

Formeel Denken 2011
Uitwerkingen Toets 1: Propositie logica
(21/09/11)

1. (a)

$$U \wedge (U \rightarrow \neg A)$$

Dit is waar in het model

$$\begin{aligned} v(A) &= 0 \\ v(N) &= 1 \\ v(U) &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$N \leftrightarrow U$$

of

$$N \rightarrow U$$

Beide formules zijn waar in hetzelfde model als gegeven bij opgave (a).

(c)

$$A \rightarrow N$$

Dit is waar in hetzelfde model als gegeven bij opgave (a).

(d)

$$N \wedge \neg N$$

Er is geen model waarin dit waar is, zoals blijkt uit de volgende waarheidstabel:

N	$\neg N$	$N \wedge \neg N$
0	1	0
1	0	0

2. *Als ik in Amsterdam ben, ben ik niet in Nijmegen.*

Deze formule is niet logisch waar, want zijn kolom in de waarheidstabel bestaat niet alleen uit énen:

A	N	$\neg N$	$A \rightarrow \neg N$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

(Het feit dat deze regel van de waarheidstabel correspondeert met een model dat in de echte wereld niet voorkomt is irrelevant: het gaat hier om *logische* waarheid, en dat is waarheid ongeacht de interpretatie van de atomaire formules.)

3.

$$((\neg a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg b \rightarrow a))$$

a	b	$\neg a$	$\neg a \rightarrow b$	$\neg b$	$\neg b \rightarrow a$	$\neg a \rightarrow b \leftrightarrow \neg b \rightarrow a$
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1

4. Neem:

$$h := \neg(a \rightarrow \neg b)$$

Dat deze formule logisch equivalent is aan $a \wedge b$ blijkt uit de volgende waarheidstabel:

a	b	$\neg b$	$a \rightarrow \neg b$	$\neg(a \rightarrow \neg b)$ h	$a \wedge b$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Logisch equivalent betekent namelijk dat alle rijen in de tabel gelijk moeten zijn en dat is hier duidelijk het geval.

5. Neem

$$\begin{aligned} f &:= a \\ g &:= b \end{aligned}$$

Dan is $f \rightarrow g$ wél, maar $g \rightarrow f$ niet waar in het model

$$\begin{aligned} v(a) &= 0 \\ v(b) &= 1 \end{aligned}$$

zoals ook blijkt uit de waarheidstabel:

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$
f	g	$f \rightarrow g$	$g \rightarrow f$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Hieruit volgt dat voor deze f en g de formule $g \rightarrow f$ geen logisch gevolg is van $f \rightarrow g$. Want als $g \rightarrow f$ wel een logisch gevolg was geweest van $f \rightarrow g$, had bij elk model v met $v(f \rightarrow g) = 1$ ook $v(g \rightarrow f) = 1$ moeten gelden.