Berekenbaarheid 2006, hertentamen

woensdag 16 augustus, 10.30–12.30

Er zijn negen opgaven die ieder tien punten opleveren. Tien punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door tien.

1. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een standaard 2-tape Turing machine met alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die in de input ieder symbool verdubbelt.

   (Dus bij input *baaba* is de output *bbaaaabbaa*.)

2. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een non-deterministische Turing machine met ten hoogste 7 toestanden die de taal

   $$L_2 = \{ubaabav \mid u, v \in \{a, b\}^*\}$$

   herkent. (Deze taal bestaat dus precies uit de strings die *baaba* als substring hebben.)

3. Definieer met behulp van de macro's op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie $f_3 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door

   $$f_3(x, y, z) = xy + yz + xz$$

   berekent.

4. Schrijf de functie $f_4 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeven door

   $$f_4(x, y, z) = xy + yz + xz$$

   als compositie van de primitief recursieve functies op pagina 4.

5. De primitief recursieve functie $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wordt gegeven door de volgende instantie van het schema voor primitieve recursie:

   $$\begin{aligned} f_5(0) &= 0 \\ f_5(y+1) &= f_5(y) + 2y + 1 \end{aligned}$$

   Bereken $f_5(0)$, $f_5(1)$, $f_5(2)$ en $f_5(3)$.

De functie f_5 kan geschreven worden als

$$f_5 \quad = \quad \mathsf{primrec}(g, h)$$

voor functies g en h. Geef zulke g en h. Laat ook zien hoe je deze g en h kan schrijven als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

6. De begrensde operator $\nu m \leq n.\, p(m)$ geeft de grootste m in $\{0, \dots, n\}$ waarvoor $p(m) \neq 0$. Of, als er geen enkele m in $\{0, \dots, n\}$ bestaat waarvoor dit geldt, dan is de waarde van deze expressie gelijk aan 0. We noemen dit *begrensde maximalisatie*.

   Laat zien dat de verzameling primitief recursieve functies gesloten is onder begrensde maximalisatie. Dus dat, als $p(m)$ een primitief recursieve functie is, dat dan ook $\nu m \leq n.\, p(m)$ een primitief recursieve functie is.

7. Is iedere primitief recursieve functie ook μ-recursief? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

   Is iedere μ-recursieve functie ook primitief recursief? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

8. Is iedere recursieve taal ook recursief opsombaar? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

   Is iedere recursief opsombare taal ook recursief? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

9. Het probleem P_9 is: gegeven machines M_1 en M_2, beslis of er een input bestaat waarmee zowel M_1 als M_2 allebei termineren.

   Laat zien dat P_9 onbeslisbaar is.

S

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$$

Z

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad\; B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\dots B$$

E

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$
termineert niet

$\mathrm{P}_i^{(k)}$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\dots\quad\dots B$$

$\mathrm{C}_m^{(k)}$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\dots\quad\dots B$$

A

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$$

D

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\dots B$$

SUB

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\qquad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\dots\; B$$

MR_k

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$

ML_k

$$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

FR

$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i\geq 0)$$
$$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

FL

$$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad (i\geq 0)$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

E_k

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\quad\dots B$$

T

$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i\geq 0)$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

INT

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$$

MULT

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots$$

CPY_k

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\quad\dots B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

$\mathrm{CPY}_{k,i}$

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\quad\dots B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

BRN ($n=0$ / $n>0$)

$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\ldots,x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\ldots,x_n\rangle \\
\mathsf{dec}(i,x) &= \text{‘}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{’} \\
\mathsf{gdln}(x) &= \text{‘lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{’} \\
&= \text{‘hoogste index van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{’} + 1
\end{aligned}
$$