Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Toets 2: Predikaatlogica
(30/09/13)

In de eerste drie opgaven gebruiken we de volgende interpretatie:

M	domein van de mensen
i	ik
$G(x)$	x is gelukkig
$V(x)$	x is een vrouw
$O(x, y)$	x is een ouder van y

1. Vertaal de volgende Nederlandse zin zo precies mogelijk in de taal van de predikaatlogica: (15 punten)

   Mijn ouders zijn gelukkig.

   Schrijf je vertaling ook volgens de officiële grammatica uit de syllabus.

$$(\forall x \in M\ (O(x, i) \to G(x)))$$

2. Vertaal de volgende Nederlandse zin zo precies mogelijk in de taal van de predikaatlogica met gelijkheid: (15 punten)

   Ik ben mijn vaders enige zoon.

$$(\exists x \in M\ (\neg V(x) \wedge ((O(x, i) \wedge \neg V(i)) \wedge (\forall y \in M\ ((O(x, y) \wedge \neg V(y)) \to (y = i))))))$$

3. Beschrijf de betekenis van de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid zo precies mogelijk in het Nederlands: (15 punten)

$$\forall x, y \in M\ [O(i, x) \wedge O(i, y) \wedge x \neq y \to G(x) \wedge G(y)]$$

   Als ik minstens twee kinderen heb, zijn ze allemaal gelukkig.

   (Gebruik geen variabelen in een Nederlandse zin, dat is geen normaal taalgebruik!)

4. Schrijf de formule uit de vorige opgave volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (15 punten)

$$(\forall x \in M\ (\forall y \in M\ ((O(i, x) \wedge (O(i, y) \wedge \neg(x = y))) \to (G(x) \wedge G(y)))))$$

5. Geef een model M_5 en een interpretatie I_5 in M_5, zodat: (15 punten)

$$(M_5, I_5) \models \exists x, y, z \in D\, [R(x, y) \wedge R(y, z) \wedge \neg R(x, z)]$$

Verklaar je antwoord.

Neem bijvoorbeeld als model:

$$M_5 = (\mathbb{N}, 1, +)$$

en als interpretatie I_5:

$$\begin{array}{rcl} D & \rightsquigarrow & \mathbb{N} \\ R(x, y) & \rightsquigarrow & y = x + 1 \end{array}$$

en kies vervolgens in de existentiële kwantoren:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & 2 \end{array}$$

Er geldt duidelijk $R(0, 1) \wedge R(1, 2) \wedge \neg R(0, 2)$.

6. Geef een formule van de predikaatlogica met gelijkheid f waarvoor geldt dat $\not\models f$ en $\not\models \neg f$. Verklaar je antwoord in detail. (15 punten)

$\models f$ betekent dat f waar is onder alle interpretaties van de symbolen in f. We zoeken een formule f waarvoor $\models f$ en $\models \neg f$ allebei onwaar zijn, ofwel waarvoor zowel geldt dat f niet waar is onder alle interpretaties als dat $\neg f$ niet waar is onder alle interpretaties, ofwel er moet zowel een interpretatie bestaan die f onwaar maakt als een interpretatie die f waar maakt.

Neem bijv.

$$f \quad := \quad c_1 = c_2$$

Of f waar is hangt natuurlijk af van de interpretaties van de namen c_1 en c_2. Specifiek, neem als model:

$$M_6 \quad := \quad (\mathbb{N}, 0, 1)$$

en als interpretaties I_6:

$$\begin{array}{rcl} c_1 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_2 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

en I_6':

$$\begin{array}{rcl} c_1 & \rightsquigarrow & 0 \\ c_2 & \rightsquigarrow & 0 \end{array}$$

Dan

$$\begin{aligned}(M_6, I_6) &\models \neg f\\ (M_6, I_6') &\models f\end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned}(M_6, I_6) &\not\models f\\ (M_6, I_6') &\not\models \neg f\end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}&\not\models f\\ &\not\models \neg f\end{aligned}$$