# Formeel Denken 2012
# Uitwerkingen Inhaaltoets
**(09/01/13)**

1. Geldt dat $\exists x \in D\,[P(x) \rightarrow \forall y \in D\,[P(y)]]$ logisch waar is? Verklaar je antwoord. Schrijf deze formule ook volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (20 punten)

   Nee, dit geldt niet. De betekenis van 'logisch waar' is dat de formule waar is in ieder model en onder iedere interpretatie, en deze formule is niet waar in een model waarin $D$ wordt geïnterpreteerd als de lege verzameling.

   De schrijfwijze volgens de officiële grammatica uit de syllabus is:

   $$(\exists x \in D\,(P(x) \rightarrow (\forall y \in D\,P(y))))$$

   (Voor deze opgave is het niet van belang, maar in elk domein dat niet leeg is, is de formule wel waar ongeacht de interpretatie!)

2. Geef het aantal Euler- en Hamilton-cykels in de $K_n$ voor $n \leq 4$. Verklaar je antwoorden. (20 punten)

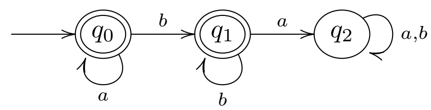
| $n$ | aantal Euler-cykels | aantal Hamilton-cykels |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 6 | 6 |
| 4 | 0 | 24 |

   $K_1$ en $K_2$ bevatten helemaal geen cykels, dus zeker geen Euler- of Hamilton-cykels. De $K_3$ bevat 6 cykels, en die zijn duidelijk allemaal zowel Euler- als Hamilton-cykels. De $K_4$ bevat geen Euler-cykels volgens de stelling van Euler (want ieder punt heeft graad 3), en iedere permutatie van de punten correspondeert precies met een Hamilton-cykel, dus daar zijn er $4! = 24$ van.

   En voor wie niet weet wat permutaties zijn volgt hier een lijst met de 24 Hamilton-cykels uit $K_4$:

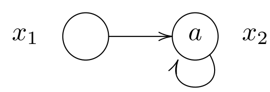
| | | | |
|---|---|---|---|
| $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ | $2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2$ | $3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 3$ | $4 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4$ |
| $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$ | $2 \to 1 \to 4 \to 3 \to 2$ | $3 \to 1 \to 4 \to 2 \to 3$ | $4 \to 1 \to 3 \to 2 \to 4$ |
| $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$ | $2 \to 3 \to 1 \to 4 \to 2$ | $3 \to 2 \to 1 \to 4 \to 3$ | $4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 4$ |
| $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ | $2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2$ | $3 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3$ | $4 \to 2 \to 3 \to 1 \to 4$ |
| $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$ | $2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 2$ | $3 \to 4 \to 1 \to 2 \to 3$ | $4 \to 3 \to 1 \to 2 \to 4$ |
| $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ | $2 \to 4 \to 3 \to 1 \to 2$ | $3 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3$ | $4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4$ |

3. Geef een eindige automaat met een minimaal aantal toestanden die de taal $\overline{\mathcal{L}(a^*bb^*a(a \cup b)^*)}$ herkent. Je hoeft je antwoord niet te verklaren (dus ook niet waarom het aantal toestanden minimaal is.) (20 punten)




Dat een eindige automaat voor deze taal minstens drie toestanden moet hebben kan als volgt worden ingezien. Laten we de taal uit de opgave $L_3$ noemen. Deze taal bevat zowel woorden wel ($\lambda \in L_3$) als woorden niet ($ba \notin L_3$), dus er moet tenminste één accepterende en één niet-accepterende toestand zijn, en het aantal toestanden is dus minstens twee. Stel dat het met twee toestanden zou kunnen, dan zou $q_0$ de enige accepterende toestand zijn (dit moet dan $q_0$ zijn, want $\lambda \in L_3$). Maar daaruit zou volgen dat als $w_1 \in L_3$ en $w_2 \in L_3$, dan ook $w_1 w_2 \in L_3$. Maar dit geldt niet, want $ab \in L_3$ maar $abab \notin L_3$. Hieruit volgt dus dat de automaat tenminste drie toestanden moet hebben.

