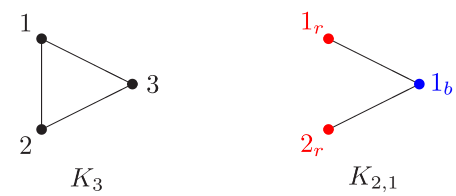
Formeel Denken 2011
Uitwerkingen toets 4: Discrete wiskunde
(7/12/11)

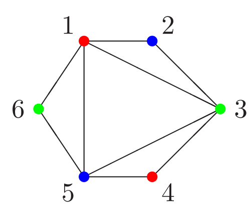
1. Nee, die zijn niet isomorf. Deze grafen zijn:



want de graaf K_3 bestaat uit 3 punten die allemaal onderling door een lijn verbonden zijn, terwijl de graaf $K_{2,1}$ bestaat uit 2 rode punten en 1 blauw punt, waarbij alleen alle rode en blauwe punten onderling door een lijn verbonden zijn. De graaf K_3 heeft dus 3 lijnen, terwijl de graaf $K_{2,1}$ maar 2 lijnen heeft, en dus kunnen ze niet isomorf zijn.

2. Nee, zo'n graaf bestaat niet. De mogelijke graden zijn 0 tot en met 4, en met vijf punten moeten al deze graden voorkomen. Evenwel kan in een graaf met vijf punten niet zowel een punt met graad 0 als een punt met graad 4 voorkomen, want het punt met graad 0 kan met geen enkel ander punt verbonden zijn, terwijl het punt met graad 4 juist wel met elk ander punt verbonden moet zijn. Dit geeft tegenstrijdige eisen aan de verbinding tussen het punt met graad 0 en het punt met graad 4, en dus kan de graaf niet bestaan.

3. De volgende graaf voldoet aan al deze voorwaarden:



De graaf is duidelijk samenhangend, heeft duidelijk zes punten, bevat het Euler circuit

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1 \to 3 \to 5 \to 1$$

en is niet kleurbaar met 2 kleuren (want de punten 1, 3 en 5 moeten allemaal een verschillende kleur hebben) maar wél kleurbaar met drie kleuren (zoals uit het plaatje blijkt).

4. We hebben:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_{0+1} = \frac{{a_0}^2 + 2}{2a_0} = \frac{1^2 + 2}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = a_{1+1} = \frac{{a_1}^2 + 2}{2a_1} = \frac{\frac{3}{2}^2 + 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4} + 2}{3} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{8}{4}}{3} = \frac{(\frac{17}{4})}{3} = \frac{17}{12}$$

5. **Stelling.** $2^n \geq 1$ voor alle $n \geq 0$.

   Bewijs. We definiëren $P(n) := [2^n \geq 1]$.

   We laten zien dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$ met inductie naar n.

   Basisstap. We moeten laten zien dat $P(0)$, ofwel dat $2^0 \geq 1$, maar dit is zo want $2^0 = 1$ en $1 \geq 1$.

   Inductiestap. We moeten laten zien dat $P(n) \to P(n+1)$ voor alle $n \geq 0$.

   Neem dus aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel dat $2^n \geq 1$, de inductiehypothese. We moeten laten zien dat $P(n+1)$ dan ook geldt, ofwel dat dan ook $2^{n+1} \geq 1$.

   Uit de inductiehypothese volgt door links en rechts met 2 te vermenigvuldigen dat $2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot 1$, ofwel dat $2^{n+1} \geq 2$. Maar omdat $2 \geq 1$ volgt hier ook uit dat $2^{n+1} \geq 1$.

   Dit voltooit het inductiebewijs.

6. Volgens het binomium van Newton is dit

$$(1 + (-1))^8 = \binom{8}{0}(-1)^0 + \binom{8}{1}(-1)^1 + \cdots \binom{8}{8}(-1)^8$$

   omdat $(-1)^k = 1$ als k even is en $(-1)^k = -1$ als k oneven is. Natuurlijk geldt ook dat

$$(1 + (-1))^8 = (1 - 1)^8 = 0^8 = 0$$

   en we hebben dus:

$$\binom{8}{0} - \binom{8}{1} + \binom{8}{2} - \binom{8}{3} + \binom{8}{4} - \binom{8}{5} + \binom{8}{6} - \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 0$$

   (Je kan het met behulp van de driehoek van pascal natuurlijk ook gewoon uitrekenen

$$1 - 8 + 28 - 56 + 70 - 56 + 28 - 8 + 1 = 0$$

   maar dat een expressie zoals dit 0 is geldt dus voor iedere n en hangt niet van het getal 8 af.)