3 = 39$, want $a_0 = 1$, $a_1 = (1-1)^2 + 3 = 3$, $a_2 = (3-1)^2 + 3 = 7$, en $a_3 = (7-1)^2 + 3 = 39$.

   (b) We bewijzen dat a_n altijd oneven is met inductie:

   Basis-stap: Dit geldt voor $n = 0$, want a_0 is 1, en dat is oneven.

Inductie-stap met $n > 0$. De *inductiehypothese* is dat a_{n-1} oneven is, en we moeten laten zien dat a_n ook oneven is.
Uit de inductiehypothese volgt dat $a_{n-1} - 1$ even is. Het kwadraat daarvan, $(a_{n-1} - 1)^2$, is dus ook even. Daaruit volgt dat $(a_{n-1} - 1)^2 - 3$ oneven is. En dat is a_n, dus is a_n ook oneven.

3. Het kan op

$$\binom{6}{4} = 15$$

manieren. In de driehoek van Pascal is dit de entry in het vierkantje:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & \boxed{15} & & 6 & & 1
\end{array}$$