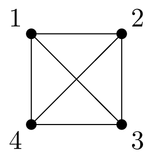
Formeel Denken 2009
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde

1. De K_4 is

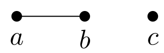


en er zijn in deze graaf 15 verschillende paden van 1 naar 2:

$$
\begin{array}{l}
1 \to 2 \\
1 \to 3 \to 2 \\
1 \to 4 \to 2 \\
1 \to 3 \to 4 \to 2 \\
1 \to 4 \to 3 \to 2 \\
1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \\
1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 2 \\
1 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2 \\
1 \to 4 \to 3 \to 1 \to 2 \\
1 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2 \\
1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 2 \\
1 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 2 \\
1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1 \to 2 \\
1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 2 \\
1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1 \to 2
\end{array}
$$

(Er zijn dus $\binom{15}{6} = 5005$ verschillende goede antwoorden op deze opgave mogelijk $\ddot{\smile}$)

2. Ja, er bestaan wel niet-samenhangende grafen met een Euler-pad, want als je geïsoleerde punten aan een graaf toevoegt beïnvloedt dat niet het bestaan van een Euler-pad. Bijvoorbeeld heeft de graaf



Euler-pad $a \to b$, maar is niet samenhangend (want er is geen pad van a naar c).

Nee, er bestaan geen niet-samenhangende grafen met een Hamilton-pad, want als er in een graaf een Hamilton-pad is is er tussen ieder tweetal punten een pad (namelijk het stuk van het Hamilton-pad tussen die twee punten).

3. De K_5 is niet planair, want deze graaf heeft kleurgetal 5 (alle punten zijn met elkaar verbonden en moeten bij een kleuring dus allemaal verschillende kleuren krijgen) en volgens de vierkleurenstelling uit de syllabus (die zegt dat elke planaire graaf kleurgetal ≤ 4 heeft) kan hij dus niet planair zijn.

4. Merk op dat het in deze opgave gaat over $n \geq 1$. De boom van Pythagoras van orde $n+1$ bestaat uit een vierkant plus twee bomen van Pythagoras van orde n. We hebben daarom de recursievergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_{n+1} &= 2a_n + 1
\end{aligned}
$$

Het bewijs van $a_n = 2^n - 1$ gaat nu als volgt:

We doen *inductie naar* n.

Basisstap: $n = 1$.

$a_1 = 1$ en $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, dus dit klopt.

Inductiestap:

Uit de *inductiehypothese* $a_n = 2^n - 1$ (IH) moeten we bewijzen dat $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$. Dit volgt met de berekening:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \overset{\text{IH}}{=} 2\,(2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

5.

$$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

De coëfficiënten in deze veelterm zijn de zevende rij van de driehoek van Pascal.

6. Er zijn $\binom{6}{2} = 15$ manieren om 2 objecten aan Alice te geven, en voor ieder van die manieren $\binom{4}{1} = 4$ om van de 4 overgebleven objecten er één aan Bill te geven. Dus er zijn in totaal

$$\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 15 \cdot 4 = 60$$

manieren.

Op een andere manier berekend zijn er $\binom{6}{3} = 20$ manieren om de 3 objecten voor Alice en Bill samen te kiezen, en voor ieder van die manieren $\binom{3}{2} = 2$ om uit die 3 objecten er 2 voor Alice te kiezen. Dat geeft natuurlijk hetzelfde aantal:

$$\binom{6}{3}\binom{3}{2} = 20 \cdot 3 = 60$$

Beide expressies zijn overigens gelijk aan

$$\frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 1 \cdot 6} = 60$$