Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Toets 2: Predikaatlogica
(03/10/12)

In de eerste vier opgaven gebruiken we de volgende interpretatie:

W	domein van de levende wezens
K	domein van de klokken
g	Gargantua
$G(x)$	x is groot
$U(x)$	x gaat uit
$L(x,y)$	x luidt y

Een *reus* is een groot levend wezen, klokken zeggen *bim bam* precies dan als ze worden geluid, en alleen levende wezens luiden klokken.

1. Vertaal de volgende Nederlandse zin zo precies mogelijk in de taal van de predikaatlogica: (20 punten)

   Grote klokken zeggen bim bam.

   Schrijf je vertaling ook volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

$$(\forall x \in K\,(G(x) \to (\exists y \in W\,L(y,x))))$$

2. Vertaal de volgende Nederlandse zin zo precies mogelijk in de taal van de predikaatlogica: (20 punten)

   Als de grote klokken luiden gaan de reuzen uit.

   Schrijf je vertaling ook volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

$$(((\forall x \in K\,(G(x) \to (\exists y \in W\,L(y,x)))) \to (\forall z \in W\,(G(z) \to U(z)))) \wedge ((\exists x \in K\,G(x)) \wedge (\exists z \in W\,G(z))))$$

of:

$$(((\forall x \in K\,(G(x) \to (\exists y \in W\,L(y,x)))) \wedge (\exists x \in K\,G(x))) \to (\forall z \in W\,(G(z) \to U(z))))$$

3. Vertaal de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid zo precies mogelijk in het Nederlands: (20 punten)

$$\forall x \in W\,[G(x) \vee (\neg G(x))] \wedge \exists x \in W\,[G(x) \wedge x = g]$$

   Is de formule logisch waar? Verklaar je antwoord in detail.

Alle levende wezens zijn groot of niet groot, en Gargantua is een reus.

Een formule is logisch waar als hij in elk model onder elke interpretatie waar is. Dat is bij deze formule niet het geval. Neem het model $M_3 := (\mathbb{N}, 0, <)$ en de interpretatie $I_3 :=$

$$\begin{array}{rcl} W & \mapsto & \mathbb{N} \\ g & \mapsto & 0 \\ G(x) & \mapsto & x > 0 \end{array}$$

dan staat er in de tweede helft van de formule dat er een natuurlijk getal bestaat dat groter dan nul is, maar dat ook gelijk aan nul is, en dat is er natuurlijk niet. Dus geldt de formule niet onder deze interpretatie, en is hij dus niet logisch waar.

4. Geef predikaatlogische formules f_1 en f_2 met bovenstaand woordenboek zodat $f_1 \not\models f_2$. Verklaar je antwoord. (15 punten)

Neem

$$\begin{array}{rcl} f_1 & := & G(g) \vee \neg G(g) \\ f_2 & := & G(g) \wedge \neg G(g) \end{array}$$

De formule f_1 is waar in elk model (er geldt, net als in de propositielogica, $\models f \vee \neg f$ voor elke f), en net zo is f_2 onwaar in elk model ($\not\models f \wedge \neg f$ voor elke f). Daarom is f_2 niet waar in elk model waarin f_1 waar is, en geldt dus niet dat f_2 een logisch gevolg is van f_1.

5. Geef een model M_5 en een interpretatie I_5 in M_5, zodat: (15 punten)

$$\begin{array}{rl} (M_5, I_5) \models & ((\exists x \in D\, (\exists y \in D\, R(x, y))) \wedge \\ & ((\forall x \in D\, (\exists y \in D\, R(x, y))) \wedge \\ & ((\forall x \in D\, \neg R(x, x)) \wedge \\ & (\forall x \in D\, (\forall y \in D\, (\forall z \in D\, ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \to R(x, z)))))))) \end{array}$$

Is dit model eindig of oneindig? Verklaar je antwoorden.

Neem $M_5 := (\mathbb{N}, <)$ en $I_5 :=$

$$\begin{array}{rcl} D & \mapsto & \mathbb{N} \\ R(x, y) & \mapsto & x < y \end{array}$$

Dan is deze zin waar onder deze interpreatie:

- Neem voor de eerste conjunct 0 en 1, er geldt $0 < 1$.
- Neem voor de tweede conjunct $y := x + 1$, er geldt altijd $x < x + 1$.
- Voor de derde conjunct: de uitspraak $x < x$ is natuurlijk nooit waar (een getal is niet kleiner dan zichzelf).

- Ook de vierde conjunct geldt: als $x < y$ en $y < z$, dan geldt ook altijd dat $x < z$.

Dit model is (noodzakelijk) oneindig, want $\mathbb{N}$ heeft een oneindig aantal elementen.