Formeel Denken 2009
Uitwerkingen Inhaaltoets

1. Neem
$$f = a \wedge \neg b$$
We kijken nu naar de waarheidstabel

a	b	$\neg b$	f	$\neg f$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Waar de f kolom een 1 heeft, heeft de a kolom ook een 1, dus $f \vDash a$. Waar de b kolom een 1 heeft, heeft de $\neg f$ kolom ook een 1, dus $b \vDash \neg f$. Maar als $v(a) = 1$ en $v(b) = 0$, dan is $v(f) = 1$ maar $v(b) = 0$, dus $f \vDash b$ geldt niet.

2. $$(\forall x \in M\, (\exists y \in M\, (\forall z \in M\, (\neg\, z = y \to H(x, y, z)))))$$

3. Een goede invariant is
$$P(w) := \left(\begin{array}{c} \text{het aantal symbolen } S \text{ in } w \\ + \text{ het aantal symbolen } a \text{ in } w \\ + \ 2 \times \text{het aantal symbolen } A \text{ in } w \end{array}\right) \text{ is oneven}$$
Dit geldt duidelijk voor S (want dan is de uitdrukking tussen haakjes 1, dus oneven) en blijft duidelijk behouden onder iedere productie (want de regel $S \to AS$ voegt 2 aan de uitdrukking tussen haakjes toe zodat deze oneven blijft, terwijl de andere twee regels dit onveranderd laten), maar geldt niet voor $aaaa$ (want dan is de uitdrukking tussen haakjes 4, dus even).

4. De K_1 heeft nul lijnen, en als je een punt aan de K_n toevoegt om de K_{n+1} te maken komen er natuurlijk n lijnen bij (van het nieuwe punt naar de n oude punten). Daarom is de recursieve definitie van a_n:
$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 0 \\ a_{n+1} & = & a_n + n \end{array}$$
We bewijzen nu $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ voor $n \geq 1$ met inductie naar n:
   - Basisstap: $a_1 = 0$ en $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - 1) = 0$, dus dat klopt.

- Inductiestap: we hebben als inductiehypothese $a_n = \frac{1}{2}n(n-1)$ en moeten laten zien dat $a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)n$. Dit volgt met de berekening

$$a_{n+1} = a_n + n \overset{\text{IH}}{=} \frac{1}{2}n(n-1) + n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n+1)n$$

5.

$$\mathcal{GF}a \wedge \mathcal{GF}b \wedge \mathcal{G}\neg(a \wedge b)$$