Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Toets 1: Propositielogica
(19/09/12)

In de eerste twee opgaven gebruiken we de volgende interpretatie voor de atomaire proposities:

D	Griekenland krijgt een derde steunpakket
E	Griekenland blijft in de euro
F	Griekenland gaat failliet
J	Mark Rutte is een jokkebrok

1. Geef formules van de propositielogica die de volgende zinnen in betekenis zo goed mogelijk benaderen:

   (a) *Griekenland krijgt een derde steunpakket, want anders gaat Griekenland failliet en gaat dan uit de euro.*

   $$(D \wedge (\neg D \to (F \wedge \neg E)))$$

   (b) *Griekenland krijgt geen derde steunpakket mits Mark Rutte geen jokkebrok is.*

   $$(\neg J \to \neg D)$$

   (10 + 10 punten)

2. Geef een Nederlandse zin die de betekenis van de volgende formule zo goed mogelijk benadert:

   $$(D \leftrightarrow \neg F \wedge E) \vee D \wedge J$$

   (10 punten)

   Griekenland krijgt een derde steunpakket precies dan als Griekenland niet failliet gaat en Griekenland in de euro blijft, of Griekenland krijgt een derde steunpakket en Mark Rutte is een jokkebrok, of allebei.

3. Schrijf de formule

   $$a \to \neg b \to a \to b$$

   met haakjes volgens de officiële grammatica uit de syllabus en geef de waarheidstabel. (20 punten)

   $$(a \to (\neg b \to (a \to b)))$$

a	b	$(a \to b)$	$\neg b$	$(\neg b \to (a \to b))$	$(a \to (\neg b \to (a \to b)))$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1

4. Geldt voor formules f en g met de eigenschap $f \models g$ en $g \models f$ altijd dat $\models f \leftrightarrow g$? Verklaar je antwoord. (20 punten)

   Ja, dat geldt. De stelling kan op twee manieren bewezen worden.

   Optie 1: Stel dat dat niet zo is, dan is er een model waarin $f \leftrightarrow g$ niet waar is. Dus is (volgens de waarheidstabel van $\leftrightarrow$) in dat model f waar en g niet waar, of omgekeerd. In het eerste geval zou $f \models g$ niet gelden, en in het tweede geval zou $g \models f$ niet gelden. Dus de veronderstelling is niet mogelijk, en er geldt dus $\models f \leftrightarrow g$.

   Optie 2: Stel $f \models g$ en $g \models f$. Uit $f \models g$ volgt dat in een model waarin f waar is, g dat ook is. Uit $g \models f$ volgt dat in een model waarin g waar is, f dat ook is. Hieruit volgt dat f en g logisch equivalent zijn, dus $f \equiv g$. Uit $f \equiv g$ volgt dat in een model waarin f onwaar is, g dat ook is en vice versa. Hieruit volgt (volgens de waarheidstabel van $\leftrightarrow$) dat $\models f \leftrightarrow g$.

5. Leg uit waarom er bij elke formule van de propositielogica een logische equivalente formule bestaat waar alleen de voegtekens $\neg$ en $\wedge$ in voorkomen. Bestaat er ook bij elke formule van de propositielogica een logische equivalente formule waar alleen maar het voegteken $\wedge$ in voorkomt? Verklaar je antwoorden. (20 punten)

   Het eerste is het geval vanwege de logische equivalenties:

$$\begin{aligned}(f \leftrightarrow g) &\equiv ((f \to g) \wedge (g \to f))\\ (f \to g) &\equiv (\neg f \vee g)\\ (f \vee g) &\equiv \neg(\neg f \wedge \neg g)\end{aligned}$$

   waarmee deze drie voegtekens kunnen worden weg gewerkt en alleen de $\neg$ en $\wedge$ over blijven.

   Het tweede is niet het geval. In een model waarin alle atomaire formules waar zijn (dus $v(a) = 1$ voor alle atomen a) geldt dat alle formules waarin het enige voegteken $\wedge$ is ook waar zullen zijn. Daarom kun je geen formule maken die logisch equivalent is aan $\neg a$, want die formule is in dat model niet waar.