Formeel Denken 2014
Uitwerkingen Tentamen
(29/01/15)

1. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de propositielogica: (6 punten)

    Als het regent word ik nat, en het regent, maar ik word toch niet nat!

    Gebruik hierbij het woordenboek:

R	het regent
N	ik word nat

    $$(R \to N) \land R \land \neg N$$

2. Deze opgave gaat over de formule

    $$a \to \neg b \leftrightarrow \neg b \to a$$

    (a) Schrijf deze formule met haakjes volgens de officiële grammatica uit de syllabus. (3 punten)

    De formule volgens de officiële syntax is:

    $$((a \to \neg b) \leftrightarrow (\neg b \to a))$$

    (b) Geef de waarheidstabel van deze formule. (3 punten)

    De waarheidstabel is:

a	b	$\neg b$	$a \to \neg b$	$\neg b \to a$	$(a \to \neg b) \leftrightarrow (\neg b \to a)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0

3. Deze opgave gaat over de uitspraak (6 punten)

    $$f \to \neg g \equiv g \to \neg f$$

    waarbij f en g formules van de propositielogica zijn.

    (a) Leg uit wat deze uitspraak betekent. (3 punten)

    Deze uitspraak betekent dat de formules $f \to \neg g$ en $g \to \neg f$ logisch equivalent zijn. Anders gezegd: hun valuatie is in elk model hetzelfde. Nog anders gezegd: ze hebben precies dezelfde waarheidstabel. (Nou ja, de kolommen met de hele formules zijn gelijk.)

(b) Geldt deze uitspraak voor $f = a$ en $g = b$? (3 punten)

Deze uitspraak geldt. We weten dat voor willekeurige formules h en i geldt dat $h \to i \equiv \neg h \vee i$ en $h \vee i \equiv i \vee h$. Met deze equivalenties kunnen we de volgende serie van equivalente formules opschrijven:

$$f \to \neg g \;\equiv\; \neg f \vee \neg g \;\equiv\; \neg g \vee \neg f \;\equiv\; g \to \neg f$$

Dit geldt voor alle formules f en g, dus in het bijzonder ook als $f = a$ en $g = b$.

4. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica: (6 punten)

Als een man van vrouwen houdt, dan is er een vrouw die van die man houdt.

Gebruik hierbij het woordenboek:

M	het domein van de mannen
V	het domein van de vrouwen
$H(x, y)$	x houdt van y

Interpreteer deze zin als een uitspraak over alle mannen.

$$(\forall m \in M\ ((\exists v \in V\ H(m, v)) \to (\exists v \in V\ H(v, m))))$$

5. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de predikaatlogica met gelijkheid: (6 punten)

Er bestaat precies één vrouw waar alle mannen van houden.

Gebruik hierbij het woordenboek uit de vorige opgave.

We gebruiken het volgende hulppredikaat als afkorting voor 'alle mannen houden van v':

$$AMH(v) \;:=\; \forall m \in M\ H(m, v)$$

De zin wordt nu vertaald naar de formule:

$$(\exists v \in V\ \ (AMH\,(v) \wedge (\forall u \in V\ \ (AMH\,(u) \to (u = v)))))$$

of equivalent

$$(\exists v \in V\ \ (\forall u \in V\ \ (AMH\,(u) \leftrightarrow (u = v))))$$

En zonder die afkortingen krijgen we de formules

$$(\exists v \in V\ \ ((\forall m \in M\ H\,(m, v)) \wedge (\forall u \in V\ \ ((\forall m \in M\ H\,(m, u)) \to (u = v)))))$$

$$(\exists v \in V\ \ (\forall u \in V\ \ ((\forall m \in M\ H\,(m, u)) \leftrightarrow (u = v))))$$

6. Geef een interpretatie I_6 in een model M_6 waaronder de volgende formule van de predikaatlogica met gelijkheid waar is: (6 punten)

$$\forall x \in D\, \exists y \in D\, (x \neq y \wedge \forall z \in D\, (R(x,z) \leftrightarrow z = y))$$

Verklaar je antwoord.

Deze formule betekent 'voor alle x in D is er precies één y in D met $R(x,y)$ en die y is ongelijk aan x. Dus neem bijvoorbeeld $M_6 := (\mathbb{N}, 1, +)$ met als interpretatie I_6;

$$\begin{array}{rcl} D & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ R(x,y) & \longrightarrow & y = x + 1 \end{array}$$

Het is duidelijk dat in de verzameling der natuurlijke getallen geldt dat er voor elk element precies één element is dat eentje groter is, en dat die niet gelijk is aan het element zelf.

