Formeel Denken 2013
Uitwerkingen Toets 5: Modale logica
(16/12/13)

In de eerste twee opgaven gebruiken we het woordenboek:

B	ik speel buiten
V	het is vrijdag
E	we eten vis

1. (a) Welke van de twee formules van de deontische logica

$$\Diamond\neg B$$
$$\neg\Diamond B$$

benadert de betekenis van de zin '*Ik mag niet buiten spelen*' het best? Verklaar je antwoord. (10 punten)

Met de zin 'Ik mag niet buiten spelen' wordt bedoeld dat het uitgesloten is dat er buiten gespeeld wordt. Dus eigenlijk $\Box\neg B$. Maar die formule is equivalent aan $\neg\Diamond B$. Anders uitgelegd: de formule $\Diamond\neg B$ betekent 'het mag dat ik niet buiten speel' en dat sluit niet uit dat 'het (ook) mag dat ik buiten speel'.

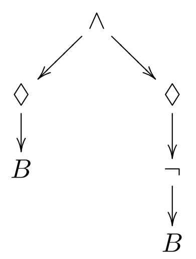
(b) Geef een Nederlandse zin die de betekenis van de formule van de deontische logica

$$\Diamond B \wedge \Diamond\neg B$$

het best weergeeft. (10 punten)

'Ik mag buiten spelen en ik mag niet buiten spelen.'
'Het mag dat ik buiten speel en het mag dat ik niet buiten speel.'
'Ik mag buiten spelen, maar het hoeft niet'

(c) Geef de boomrepresentatie van de formule uit onderdeel (b). (10 punten)



(d) Schrijf de formule uit onderdeel (b) volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (10 punten)

$$(\Diamond B \wedge \Diamond\neg B)$$

2. (a) Welke van de drie formules van de temporele logica

$$V \to (\Box E)$$
$$(\Box V) \to E$$
$$\Box(V \to E)$$

benadert de betekenis van de zin '*Op vrijdag eten we altijd vis*' het best? (10 punten)

De formule $\Box(V \to E)$ past het beste. Die betekent 'Het is altijd zo, dat als het vrijdag is, we vis eten.'. Dat is duidelijk beter dan de vertalingen die bij de andere formules horen zoals hierna wordt uitgelegd.

(b) Geef Nederlandse zinnen die de betekenissen van de twee andere formules uit onderdeel (a) het best weergeven. (10 punten)

De formule $V \to (\Box E)$ betekent 'Als het vrijdag is, eten we altijd vis'. Die 'altijd' slaat terug op alle dagen van de week, niet alleen op die vrijdag.

De formule $(\Box V) \to E$ betekent 'Als het altijd vrijdag is, eten we vis'. Afgezien van het feit dat het nooit 'altijd vrijdag is' komt de betekenis niet in de buurt van de in (a) gegeven zin.

3. Geef een Kripke-model $\mathcal{M}$ zodat

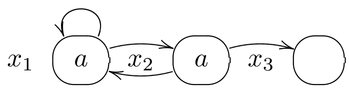
$$\mathcal{M} \not\models \Box\Diamond a \wedge \Diamond\Box a \to \Box\Box a$$

Verklaar je antwoord. (15 punten)

Neem het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ met

$$\begin{aligned} W &= \{x_1, x_2, x_3\} \\ R(x_1) &= \{x_1, x_2\} \\ R(x_2) &= \{x_1, x_3\} \\ R(x_3) &= \emptyset \\ V(x_1) &= \{a\} \\ V(x_2) &= \{a\} \\ V(x_3) &= \emptyset \end{aligned}$$

Of als diagram:



Dit levert de volgende tabel op met de 'waarheden in een wereld'.

$\Vdash$	a	$\Box a$	$\Diamond a$	$\Box\Diamond a$	$\Diamond\Box a$	$\Box\Box a$	$\Box\Diamond a \wedge \Diamond\Box a$	$\Box\Diamond a \wedge \Diamond\Box a \to \Box\Box a$
x_1	1	1	1	1	1	0	1	0
x_2	1	0	1	0	1	1	0	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1

Omdat er met x_1 dus een wereld is waarin de gevraagde formule niet waar is, geldt $\mathcal{M} \not\models \Box\Diamond a \wedge \Diamond\Box a \to \Box\Box a$.

4. Geldt in LTL axiomaschema 5:

$$\Diamond f \to \Box\Diamond f$$

Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een f en een LTL Kripke-model dat laat zien waarom niet. (15 punten)

Dit geldt niet voor alle modellen en formules. In LTL moet de formule worden gelezen als $\mathcal{F}f \to \mathcal{G}\mathcal{F}f$. En dat betekent 'als f ooit waar is dan is f oneindig vaak waar'. Dat is niet zo.

Neem de formule $f = a$ en het model $\mathcal{M} = \langle W, R, V \rangle$ met

$$\begin{aligned} W &= \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ R(x_i) &= \{x_j \mid i \leq j\} \\ V(x_0) &= \{a\} \\ V(x_i) &= \emptyset \text{ als } i \geq 1 \end{aligned}$$

Dan geldt $x_0 \nVdash \mathcal{F}a \to \mathcal{G}\mathcal{F}a$. Want enerzijds geldt $x_0 \Vdash a$, dus $x_0 \Vdash \mathcal{F}a$. Maar anderzijds geldt $x_1 \nVdash \mathcal{F}a$, dus $x_0 \nVdash \mathcal{G}\mathcal{F}a$. Maar als $x_0 \nVdash \mathcal{F}a \to \mathcal{G}\mathcal{F}a$, geldt automatisch $\mathcal{M} \not\models \mathcal{F}a \to \mathcal{G}\mathcal{F}a$.