

Formeel Denken 2011
Uitwerkingen inhaaltoets
(10/01/12)

Het cijfer voor deze toets is het aantal punten gedeeld door tien. De eerste 10 punten zijn gratis. Veel succes!

1. Deze equivalentie zegt dat voor ieder model v geldt dat

$$v(\neg(f \wedge g)) = v(\neg f \vee \neg g)$$

dus dat is wat we moeten laten zien. Neem dus een willekeurig model v .

Nu geldt $v(\neg(f \wedge g)) = 1$ precies dan als $v(f \wedge g) = 0$, precies dan als $v(f) = 0$ of $v(g) = 0$ of allebei.

Maar $v(\neg f \vee \neg g) = 1$ precies dan als $v(\neg f) = 1$ of $v(\neg g) = 1$ of allebei, en dat geldt ook precies dan als $v(f) = 0$ of $v(g) = 0$ of allebei.

Hieruit volgt dat $v(\neg(f \wedge g)) = 1$ precies dan als $v(\neg f \vee \neg g) = 1$, en daaruit volgt dat $v(\neg(f \wedge g)) = v(\neg f \vee \neg g)$, en dat is wat we moesten laten zien.

- 2.

$$((\exists x \in M O(b, x)) \wedge (\exists x_1 \in M (\exists x_2 \in M (\exists x_3 \in M ((\neg(x_1 = x_2) \wedge (\neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3))) \wedge ((O(d, x_1) \wedge O(v, x_1)) \wedge ((O(d, x_2) \wedge O(v, x_2)) \wedge (O(d, x_3) \wedge O(v, x_3))))))))))$$

- 3.

$$S \rightarrow \emptyset \mid \lambda \mid a \mid b \mid (S \cup S) \mid (SS) \mid S^*$$

De eigenschap

$$P(w) := w \text{ begint niet met } *$$

is een invariant

- $P(S)$ geldt, want het woord S begint met S en niet met $*$.
- Als $P(w)$ en $w \rightarrow w'$, dan zijn er twee mogelijkheden. Of een S niet aan het begin wordt vervangen. Dan begint w' met hetzelfde symbool als w en geldt $P(w')$ ook. Of een S aan het begin wordt vervangen. Maar alle rechterkanten van de regels beginnen niet met een $*$ en dus w' dan ook niet, en dus geldt $P(w')$ nog steeds.

Verder geldt $P(*)$ niet, want $*$ begint wél met een $*$. Daardoor volgt dat $*$ niet in de taal van deze grammatica zit.

4. Als $x_0 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ een cykel is, dan is $x_n \rightarrow \dots \rightarrow x_0$ ook een cykel. Deze twee cycli zijn verschillend, want cycli mogen geen dubbele lijnen bevatten en dus geldt $(x_0, x_1) \neq (x_{n-1}, x_n)$, en daarom beginnen beide cycli met een verschillende lijn.

Op deze wijze valt de verzameling cykels van een graaf op een natuurlijke manier in tweetallen uiteen, en heeft deze verzameling dus een even aantal elementen.

5. $\mathcal{M}_1 = \langle W, R, V_1 \rangle$ en $\mathcal{M}_2 = \langle W, R, V_2 \rangle$ met

$$\begin{aligned} W &= \{x_i \mid i \geq 0\} \\ R(x_i) &= \{x_j \mid j \geq i\} \\ V_1(x_i) &= \begin{cases} \{a\} & \text{als } i \text{ even} \\ \{b\} & \text{als } i \text{ oneven} \end{cases} \\ V_2(x_i) &= \begin{cases} \{b\} & \text{als } i \text{ even} \\ \{a\} & \text{als } i \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$