Formeel Denken 2010
Toets 2: Predikaatlogica

(06/10/10)

1.
$$(\neg (\exists x \in D\, P(x)) \to (\forall y \in D\ (\forall z \in D\ (\neg P(y) \wedge \neg P(z)))))$$

2. (a) Karel kent iemand die geen boer is.
   (b) Alle boeren eten wel eens vlees of vis.
   Alle boeren zijn niet vegetariër.
   Geen enkele boer is vegetariër.
   Elke boer eet voedsel dat vlees of vis bevat.

3. (a)
$$(\forall x \in M\ (B(x) \to \forall y \in V\ (\neg K(x,y) \to \neg E(x,y))))$$
   (b)
$$(\forall x \in V\ (Q(x) \to \neg E(k,x)))$$
   (c)
$$(\exists x \in M\ (\exists y \in M\ (\neg(x = y) \wedge (\forall z \in M\ ((K(k,z) \wedge B(z)) \leftrightarrow ((z = x) \vee (z = y)))))))$$
$$(\exists x \in M\ (\exists y \in M\ (\neg(x = y) \wedge (K(k,x) \wedge (K(k,y) \wedge (B(x) \wedge (B(y) \wedge$$
$$(\forall z \in M\ ((K(k,z) \wedge B(z)) \to ((z = x) \vee (z = y))))))))))$$

4. Laat $M_1 = (\mathbb{N}, 1, +, <)$, laat I_1 de interpretatie zijn die D interpreteert als $\mathbb{N}$ en $R(x,y)$ als $x < y$, en laat I_2 de interpretatie zijn die D interpreteert als $\mathbb{N}$ en $R(x,y)$ als $y = x + 1$. Dan
$$(M_1, I_1) \models \forall x, y, z \in D\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$
want als $x < y$ en $y < z$ dan ook $x < z$, en
$$(M_1, I_2) \not\models \forall x, y, z \in D\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$
want als $y = x + 1$ en $z = y + 1$ dan $z = x + 2$ en dus niet $z = x + 1$.

   Een andere oplossing is het model $M_2 = (\text{mensen}, \text{ouder dan}, \text{ouder van})$. Laat I_3 de interpretatie zijn die D interpreteert als mensen en $R(x,y)$ als x is ouder *dan* y en laat I_4 de interpretatie zijn die D interpreteert als mensen en $R(x,y)$ als x is ouder *van* y. Dan
$$(M_2, I_3) \models \forall x, y, z \in D\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$
want als x ouder dan y is en y zelf ouder dan z, dan is x ook automatisch ouder dan z. Verder geldt
$$(M_2, I_4) \not\models \forall x, y, z \in D\,(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z))$$
want als x ouder van y is en y is weer ouder van z, dan is x geen ouder van z maar een grootouder. (Misschien zijn er wel rare families te vinden waarin iemand zowel de ouder als de grootouder is, maar vanwege de 'voor alle' is het voldoende om één combinatie van x, y en z te vinden waarbij dit niet klopt. Neem jezelf eens als z, je moeder als y en een van je grootvaders als x. Klopt de bewering dan onder interpretatie I_4?)

5. De uitspraak geldt. Om dit te laten zien moeten we aantonen dat onder elke interpretatie die $\neg(\exists x \in D\, P(x))$ waar maakt ook de formule $\forall x \in D\,(\neg P(x))$ waar is. Deze eerste formule zegt dat er geen object in de interpretatie van D bestaat waarvoor de interpretatie van $P(x)$ waar is. Maar dat betekent dat voor alle objecten in de interpretatie van D de interpretatie van $P(x)$ niet waar is. En dat is precies wat de tweede formule zegt. (Overtuig jezelf dat de redenering ook klopt als de interpretatie van D de lege verzameling is.)