Formeel Denken 2011
Uitwerkingen tentamen
(17/01/12)

1.

$$(G \leftrightarrow (V \vee \neg E))$$

Dit antwoord beschrijft het bindend studieadvies, en is mogelijk meer informatief dan een heel precieze vertaling van de Nederlandse zin. Vertalingen die beter met de zin corresponderen kunnen dus ook goed zijn, mits goed gemotiveerd.

2.

$$((a \to b) \leftrightarrow ((a \to b) \leftrightarrow a))$$

a	b	$(a \to b)$	$((a \to b) \leftrightarrow a)$	$((a \to b) \leftrightarrow ((a \to b) \leftrightarrow a))$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Deze formule is niet logisch waar, want de kolom van deze formule bevat een nul. Anders gezegd, in de twee modellen met $v(a) = 0$ geldt de formule niet.

3. Neem

$$\begin{aligned} f &:= a \\ g &:= \neg a \\ h &:= a \end{aligned}$$

Dan geldt $f \not\models g$, want in het model $v(a) = 1$ geldt f wel maar g niet. Idem $g \not\models h$, met het model $v(a) = 0$. Maar f is identiek aan h, dus geldt $f \models h$ wel.

4.

$$((\forall x \in M\ (\exists y \in M (A(y) \wedge H(x, y)))) \wedge \neg(\exists y \in M (A(y) \wedge (\forall x \in M\ H(x, y)))))$$

5.

$$\begin{gathered} ((\exists x_1 \in M\ (\exists x_2 \in M\ (\neg(x_1 = x_2) \wedge ((A(x_1) \wedge A(x_2)) \wedge \\ (\forall x \in M\ (A(x) \to ((x = x_1) \vee (x = x_2)))))))) \to \\ (\forall x \in M\ (\forall y \in M\ ((\neg(x = y) \wedge (A(x) \wedge A(y))) \to H(x, y))))) \end{gathered}$$

6.
$$(\exists x \in D\,(\forall y \in D\,\neg R(x,y)))$$

Deze formule is waar in het model:

$$M := (\mathbb{N}, <)$$

onder de interpretatie:

$$\begin{array}{rcl} D & \rightsquigarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \rightsquigarrow & y < x \end{array}$$

Onder deze interpretatie betekent de formule dat er een $x \in \mathbb{N}$ is zodat voor alle $y \in \mathbb{N}$ geldt dat y niet kleiner is dan x. Dit is zo, want als je $x = 0$ neemt dan geldt natuurlijk nooit dat $y < x$.

7. **⇒:** Stel we hebben $\lambda \in LL'$. Dan zijn er woorden $w \in L$ en $w' \in L'$ met $\lambda = ww'$. Maar de enige woorden waarvoor dit geldt zijn $w = \lambda$ en $w' = \lambda$, dus geldt $\lambda \in L$ en $\lambda \in L'$.

   ⇐: Stel we hebben $\lambda \in L$ en $\lambda \in L'$. Door die achter elkaar te plakken hebben we dan natuurlijk ook $\lambda \in LL'$.

8. Er zijn verschillende eenvoudige goede oplossingen. De eerste twee zijn gebaseerd op de observatie dat de taal precies uit het lege woord en de woorden die een b bevatten bestaat:

$$\lambda \cup (a \cup b)^* b\,(a \cup b)^*$$

$$\lambda \cup a^* b\,(a \cup b)^*$$

$$(a^* b\, a^*)^*$$

9.

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid bB \mid \lambda \\ A & \rightarrow & aA \mid bB \\ B & \rightarrow & aB \mid bB \mid \lambda \end{array}$$

10. Volgens de stelling van Euler kan dat alleen als de graaf niet samenhangend is, ofwel als deze meer dan één component heeft. Om ieder punt graad vier te kunnen geven moet iedere component minstens vijf punten hebben. Het minimaal aantal punten is dus tien.

    Op isomorfie na is er maar één graaf met tien punten die deze eigenschappen heeft: de graaf die bestaat uit twee kopieën van de K_5.

11.

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 11 \\ a_3 & = & 111 \\ a_4 & = & 1111 \end{array}$$

Stelling. $a_n = (10^n - 1)/9$ voor alle $n \geq 0$.

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar n. Definieer:

$$P(n) := (a_n = \frac{10^n - 1}{9})$$

We moeten dus bewijzen dat $P(n)$ voor alle $n \geq 0$.

Basisstap. We moeten laten zien dat $P(0)$ geldt. Dat zegt dat $a_0 = (10^0 - 1)/9$, en per definitie $a_0 = 0$ en $(10^0 - 1)/9 = (1 - 1)/9 = 0$ en dat is inderdaad gelijk.

Inductiestap. We moeten laten zien dat $\forall n \in \mathbb{N}\,(P(n) \to P(n+1))$.

Dus stel we hebben een $n \in \mathbb{N}$ en we weten dat $P(n)$ geldt, ofwel dat $a_n = (10^n - 1)/9$ (de **IH**). We moeten dan laten zien dat $P(n+1)$, ofwel dat $a_{n+1} = (10^{n+1} - 1)/9$. Dit volgt met de volgende berekening:

$$a_{n+1} \overset{\text{def}}{=} 10a_n + 1 \overset{\text{IH}}{=} 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 1 = \frac{10 \cdot 10^n - 10 + 9}{9} = \frac{10^{n+1} - 1}{9}$$

Samen geeft dit met inductie dus dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$, en dat is wat we bewijzen moesten. $\square$

12. Je kunt op $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$ manieren twee rode, en op $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$ manieren twee zwarte sokken pakken, dus je kunt op $3 + 6 = 9$ manieren twee sokken van gelijke kleur pakken.

    Je kunt op $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$ manieren twee sokken uit de la halen.

    De kans dat als je willekeurig twee sokken pakt, dat je dan twee gelijkgekleurde sokken treft is dus $\frac{9}{21} = \frac{3}{7}$, ofwel ongeveer 43%.

13.

$$\neg \Box P \to \neg P$$

14. Neem een Kripke-model met één wereld x en zonder pijlen, ofwel

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & = & \langle W, R, V \rangle \\ W & = & \{x\} \\ R(x) & = & \emptyset \\ V(x) & = & \emptyset \end{array}$$

(Het doet er eigenlijk niet toe doet wat $V(x)$ is.)

In de wereld x geldt voor iedere modale formule f dat

$$x \Vdash \Box f$$

omdat f waar is alle nul werelden die vanuit x toegankelijk zijn. We hebben dan dus:

$$x \Vdash \Box\neg a$$

en:

$$x \Vdash \Box a$$

en daarom:

$$x \nVdash \neg\Box a$$

en dus ook:

$$x \nVdash (\Box\neg a \to \neg\Box a)$$

en omdat deze formule in minstens één wereld van $\mathcal{M}$ niet geldt daarom ook:

$$\mathcal{M} \nvDash (\Box\neg a \to \neg\Box a)$$

15.

$$\mathcal{G}(a \to \neg\mathcal{X}a \wedge \neg\mathcal{X}\mathcal{X}a)$$