4. Geef een Kripke-model met een minimaal aantal werelden dat laat zien dat het axiomaschema $\Box f \to f$ niet geldt in alle seriële Kripke-modellen. Verklaar je antwoord. (Dit impliceert dat het axiomaschema $\Box f \to f$ niet algemeen geldig is in de logica $D$.) (15 punten)




Dit model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ is duidelijk een serieel Kripke model, want $R(x_1) = R(x_2) = \{x_2\} \neq \emptyset$, dus vanuit iedere wereld vertrekt een pijl. Voorts hebben we $x_1 \Vdash \Box a$ want $R(x_1) = \{x_2\}$ en $x_2 \Vdash a$. Maar we hebben ook $x_1 \nVdash a$. Samen geeft dit dat $x_1 \nVdash \Box a \to a$, en dus $\mathcal{M} \not\models \Box a \to a$. Maar $\Box a \to a$ is een instantie van het axiomaschema met $f = a$, dus dit axiomaschema geldt niet in dit model.

Het lukt niet om een serieel model $\mathcal{M}'$ te vinden met slechts één wereld dat serieel is en niet reflexief. Want de enige manier om een uitgaande pijl vanuit die ene wereld te maken is een pijl naar zichzelf en dat betekent precies dat het model reflexief is en dus het axiomaschema voor reflexiviteit $\Box f \to f$ automatisch wel waar is.

5. Bewijs de volgende stelling met inductie: als een formule van de propositielogica geschreven volgens de officiële grammatica uit de syllabus precies $n$ atomaire formules bevat, dan bevat deze formule $2n - 2$ haakjes. (Zo bevat $(a \to a)$ twee keer de atomaire formules $a$ en heeft deze formule inderdaad $2 \cdot 2 - 2 = 2$ haakjes.) (15 punten)

Voor het gemak korten we 'een formule van de propositielogica geschreven volgens de officiële grammatica uit de syllabus' af tot 'een formule'.

**Stelling:**

Een formule met $n$ atomen heeft $2n - 2$ haakjes voor alle $n \geq 1$

**Bewijs** met inductie naar $n$. 1

$$P(n) \;:=\; \text{Een formule met } n \text{ atomen heeft } 2n-2 \text{ haakjes}$$ 2

**Basisstap.** We laten zien dat $P(1)$ geldt, ofwel 3

Een formule met 1 atoom heeft $2 \cdot 1 - 2$ haakjes

Dit is zo, want $P(1)$ zegt dus dat een formule met één atoom geen haakjes heeft, en dit is duidelijk het geval, want als er haakjes in een formule zitten moet er een connectief $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ of $\leftrightarrow$ in zitten, en dan moet er aan beide kanten van dat connectief een atomaire formule voorkomen. 4

**Inductiestap.** Laat $n$ een willekeurig getal zijn met $n \geq 1$ 5

Neem aan dat we al weten dat $P(n)$ geldt, ofwel 6
Een formule met $n$ atomen heeft $2n - 2$ haakjes (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(n+1)$ ook geldt, ofwel 7
Een formule met $n+1$ atomen heeft $2(n+1) - 2$ haakjes

Dit is zo, want we kunnen laten zien dat zo'n formule met $n+1$ atomen precies $(2n-2)+2$ haakjes heeft en dat is gelijk aan $2(n+1)-2$. Hiervoor gebruiken we de volgende redenering: 8

- Zij $f$ een formule met $n+1$ atomen.
- Als er geen haakjes in de formule $f$ voorkomen, kan hij als enige connectief $\neg$ bevatten. Maar dan kan er niet meer dan één atoom zijn. Maar $f$ bevat $n+1$ atomen en omdat $n \geq 1$ geldt $n+1 \geq 2$. Dus leidt de aanname dat $f$ geen haakjes bevat tot een tegenspraak en dus moet de formule wel (minimaal twee) haakjes bevatten.
- Omdat $f$ dus minimaal twee haakjes bevat, komen er altijd een openingshaakje en een sluithaakje in $f$ voor waar geen haakjes tussen staan.
- Dit betekent dat $f$ een subformule $g$ bevat van de vorm $(g_1 \wedge g_2)$, $(g_1 \vee g_2)$, $(g_1 \rightarrow g_2)$ of $(g_1 \leftrightarrow g_2)$.
- Omdat $g_1$ en $g_2$ geen haakjes bevatten, bevatten ze allebei precies één atoom.
- Als we daarom $g$ in $f$ door $g_1$ vervangen krijgen we een formule $f'$ met $n$ atomen, die dus volgens de inductiehypothese $2n-2$ haakjes bevat.
- Maar $f$ bevat twee haakjes meer dan $f'$ en dus heeft $f$ dan $(2n-2)+2 = 2n = 2(n+1)-2$ haakjes, en dat is wat we bewijzen moesten.

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$ 9