7. Geef een taal L_7 met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ waarvoor geldt dat (6 punten)

$$L_7{}^* \cap \overline{L_7}^* \neq \{\lambda\}$$

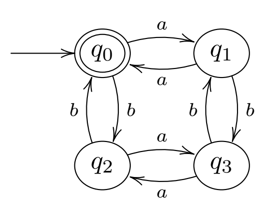
Verklaar je antwoord.

Neem bijvoorbeeld $L_7 = \{a\}$. Dan geldt $a \in L_7$ en dus ook $aaaa \in L_7^*$. Verder weten we dat $aa \notin L_7$, dus $aa \in \overline{L_7}$. Maar dan geldt $aaaa \in \overline{L_7}^*$. Dus $aaaa \in L_7 \cap \overline{L_7}^*$ terwijl $aaaa \neq \lambda$.

8. Geef een eindige automaat met een minimaal aantal toestanden die de taal (6 punten)

$$L_8 := \mathcal{L}((aa \cup bb \cup (ab \cup ba)(aa \cup bb)^*(ab \cup ba))^*)$$

herkent.



Toestand q_0 representeert de situaties waarin er een even aantal a's en een even aantal b's is gelezen. Toestand q_1 de situaties waarin er een oneven aantal a's en een even aantal b's is gelezen. Toestand q_2 de situaties waarin er een even aantal a's en een oneven aantal b's is gelezen. Toestand q_3 de situaties waarin er een oneven aantal a's en een oneven aantal b's is gelezen. Omdat er in deze vier toestanden andere acties moeten worden ondernomen, kan het niet met minder toestanden.

9. De volgende opgave gaat over de contextvrije grammatica G_9:

$$S \to AS \mid \lambda$$
$$A \to ab$$

(a) Is G_9 rechtslineair? Verklaar je antwoord. (1 punt)

Nee, want in de regel $S \to AS$ staat het hulpsymbool A niet helemaal rechts.

(b) Is $\mathcal{L}(G_9)$ regulier? Verklaar je antwoord. (1 punt)

Ja, wat de taal $\mathcal{L}(G_9) = \mathcal{L}((ab)^*)$ en die laatste is per definitie regulier.

(c) Geef een invariant die laat zien dat (4 punten)

$$ba \notin \mathcal{L}(G_9)$$

Verklaar je antwoord.

Neem

$$P(w) \;:=\; \text{er staat een } a \text{ of } A \text{ voor de eerste } b$$

Het is duidelijk dat $P(S)$ geldt, want in S staat geen (eerste) b en dus hoeft er verder ook niets gecontroleerd te worden.

Neem nu aan dat v een woord is met $P(v)$ en zodanig dat $v \to v'$. Dan wordt er in v een S vervangen door AS of λ of een A vervangen door ab.

- Als er een S vervangen wordt, verdwijnen er geen A's of a's en komen er geen b's bij. Dus een A of a die in v al voor de eerste b stond, blijft voor die eerste b in v' staan. Dus $P(v')$ geldt in deze situatie.
- Als er een A vervangen wordt die voor de eerste b in v stond, komt er weliswaar een 'nieuwe' eerste b in v' te staan, maar direct voor die b staat een a. Dus $P(v')$ geldt ook in deze situatie.
- Als er een A vervangen wordt die na de eerste b in v stond, betekent dat dat er voor die eerste b niets verandert in v' en dus staat de A of a die in v voor die eerste b stond ook in v' nog voor die eerste b. Dus $P(v')$ geldt ook in deze situatie.

Dus $P(v')$ geldt altijd als $P(v)$ geldt en $v \to v'$. Dus P is een invariant van G_9.

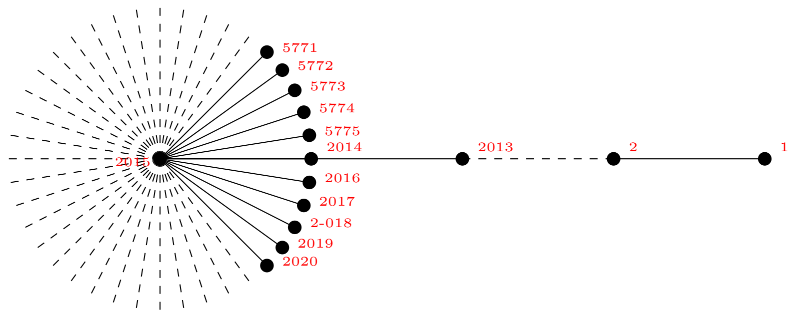
En omdat $P(ba)$ niet geldt, is meteen duidelijk dat $ba \notin \mathcal{L}(G_9)$.

