Formeel Denken 2009
Uitwerkingen Toets 2: Predikaatlogica

1. (a) Alle mannen houden van een vrouw.
   (b) Als er een grote man bestaat dan houdt Alice van alle grote mannen.

2. (a)
$$(\forall x \in V\; (H(b,x) \rightarrow \neg G(x)))$$
   (b)
$$(\forall x \in (M \cup V)\; (\forall y \in (M \cup V)\; ((H(a,x) \wedge H(a,y)) \rightarrow x = y)))$$

3.
$$((\neg\, (\forall x \in D\; (\forall y \in D\; P(a))) \wedge P(b)) \rightarrow R(a,b))$$

4. Neem $M = (\mathbb{N}, <)$ en de interpretaties I_1:
$$\begin{array}{lcl} D & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \longrightarrow & x = y \end{array}$$
   en I_2:
$$\begin{array}{lcl} D & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \longrightarrow & x < y \end{array}$$
   Dan geldt:
$$(M, I_1) \models \forall x, y \in D\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$
   maar:
$$(M, I_2) \not\models \forall x, y \in D\,(R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$
   Om te zien dat de formule onder interpretatie I_1 waar is, moet je opmerken dat 'gelijkheid' een symmetrische relatie is: als x gelijk is aan y, dan is y ook gelijk aan x, voor alle x en y.

   Om te zien dat de formule onder interpretatie I_2 niet waar is, neem $x = 0$ en $y = 1$. Let op: alleen maar zeggen dat *als* $R(x,y)$ waar is dat *dan* $R(y,x)$ niet waar kan zijn is niet genoeg. Als er in je gekozen domein namelijk helemaal geen x en y zijn waarvoor $R(x,y)$ geldt, dan is de hele formule opeens wel weer waar! Daarom zul je op de een of andere manier moeten aangeven dat er daadwerkelijk ook $x, y \in D$ zijn waarvoor $R(x,y)$ geldt.

5. Nee, deze uitspraak geldt niet.

   Neem $M' = (\{0\})$ en de interpretatie I_3:
$$D \quad \longrightarrow \quad \{0\}$$
   Dan geldt:
$$(M', I_3) \not\models \forall x \in D\, \exists y \in D\; (x \neq y)$$
   Omdat onder deze interpretatie D maar één element heeft is er bij $x = 0$ geen y te vinden die verschilt van x.

   Omdat er dus een model is waarin deze formule niet waar is, is de formule niet logisch waar, en geldt dus ook:
$$\not\models \forall x \in D\, \exists y \in D\; (x \neq y)$$