Formeel Denken 2010
Uitwerkingen tentamen
(18/01/11)

1.

$$(\neg N \to (Bin \vee \neg Reg)) \wedge \neg N$$

Deze formule is logisch equivalent aan het eenvoudigere

$$(Bin \vee \neg Reg) \wedge \neg N$$

wat evenwel minder precies met de oorspronkelijke zin correspondeert.

2.

$$(\neg a \to ((b \wedge a) \vee \neg c))$$

a	b	c	$\neg a$	$b \wedge a$	$\neg c$	$b \wedge a \vee \neg c$	$\neg a \to b \wedge a \vee \neg c$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1

3. Nee die bestaan niet. Als $f \wedge g$ logisch waar is heeft $f \wedge g$ overal enen in de waarheidstabel. Dus hebben zowel f als g overal enen. Maar dan heeft ook $f \vee g$ overal enen. En dus is $f \vee g$ dan ook logisch waar.

4.

$$(\exists x \in M\ (\forall y \in M\ (H(x, y) \to H(y, x))))$$

Er is iemand die alleen houdt van mensen van die van hem of haar houden.

5.

$$(\exists x, y \in M\ (\neg(x = y) \wedge \neg H(x, y) \wedge \neg H(y, x))) \to \neg(\forall x, y \in M\ H(x, y))$$

6. Interpreteer D als een willekeurig niet leeg domein, en interpreteer R als ongelijkheid.

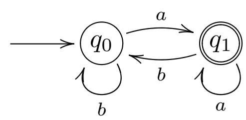
7.

$$(a \cup b \cup c)^* \big(abcba \cup abc(a \cup b \cup c)^* cba \cup cbabc \cup cba(a \cup b \cup c)^* abc\big)(a \cup b \cup c)^*$$

8. Door regels te substitueren krijgen we de grammatica

$$S \quad \rightarrow \quad aS \mid bS \mid aSa \mid a$$

Dus kunnen we precies alle woorden maken die op a eindigen. De automaat is daarom:



9. Deze eigenschap is niet behouden onder de productiestap

$$bB \rightarrow b$$

Merk op dat dit wel een invariant is voor de vereenvoudigde grammatica uit de uitwerking van de vorige opgave.

10.
$$h \rightarrow g \rightarrow i \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow j \rightarrow e \rightarrow a \rightarrow f \rightarrow k \rightarrow h$$

11. De recursieve definitie van a_n is:

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & 1 & \\ a_{n+1} & = & a_n + 3^{n+1} & \text{voor } n \geq 0 \end{array}$$

Het inductiepredikaat is:

$$P(n) := \left[a_n = \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1)\right]$$

Het bewijs met inductie is:

Basisstap ($n = 0$): Te laten zien dat $P(0)$ geldt ofwel dat

$$a_0 = \frac{1}{2}(3^{0+1} - 1)$$

Dit klopt inderdaad, want $a_0 = 1$ en ook $\frac{1}{2}(3^{0+1} - 1) = \frac{1}{2}(3 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

Inductiestap ($n \geq 0$): De inductiehypothese (IH) is $P(n)$ ofwel er is gegeven dat

$$a_n = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

Te laten zien dat $P(n+1)$ ofwel

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(3^{(n+1)+1} - 1)$$

Dit volgt inderdaad:

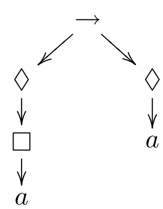
$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= a_n + 3^{n+1} && \text{(recursieve definitie van } a_n\text{)} \\
&= \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1) + 3^{n+1} && \text{(IH)} \\
&= \tfrac{1}{2}(3^{n+1} - 1 + 2 \cdot 3^{n+1}) && \text{(algebra)} \\
&= \tfrac{1}{2}(3 \cdot 3^{n+1} - 1) && \text{(algebra)} \\
&= \tfrac{1}{2}(3^{(n+1)+1} - 1) && \text{(algebra)}
\end{aligned}$$

12.

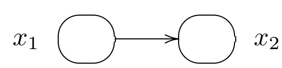
$$\binom{7}{5}\binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210 \text{ manieren}$$

13.

$$(\Diamond\Box a \to \Diamond a)$$



14. Neem voor $\mathcal{M}$:



Dan geldt:

$$x_2 \nVdash a$$

$$x_2 \Vdash \Box a$$

$$x_1 \nVdash \Diamond a$$

$$x_1 \Vdash \Diamond\Box a$$

$$x_1 \nVdash \Diamond\Box a \to \Diamond a$$

En dus:

$$\mathcal{M} \nvDash \Diamond\Box a \to \Diamond a$$

15.

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{X}\mathcal{G}\neg b)$$

$$\mathcal{G}(a \to \mathcal{X}\neg\mathcal{F}b)$$