10. Geef een boom met 5775 punten waarin het langste pad lengte 2015 heeft. Schrijf je antwoord als paar $\langle P_{10}, L_{10} \rangle$. (6 punten)

Neem $\langle P_{10}, L_{10} \rangle$ met

$$P_{10} \;:=\; \{1, 2, 3, \ldots, 5775\}$$
$$L_{10} \;:=\; \{(i, i+1) \mid 1 \leq i \leq 2014\} \cup \{(2015, i) \mid 2016 \leq i \leq 5775\}$$

Dit levert een soort ster met staart op: punt 2015 als centrum van de ster, de punten 2016 tot en met 5775 daar omheen en een staart van punt 2015 naar punt 1.



- Voor elke i met $2016 \leq i \leq 5775$ is er precies één pad van punt i naar punt 2015 en wel van lengte 1, namelijk $i \to 2015$.
- Voor elke i met $2016 \leq i \leq 5775$ en elke j met $2016 \leq j \leq 5775$ met $i \neq j$ is er precies één pad van punt i naar punt j en wel van lengte 2, namelijk $i \to 2015 \to j$.
- Voor elke i met $2016 \leq i \leq 5775$ en elke j met $1 \leq j \leq 2014$ is er precies één pad van punt i naar punt j en wel van lengte $2015 - j + 1$, namelijk $i \to 2015 \to 2014 \to \cdots \to j$.
- Dus de graaf is samenhangend en de langste paden hebben lengte 2015.
- Voor elke i met $2016 \leq i \leq 5775$ geldt dat de graad van punt i 1 is, waaruit volgt dat punt i niet in een cykel zit.
- De graad van punt 1 is 1, dus punt 1 zit ook niet in een cykel.
- Voor elke i met $2 \leq i \leq 2014$ geldt dat de graad van i 2 is. Maar als punt 2 in een cykel zit, dan moet dan wel via de lijn $(2, 1)$ en dus moet punt 1 ook in een cykel zitten. Dat is echter niet zo dus punt 2 zit ook niet in een cykel. Algemener: als punt i in een cykel zit, dan moet dan wel via de lijn $(i, i-1)$ en dus moet punt $i - 1$ ook in een cykel zitten. Dat is echter niet zo dus punt i zit ook niet in een cykel.
- De graad van punt 2015 is 3761. Maar voor alle buren van 2015 weten we al dat ze niet in een cykel zitten. Dus zit punt 2015 ook niet in een cykel.
- Dus zit geen enkel punt in een cykel en bevat de graaf dus geen cykels.
- Dus de graaf is inderdaad een boom.

11. De volgende opgave gaat over de recursievergelijkingen:

$$f(m, 0) = 0$$
$$f(m, n+1) = f(m, n) + m$$

(a) Laat zien hoe je $f(3,3)$ berekent met behulp van deze recursievergelijkingen. (2 punten)

$$\begin{aligned} f(3,3) &= f(3,2+1) \\ &= f(3,2)+3 \\ &= f(3,1+1)+3 \\ &= f(3,1)+3+3 \\ &= f(3,0+1)+3+3 \\ &= f(3,0)+3+3+3 \\ &= 0+3+3+3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

(b) Bewijs met inductie naar n dat (4 punten)

$$f(m,n) = m \cdot n$$

voor alle $m, n \geq 0$.

Als we de stelling voor willekeurige m kunnen bewijzen zonder extra aannames te maken over m, mogen we daaruit generaliseren dat de stelling voor alle $m \in \mathbb{N}$ waar is. Dus neem aan dat $m \in \mathbb{N}$.

Propositie:

$f(m,n) = m \cdot n$ voor alle $n \geq 0$.

