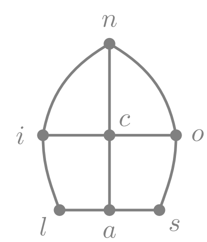
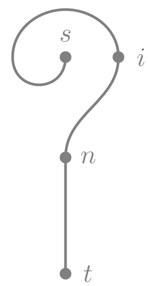
Formeel Denken 2012
Uitwerkingen Toets 4: Discrete wiskunde
(5/12/12)

1. Beantwoord de volgende vragen voor elk van deze twee grafen G_1 en G_2. (35 punten)
Geef telkens een korte verklaring van je antwoord.

G_1:



G_2:



(a) Is de graaf een boom?

Een boom is een samenhangende graaf zonder cykels. G_1 en G_2 zijn beide samenhangend, want van elk punt bestaat er een pad naar elk ander punt. G_1 bevat cykels (bijvoorbeeld $n \to i \to c \to n$) en is dus geen boom. G_2 bevat geen cykels en is dus wel een boom.

(b) Heeft de graaf een Euler-pad?

Een Euler-pad is een pad waarbij alle lijnen precies één keer doorlopen worden. De stelling van Euler zegt dat een samenhangende graaf met twee of meer punten een Euler-pad bevat indien er hoogstens twee punten zijn met oneven graad. G_1 heeft echter vier punten met graad drie (namelijk n, i, a en o en bevat dus geen Eulerpad. G_2 heeft twee punten van oneven graad (s en t) en bevat dus wel een Euler-pad, namelijk $s \to i \to n \to t$.

(c) Heeft de graaf een Hamilton-cykel?

Een Hamilton-cykel is een cykel waarbij alle punten precies één keer doorlopen worden. Het pad $c \to n \to i \to l \to a \to s \to o \to c$ is een Hamilton-cykel in G_1. G_2 is een boom en heeft dus geen cykels. Dus zeker geen Hamilton-cykel.

(d) Is de graaf bipartite?

Een graaf is bipartite als hij kan worden gekleurd met twee kleuren zodat buren nooit dezelfde kleur krijgen. Met andere woorden, als het kleurgetal van een graaf 1 of 2 is. Bij G_1 is eenvoudig in te zien dat het kleurgetal minstens 3 moet zijn: stel dat n rood is; dan moeten i en c blauw zijn, want het zijn buren van n; maar i en c zijn ook buren van elkaar, dus ze mogen niet allebei blauw zijn. Dus zijn er minstens drie kleuren nodig om dit kleine deel van de graaf te kleuren. Dus G_1 is niet bipartite. Graaf G_2 is wel bipartite: kleur s en n rood en i en t blauw.

(e) Wat is het kleurgetal van de graaf?

Het kleurgetal is het minimale aantal kleuren dat nodig is om alle punten een kleur te geven zodat buren nooit dezelfde kleur krijgen. We hebben net al gezien dat G_1 niet met twee kleuren te kleuren is en dat er minstens drie nodig zijn. Dit blijkt ook voldoende. Kleur n, l en s rood, i, a en o blauw en c groen. Dus het kleurgetal van G_1 is 3. Voor G_2 hebben we zojuist al een kleuring met twee kleuren gegeven. En het is duidelijk dat het niet met minder kleuren kan omdat s en i in elk geval een andere kleur moeten hebben, dus het kleurgetal van G_2 is 2.

2. Heeft de graaf G_1 uit de vorige opgave een deelgraaf (d.w.z., een graaf waarvan de punten en lijnen deelverzamelingen zijn van die van G_1) die isomorf is aan G_2? Zo ja, geef zo'n deelgraaf en een isomorfisme. Zo nee, waarom bestaat zo'n deelgraaf niet? (10 punten)

Zo'n deelgraaf bestaat. Neem maar $\langle P, L\rangle$ met

$$P = \{l, i, n, o\} \quad \text{en} \quad L = \{(l, i), (i, n), (n, o)\}$$

Een isomorfisme φ is dan bijvoorbeeld: $\varphi(l) = s$, $\varphi(i) = i$, $\varphi(n) = n$ en $\varphi(o) = t$.

