Berekenbaarheid 2005, Inhaaltoets

vrijdag 10 juni, 11.45–12.30

Er zijn 3 opgaven die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis. In de opgaven mag je gebruik maken van het feit dat de functies op pagina 2 primitief recursief zijn.

1. De functie $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is gedefinieerd met primitieve recursie als:

$$\begin{array}{rcl} a(x,0) & = & 1 \\ a(x,y+1) & = & x^{a(x,y)} \end{array}$$

   Dus $a(10,0) = 1$, $a(10,1) = 10$, $a(10,2)$ is tien miljard (een één met tien nullen), $a(10,3)$ is een één met tien miljard nullen, etc.

   Het schema van primitieve recursie bevat functies 'g' en 'h'. Wat zijn deze functies in het specifieke geval van deze definitie van de functie a? Geef je antwoord zowel in de vorm '$g(x) = \ldots$' en '$h(x,y,z) = \ldots$', als in de vorm '$g = \ldots$' en '$h = \ldots$' als compositie van functies uit de lijst op pagina 2.

2. Laat zien dat de functie $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd als

$$l(x) = \text{aantal (decimale) cijfers van } x$$

   primitief recursief is. Hierbij beschouwen we het getal 0 als een getal met *nul* cijfers. Dus $l(0) = 0$, $l(1) = \ldots = l(9) = 1$, $l(10) = l(11) = \ldots = l(99) = 2$, $l(100) = l(101) = \ldots = l(999) = 3$, enz.

3. Definieer een primitief recursief predicaat $e : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$ zodat als y het Gödel-getal van een rijtje is, dan is $e(x,y) = 1$ als dat rijtje het getal x wel bevat, en $e(x,y) = 0$ als dat rijtje het getal x niet bevat.

Als y niet het Gödel-getal van een rijtje is, dan maakt het niet uit wat je $e(x, y)$ laat zijn.

Bijvoorbeeld, het rijtje $\langle 3, 1, 1\rangle$ bevat een 1 en een 3 maar geen 0 en geen 2, en het heeft als Gödel-getal $2^{3+1} \cdot 3^{1+1} \cdot 5^{1+1} = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3600$. Dus $e(0, 3600) = 0$, $e(1, 3600) = 1$, $e(2, 3600) = 0$ en $e(3, 3600) = 1$.

(*Hint:* pas op dat je definitie ook goed werkt voor het Gödel-getal $y = 1$ van het lege rijtje, waarbij dus $\mathsf{gdln}(y) = 0$.)

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned} s(x) &= x + 1 \\ z(x) &= 0 \\ p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\ c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{add}(x, y) &= x + y & \mathsf{eq}(x, y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{mult}(x, y) &= x \cdot y & \mathsf{ne}(x, y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{sub}(x, y) &= x \mathbin{\dot{-}} y & \mathsf{max}(x, y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 & \mathsf{min}(x, y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{exp}(x, y) &= x^y & \mathsf{div}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } \uparrow \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 & \mathsf{quo}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 & \mathsf{rem}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{lt}(x, y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 & \mathsf{divides}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x, y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 & \mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x, y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 & \mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x, y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 & \mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& & & (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{gn}_n(x_0, \ldots, x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0, \ldots, x_n\rangle \\ \mathsf{dec}(i, x) &= \text{`}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \\ \mathsf{gdln}(x) &= \text{`lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \end{aligned}$$