Bewijs met inductie naar n. 1

$$P(n) \quad := \quad f(m,n) = m \cdot n$$ 2

Basisstap. We laten zien dat $P(0)$ geldt, oftewel 3

$f(m,0) = m \cdot 0$

Dit is zo, want 4

$$f(m,0) = 0 = m \cdot 0$$

Inductiestap. Laat k een willekeurig getal zijn met $k \geq 0$. 5

Neem aan dat we al weten dat $P(k)$ geldt, oftewel 6

$f(m,k) = m \cdot k$ (inductiehypothese IH)

We laten zien dat $P(k+1)$ ook geldt, oftewel 7

$f(m,k+1) = m \cdot (k+1)$

Dit is zo, want 8

$$\begin{aligned} f(m,k+1) &= f(m,k)+m \\ &\overset{\text{IH}}{=} m \cdot k + m \\ &= m \cdot (k+1) \end{aligned}$$

Dus volgt met inductie dat $P(n)$ geldt voor alle $n \geq 1$. 9

12. Jan, Piet en Klaas willen zes verschillende objecten onder elkaar verdelen, waarbij ieder twee objecten moet krijgen. Op hoeveel manieren kunnen ze dit doen? Leg uit hoe je dit hebt uitgerekend, en geef aan welke binomiaalcoëfficiënten je hiervoor hebt gebruikt. (6 punten)

Uit de opgave volgt dat het niet uitmaakt in welke volgorde de personen de objecten krijgen, maar alleen welke.

- Jan krijgt dus twee van de zes objecten. Dat kan op $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ manieren.
- Piet krijgt dus twee van de vier overige objecten. Dat kan op $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ manieren.
- Klaas krijgt de overige twee objecten. Dat kan slechts op 1 manier.

Volgens de productregel kan dit dus op $15 \cdot 6 \cdot 1 = 90$ manieren.

13. Benader de betekenis van de volgende Nederlandse zin zo goed mogelijk door een formule van de epistemische logica: (6 punten)

> *Ik weet dat ik als het regent niet nat word, want als ik weet dat het regent neem ik een paraplu mee, en als ik een paraplu meeneem weet ik dat ik niet nat word.*

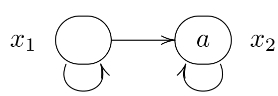
Gebruik hierbij het woordenboek:

R	het regent
N	ik word nat
P	ik neem een paraplu mee

$$\Box(R \to \neg N) \wedge (\Box R \to P) \wedge (P \to \Box\neg N)$$

14. Geef een serieel Kripke-model waarin de formule $(\Box a \to \Box b) \to \Box(a \to b)$ niet waar is. Verklaar je antwoord. (6 punten)

Een serieel Kripke-model is een model waarbij elke wereld minimaal één uitgaande pijl heeft. Als $(\Box a \to \Box b) \to \Box(a \to b)$ niet waar is, moet er een wereld in het model zijn waarvoor geldt dat $\Box a \to \Box b$ wel waar is, maar $\Box(a \to b)$ niet. Voor dat laatste moet er ergens een bereikbare wereld zijn waarin a wel waar is en b niet. Voor het eerste is het een mogelijkheid om $\Box a$ onwaar te maken; dan is het verder niet van belang of $\Box b$ waar is of niet. Neem het model M_{14}:



Dit model is duidelijk serieel. De volgende tabel geeft aan welke formules allemaal waar zijn in welke wereld.

$\Vdash$	a	b	$a \to b$	$\Box a$	$\Box b$	$\Box a \to \Box b$	$\Box(a \to b)$	$(\Box a \to \Box b) \to \Box(a \to b)$
x_1	0	0	1	0	0	1	0	0
x_2	1	0	0	1	0	0	0	1

Omdat $x_1 \nVdash (\Box a \to \Box b) \to \Box(a \to b)$ geldt automatisch ook $M_{14} \nVdash (\Box a \to \Box b) \to \Box(a \to b)$.

15. Geef een LTL formule die uitdrukt dat a steeds opnieuw waar wordt, maar dat tussen twee tijdstippen waarop a waar is altijd b eerst ook een keer waar moet zijn geweest. (6 punten)

$$\mathcal{GF}a \wedge \mathcal{G}(a \to \mathcal{X}(\neg a\, \mathcal{U}\, (b \wedge \neg a)))$$

Het eerste deel van de formule geeft aan dat a oneindig vaak waar is, want op elk moment geldt dat er ooit weer een moment komt dat a waar is.

Het tweede deel geeft aan dat op elk moment geldt dat als a waar is, dat dan vanaf het volgende moment geldt dat er een moment komt waarop $b \wedge \neg a$ waar is en dat tot en met dat moment a niet waar is. Dus moet b minimaal een keer waar zijn voordat a opnieuw waar wordt.