Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Tentamen
(23/01/13)

1. Schrijf de formule van de propositielogica

$$a \to \neg b \leftrightarrow \neg(a \wedge b)$$

volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef de waarheidstabel.

De officiële schrijfwijze is

$$((a \to \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge b))$$

De bijbehorende waarheidstabel:

a	b	$\neg b$	$(a \to \neg b)$	$(a \wedge b)$	$\neg(a \wedge b)$	$((a \to \neg b) \leftrightarrow \neg(a \wedge b))$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1

2. Benader de betekenis van de zin:

De president legt de eed af op de 20e, maar omdat dat dit jaar een zondag is, vindt het feest pas plaats op de 21e.

zo goed mogelijk door een formule van de propositielogica. Gebruik hierbij als woordenboek:

E	de president legt de eed af op 20 januari
F	het feest vindt in 2013 plaats op 21 januari
Z	in 2013 is 20 januari een zondag

In hoeveel van de acht modellen v die een waarheidswaarde aan deze drie atomen toekennen is deze uitspraak waar?

$$E \wedge Z \wedge F$$

Deze formule is in één van de acht modellen waar, namelijk alleen in het model:

$$v(E) = v(Z) = v(F) = 1$$

3. Geef vier verschillende formules van de propositielogica die als enige atomaire formule de atomaire formule a bevatten, en die allemaal onderling niet logisch equivalent zijn. Hoeveel van deze vier formules zijn logisch waar? Verklaar je antwoorden.

De volgende vier formules zijn logisch niet equivalent:

$$a \qquad\qquad \neg a \qquad\qquad \top \qquad\qquad \bot$$

De eerste twee formules zullen beide precies één 1 in de waarheidstabel hebben, maar op een verschillende plek. Van de laatste twee formules is $\top$ logisch waar, en $\bot$ is $\neg\top$. De laatste twee formules moeten nog geschreven worden volgens de propositielogica met alleen de atomaire formule a, dat kan bijvoorbeeld door respectievelijk $(a \vee \neg a)$ en $(a \wedge \neg a)$ te kiezen.

4. Benader de betekenis van de zin:

De laatste trein stopt bij ieder station, maar dat geldt niet voor alle treinen daarvoor.

zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica. Gebruik hierbij als woordenboek:

T	het domein van de treinen
S	het domein van de stations
o	het station 'Onze Lieve Vrouwe ter Nood'
$B(x, y)$	trein x rijdt gelijk of eerder dan trein y
$H(x, y)$	trein x stopt bij station y

De opgave wordt heel inzichtelijk als we twee hulpsymbolen introduceren (uiteraard krijg je ook de volle punten als je de hulpsymbolen correct uitgeschreven hebt in de zin):
De trein t is de laatste trein:

$$L(t) := \forall x \in T B(x, t)$$

De trein t stopt op alle stations:

$$A(t) := \forall s \in S H(t, s)$$

Nu kunnen we de zin vertalen als: "er is een laatste trein die op alle stations stopt, en het is niet zo dat alle treinen op alle stations stoppen."

$$\exists t \in T\,(L(t) \land A(t)) \land \neg\forall t \in T A(t)$$

Het is ook goedgekeurd als je het laatste deel gelezen hebt: "en alle treinen die niet de laatste zijn stoppen niet op alle stations."

$$\exists t \in T\,(L(t) \land A(t)) \land \forall t \in T\,(\neg L(t) \to A(t))$$

Hoewel een model waarin geen enkele trein de laatste is (omdat er altijd wel een latere trein is) hier ook aan zou voldoen, krijg je voor deze zin ook alle punten:

$$\forall t \in T\,(L(t) \leftrightarrow A(t))$$

5. Benader de betekenis van de zin:

   Er is precies één trein die op station 'Onze Lieve Vrouwe ter Nood' stopt.

   zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica met gelijkheid. Gebruik hierbij opnieuw het woordenboek uit de vorige opgave.

$$\exists x \in T\,\forall y \in T\,[x = y \leftrightarrow H(y, o)]$$
$$(\exists x \in T\ (\forall y \in T\ ((x = y) \leftrightarrow H(y, o))))$$
$$\exists x \in T\ [H(x, o) \land \forall y \in T\ [H(y, o) \to y = x]]$$
$$(\exists x \in T\ (H(x, o) \land (\forall y \in T\,(H(y, o) \to (y = x)))))$$

6. Schrijf de volgende formule

$$(\forall x, y \in D\ \exists z \in D\ (R(x, z) \land R(y, z))) \land \neg(\exists x \in D\ \forall y \in D\ R(x, y))$$

   volgens de officiële grammatica uit de syllabus, en geef zowel een interpretatie in een model waaronder deze formule waar is, als een interpretatie in een model waaronder hij niet waar is. Verklaar je antwoorden.

$$((\forall x \in D\,(\forall y \in D\,(\exists z \in D\,(R(x,z) \wedge R(y,z))))) \wedge \neg(\exists x \in D\,(\forall y \in D\; R(x,y))))$$

In het model $M_1 := (\mathbb{N}, <)$ onder interpretatie I_1:

$$\begin{array}{rcl} D & \rightsquigarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \rightsquigarrow & x < y \end{array}$$

is de formule waar, want bij x en y is $x+y+1$ altijd groter, maar er is geen x waarvoor alle y groter zijn, want x is nooit groter dan zichzelf.

