Formeel Denken 2009
Uitwerkingen Tentamen

1.
$$(H \wedge (\neg E \leftrightarrow \neg(\neg L \wedge V)))$$

Als ik eet dan heb ik eten en dan is het niet zo dat ik honger heb of aan de lijn doe of allebei.

2.

a	b	c	$\neg a$	$b \wedge \neg a$	$b \wedge \neg a \vee c$	$a \to b \wedge \neg a \vee c$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

3.

a	b	$a \leftrightarrow b$	$a \wedge b$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \wedge \neg b$	$a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b$
0	0	**1**	0	1	1	1	**1**
0	1	**0**	0	1	0	0	**0**
1	0	**0**	0	0	1	0	**0**
1	1	**1**	1	0	0	0	**1**

In deze waarheidstabel zijn de kolommen van $a \leftrightarrow b$ en $a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b$ hetzelfde. Hieruit volgt dat deze formules dus inderdaad logisch equivalent zijn.

4.
$$(\exists x \in D\, (\forall y \in D\, ((\forall z \in D\, (W(z) \to N(z,y))) \leftrightarrow (y = x))))$$

Er is een koud object waarvoor geldt dat alle nattere objecten ook koud zijn.

5. Het symbool $\models$ betekent dat de formule waar is in ieder model onder iedere interpretatie.

   De uitspraak geldt niet. Neem bijvoorbeeld als model $M = (\mathbb{N}, 0)$ en neem als interpretatie I:

$$\begin{aligned} D &\mapsto \mathbb{N} \\ a &\mapsto 0 \\ K(x) &\mapsto x = 0 \\ W(x) &\mapsto x = 0 \end{aligned}$$

Dan gelden $(M, I) \models K(a)$ en $(M, I) \not\models \neg W(a)$ en dus ook $(M, I) \not\models (K(a) \leftrightarrow \neg W(a))$. En omdat $0 \in \mathbb{N}$ dan ook $(M, I) \not\models (\forall x \in D\,(K(x) \leftrightarrow \neg W(x)))$.

En dus geldt $(\forall x \in D\,(K(x) \leftrightarrow \neg W(x)))$ niet onder iedere interpretatie, en daarom $\not\models (\forall x \in D\,(K(x) \leftrightarrow \neg W(x)))$.

6. Neem model $M = (\{1, 2\})$ met interpretatie I: $D \mapsto \{1, 2\}$.

   Dan kunnen we x_1 1 nemen, en voor x_2 2. Deze getallen zijn duidelijk niet gelijk, en ieder getal in $\{1, 2\}$ is gelijk aan één van deze twee getallen.

   Dus is de formule

   $$(\exists x_1 \in D\,(\exists x_2 \in D\,(\neg(x_1 = x_2) \land (\forall y \in D\,((y = x_1) \lor (y = x_2))))))$$

   waar in dit model onder deze interpretatie.

7. $$a^* b^*$$

   Een woord waar geen *ba* in voorkomt bestaat óf alleen uit a's of uit b's, óf als er zowel a's of b's in voorkomen dan staan alle a's voor de b's. Vandaar dat zo'n woord altijd van de vorm $a^n b^m$ moet zijn. Omgekeerd hebben alle woorden van die vorm nooit *ba* als deelwoord. En tenslotte geldt duidelijk

   $$\mathcal{L}(a^* b^*) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

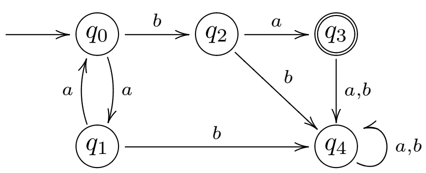
8. Ja, dit is een goede invariant die deze eigenschap aantoont:

   - $P(S)$ geldt, want S bevat nul symbolen uit $\{a, b, A\}$, en nul is even.
   - De invariant is behouden onder de productieregels. Als we een tabel maken van van hoeveel elementen uit $\{a, b, A\}$ door een regel worden toegevoegd

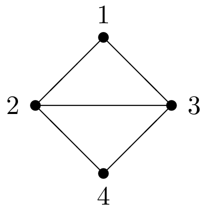
S	$\to$	aA	$2 - 0 =$	$+2$
S	$\to$	Bbb	$2 - 0 =$	$+2$
A	$\to$	Sb	$1 - 1 =$	$+0$
B	$\to$	S	$0 - 0 =$	$+0$
B	$\to$	λ	$0 - 0 =$	$+0$

     dan is dat aantal altijd even.
   - De invariant geldt niet voor het woord *aaaaabbbbbbbbbb*, want dit bevat 15 elementen van $\{a, b, A\}$, en 15 is niet even.

9.



10.



Deze graaf heeft vier punten, is geen boom (want hij bevat de cykel $1 \to 2 \to 3 \to 1$), bevat het Eulerpad $2 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 3$, maar bevat geen Eulercykel (want volgens de stelling van Euler moeten dan alle punten even graad hebben, maar punt 2 heeft graad 3), en tenslotte is deze graaf duidelijk planair.

11.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= 1 \\
a_3 &= a_2^2 + a_2 + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3 \\
a_4 &= a_3^2 + a_3 + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13 \\
a_5 &= a_4^2 + a_4 + 1 = 13^2 + 13 + 1 = 169 + 13 + 1 = 183
\end{aligned}
$$

Dus $a_5 = 183$.

Voor alle $n \geq 2$ geldt dat a_n oneven is.

Bewijs met inductie naar n.

- *Basisstap*, $n = 2$: $a_2 = 1$, en 1 is inderdaad oneven.
- *Inductiestap.* Laat gegeven zijn dat a_n oneven is, met $n \geq 2$. Dan is a_n^2 ook oneven, en is dus $a_n^2 + a_n + 1$ de som van drie oneven getallen, wat ook oneven is. En dus is a_{n+1} ook oneven.

12. Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ manieren om de witte ballen te kiezen en $\binom{5}{3} = 10$ manieren om de zwarte ballen te kiezen. Dus zijn er $10 \cdot 10 = 100$ manieren om de keuze uit de opgave te maken.

Deze binomiaalcoëfficienten staan in de driehoek van Pascal op de volgende plaatsen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & \boxed{10} & & \boxed{10} & & 5 & & 1
\end{array}
$$

13.

$$\Box\neg Z \wedge \neg\Box\Box\neg Z$$

Als het zomer is mag je naar buiten, maar het hoeft niet.

14. Hier is een tabel met welke formule waar is in welke wereld van dit Kripke-model:

	a	$\Diamond a$	$\Box\Diamond a$	$\Diamond\Box\Diamond a$	$\Box\Diamond\Box\Diamond a$	$\Diamond\Box\Diamond\Box\Diamond a$
x_1	1	0	0	1	0	1
x_2	0	0	1	0	1	0
x_3	0	1	0	1	0	1

15.

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{X}(a \wedge b))$$