3. Bekijk de recursieve definitie: (25 punten)

$$\begin{array}{rcll} a_0 & = & 0 & \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}(2 + 5a_n - 3a_n^2) & \quad \text{voor } n \geq 0 \end{array}$$

Geef de eerste vijf termen in deze reeks, en leg uit hoe je die hebt berekend. Bewijs vervolgens met inductie dat $a_n \in \{0, 1, 2\}$ voor alle $n \geq 0$.

Eerst bereken we de eerste vijf termen:

$$\begin{array}{lclclcl} a_0 & & & & & = & 0 \\ a_1 & = & \frac{1}{2}(2 + 5a_0 - 3a_0^2) & = & \frac{1}{2}(2 + 0 - 0) & = & 1 \\ a_2 & = & \frac{1}{2}(2 + 5a_1 - 3a_1^2) & = & \frac{1}{2}(2 + 5 - 3) & = & 2 \\ a_3 & = & \frac{1}{2}(2 + 5a_2 - 3a_2^2) & = & \frac{1}{2}(2 + 10 - 12) & = & 0 \\ a_4 & = & \frac{1}{2}(2 + 5a_3 - 3a_3^2) & = & \frac{1}{2}(2 + 0 - 0) & = & 1 \end{array}$$

Nu het bewijs met inductie:

Propositie:

$a_n \in \{0, 1, 2\}$ voor alle $n \geq 0$

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad a_n \in \{0, 1, 2\}$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, ofwel dat $a_0 \in \{0, 1, 2\}$. 3

Dit is zo, want $a_0 = 0$ en $0 \in \{0, 1, 2\}$. 4

Inductiestap. Laat n een willekeurig getal zijn met $n \geq 0$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel 6
$a_n \in \{0, 1, 2\}$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(n + 1)$ ook geldt, ofwel 7
$a_{n+1} \in \{0, 1, 2\}$

Dit is zo, want we kunnen een gevalsonderscheiding maken naar de drie verschillende mogelijke waarden van a_n: 8

- $a_n = 0$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + 5a_n - 3a_n^2) = \frac{1}{2}(2 + 0 - 0) = 1 \in \{0, 1, 2\}$$

- $a_n = 1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + 5a_n - 3a_n^2) = \frac{1}{2}(2 + 5 - 3) = 2 \in \{0, 1, 2\}$$

- $a_n = 2$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + 5a_n - 3a_n^2) = \frac{1}{2}(2 + 10 - 12) = 0 \in \{0, 1, 2\}$$

Dus in alle gevallen geldt $P(n + 1)$ als we $P(n)$ aannemen.

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 0$. 9

4. Op hoeveel manieren kan Zwarte Piet drie cadeautjes en één roe halen uit een zak met zes cadeautjes, drie roes en één jongen die lachte om Sinterklaas? (Je mag aannemen dat alle tien items verschillend zijn.) Geef aan waar in de driehoek van Pascal de binomiaalcoëfficiënten staan die corresponderen met het antwoord op deze vraag. Verklaar je antwoorden. (20 punten)

Alle items zijn verschillend, dus het maakt uit welk cadeautje gepakt wordt. En de volgorde van de items is niet van belang. Dus we kunnen 'grijpgetallen' gebruiken.

- Neem eerst drie van de zes cadeautjes uit de zak. Dat kan op $\binom{6}{3}$ manieren.
- Neem dan één van de drie roes uit de zak. Dat kan op $\binom{3}{1}$ manieren.
- En neem tenslotte nul van de één jongen die lachte om Sinterklaas uit de zak. Dat kan op 1 manier. (Omdat je hier niets pakt, hoef je deze stap eigenlijk niet uit te voeren.)

Het totaal aantal manieren krijg je dan door te vermenigvuldigen:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{0} = 20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$$

De drie grijpgetallen vind je hier in de driehoek van Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \boxed{1} & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & \boxed{20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$