In het model $M_2 := (\mathbb{N}, =)$ onder interpretatie I_2:

$$\begin{array}{rcl} D & \rightsquigarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \rightsquigarrow & x < y \end{array}$$

is de formule niet waar, want als in de linkerkant van de conjunctie x en y verschillend zijn, is er geen z die gelijk is aan allebei.

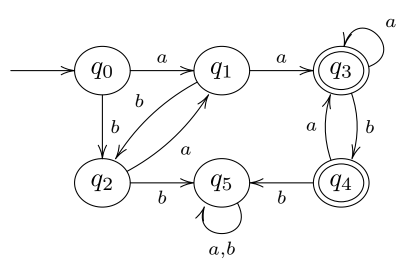
7. Bestaat er een taal L met $aa \in LLL$, maar met $aaa \notin LLL$? Verklaar je antwoord.

   Ja, iedere taal waarvoor $aa \in L$, $\lambda \in L$ maar $a \notin L$ en $aaa \notin L$ voldoet hieraan. (Een taal die aan één van bovenstaande voorwaarden niet voldoet is onjuist.)

8. Geef een eindige automaat die de taal

   $$L_8 := \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ bevat } aa \text{ maar } w \text{ bevat geen } bb\}$$

   herkent.



   Deze automaat hangt nauw samen met de grammatica van de volgende opgave: S hoort bij q_0, A bij q_1, B bij q_2, C bij q_3, D bij q_4 en q_5 is toegevoegd als noodzakelijke put.

9. Gegeven de contextvrije grammatica G_9:

   $$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid bB \\ A & \rightarrow & aC \mid bB \\ B & \rightarrow & aA \\ C & \rightarrow & aC \mid bD \mid \lambda \\ D & \rightarrow & aC \mid \lambda \end{array}$$

   Iemand wil aantonen dat woorden in de taal $\mathcal{L}(G_9)$ nooit als deelwoord bb bevatten. Hij claimt dat de eigenschap

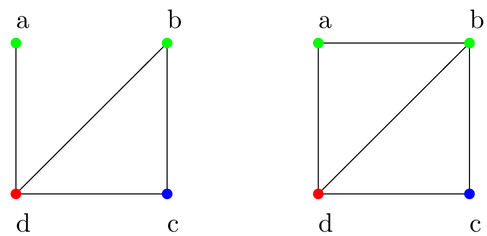
   $$P(w) := w \text{ bevat geen } bb, \text{ geen } bS, \text{ geen } bA, \text{ en geen } bC$$

   hier een goede invariant voor is. Klopt dit? Verklaar je antwoord. (Als dit niet klopt, dan hoef je *niet* een invariant te geven die hier wél geschikt voor is.)

   Dit is geen goede invariant. Zo geldt $P(bDb)$ wel, maar $P(bb)$ niet terwijl er wel een éénstapsproductie $bDb \rightarrow bb$ is.

10. Geef een samenhangende graaf met vier punten, die geen boom is, geen Euler-cykel bevat, maar wel een Euler-pad bevat. Wat is het kleurgetal van deze graaf? Verklaar je antwoorden.

Er zijn op isomorfie na twee oplossingen:



Voor beide oplossingen geldt:

- De graaf is samenhangend.
- De graaf bevat een cykel, dus het is geen boom.
- De graaf bevat twee punten met oneven graad, dus de graaf bevat geen Eulercykel, maar wel een Eulerpad.
- Het kleurgetal is 3. De kleuring geeft al aan dat het met drie kleuren kan en doordat K_3 een deelgraaf is, kan het niet met minder dan drie kleuren.

11. Bewijs met inductie dat $(2n)!$ deelbaar is door 2^n voor alle $n \geq 1$.

Stelling. $(2n)!$ is deelbaar door 2^n voor alle $n \geq 1$.

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar n. Het predikaat dat we met inductie gaan bewijzen is 1 2

$$P(n) \quad := \quad (2n)! \text{ is deelbaar door } 2^n$$

waarbij dit predikaat gedefinieerd is voor iedere $n \geq 1$. (Merk op dat '... voor iedere $n \geq 1$' *niet* bij de definitie van $P(n)$ hoort.) Er zijn nu twee stappen:

Basisstap. Omdat we het predikaat willen bewijzen vanaf $n = 1$, moeten we laten zien dat $P(1)$ geldt, ofwel dat $(2 \cdot 1)!$ deelbaar is door 2^1. En dit is zo, want $(2 \cdot 1)! = 2! = 2$, $2^1 = 2$ en 2 is deelbaar door 2, want $2/2 = 1$ is een geheel getal. 3 4

Inductiestap. Nu moeten we voor willekeurige $n \geq 1$ laten zien dat als we $P(n)$ aannemen, we kunnen bewijzen dat $P(n+1)$ ook geldt. Dus neem aan dat we weten dat $P(n)$ geldt, ofwel dat $(2n)!$ deelbaar is door 2^n (de **inductiehypothese** IH), ofwel: 5 6

$$\tfrac{(2n)!}{2^n} \text{ is een geheel getal.}$$

We moeten nu laten zien dat $P(n+1)$ geldt, ofwel dat $\dfrac{(2(n+1))!}{2^{n+1}}$ óók een geheel getal is. We gebruiken dat 7 8

$$(2(n+1))! = (2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! = 2(n+1)(2n+1)(2n)!$$

Daaruit volgt dat

$$\frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}} = \frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{2 \cdot 2^n} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{2}\frac{(2n)!}{2^n} = (n+1)(2n+1)\frac{(2n)!}{2^n}$$

Hier staat het product van gehele getallen (daarvoor gebruiken we dus IH), en daarom is de hele expressie ook een geheel getal. Hiermee hebben we ook de inductiestap bewezen.

Met inductie naar n volgt dus dat $P(n)$ geldt voor iedere $n \geq 1$, wat de te bewijzen stelling was. $\boxed{9}$

12. Schrijf $(x + y)^7$ volgens het binomium van Newton, geef een deel van de driehoek van Pascal, en geef daarin aan waar de coëfficiënten van deze veelterm in de driehoek van Pascal voorkomen.

    Het binomium zegt:

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^7 \\
&= \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} x^{7-k} y^k \\
&= \binom{7}{0} x^7 + \binom{7}{1} x^6 y + \binom{7}{2} x^5 y^2 + \binom{7}{3} x^4 y^3 + \binom{7}{4} x^3 y^4 + \binom{7}{5} x^2 y^5 + \binom{7}{6} x y^6 + \binom{7}{7} y^7 \\
&= x^7 + 7x^6 y + 21x^5 y^2 + 35x^4 y^3 + 35x^3 y^4 + 21x^2 y^5 + 7xy^6 + y^7
\end{aligned}
$$

    Deze coëfficiënten zijn te vinden op de laatste regel van het hier getoonde deel van de driehoek van Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

13. Geef een formule van de modale logica, die onder iedere interpretatie in de epistemische logica waar is, terwijl hij in de doxastische logica niet altijd waar hoeft te zijn. Verklaar je antwoord.

    Neem de formule $\Box f \to f$. In epistemische logica betekent dit: als ik weet dat f geldt, dan geldt f. En dat klopt. In doxastische logica betekent dit: als ik geloof dat f geldt, dan geldt f. En dat klopt niet, want mensen kunnen zich vergissen.

14. Bestaat er een Kripke model waarin de volgende formule van de modale logica

$$(\Box a) \vee (\Diamond \neg a)$$

    niet waar is? Zo ja, geef zo'n model. Zo nee, verklaar waarom zo'n model niet bestaat.

    Nee, zo'n model bestaat niet. Je kunt dit op twee manieren verklaren

    (a) de zin $(\Box a) \vee (\Diamond \neg a)$ is tautologisch waar:

$$(\Box a) \vee (\Diamond \neg a) = (\Box a) \vee (\neg \Diamond \neg\neg a) = (\Box a) \vee \neg(\Box a) = \top$$

    Een Kripke model waarin een tautologisch ware uitspraak niet geldt in tenminste één toestand, bestaat niet.

    (b) Voor elke toestand x geldt: ofwel alle uitgaande pijlen gaan naar een toestand waarin a geldt, of er is een uitgaande pijl waarin $\neg a$ geldt. In het eerste geval geldt $(\Box a)$ voor x, in het tweede geldt $(\Diamond \neg a)$. In beide gevallen geldt $(\Box a) \vee (\Diamond \neg a)$ voor x. Aangezien de formule voor alle toestanden geldt, is de uitspraak waar in ieder Kripke model.

15. Benader de betekenis van de zin:

Na sneeuw komt dooi.

zo goed mogelijk door een LTL-formule. Gebruik hierbij als woordenboek:

s	het sneeuwt
d	het dooit

Definieer vervolgens een LTL-model waarin deze zin niet waar is.

Er zijn verschillende verdedigbare vertalingen denkbaar:

$$\begin{gathered}\mathcal{G}(s \to \mathcal{X}\mathcal{F}d)\\ \mathcal{G}(s \to \mathcal{X}d)\\ \mathcal{G}(s \to \mathcal{F}d)\\ \mathcal{G}(s \to s\,\mathcal{U}\,d)\end{gathered}$$

Er moet een $\mathcal{G}$ aan de buitenkant staan, en

$$\mathcal{G}(s\,\mathcal{U}\,d)$$

is te simpel: dan kan het niet voorkomen dat het noch sneeuwt, noch dooit.

Een LTL-model waarin deze vertalingen niet waar zijn is er één waarin het in elke wereld sneeuwt, en in geen enkele dooit. Formeel is dit het model $\langle W, R, V\rangle$ met:

$$\begin{aligned} W &= \{x_i \mid i \geq 0\}\\ R(x_i) &= \{x_j \mid j \geq i\}\\ V(x_i) &= \{s\}\end{aligned}$$