Berekenbaarheid 2006, toets 3

woensdag 17 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 onderdelen die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. Geef een voorbeeld van totale functies $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ met $f_1 \neq \mathsf{id}$ en $f_2 \neq \mathsf{id}$ maar $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$. Verklaar je antwoord.

2. De 'toren van tweeën' functie is gedefinieerd als

$$\mathsf{tower}(n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$$

waarbij er aan de rechterkant n tweeën voorkomen. Dus we hebben $\mathsf{tower}(0) = 1$, $\mathsf{tower}(1) = 2$, $\mathsf{tower}(2) = 4$, $\mathsf{tower}(3) = 16$, $\mathsf{tower}(4) = 2^{16} = 65536$, en $\mathsf{tower}(5) = 2^{65536}$ = een getal van 19729 cijfers. Laat zien dat deze tower functie primitief recursief is door een instantie van het schema voor primitieve recursie die deze functie definieert op te schrijven. Geef vervolgens de functies g en h in dit schema als compositie van functies uit de tabel op de achterzijde van dit blaadje.

3. Voor ieder natuurlijk getal n is er een natuurlijk getal m zodat de getallen $m, m+1, m+2, \ldots, m+n-1$ (dat zijn n opeenvolgende getallen) allemaal niet priem zijn. Laat f de functie zijn die aan n de eerste m waarvoor dit geldt toevoegt. Laat zien dat deze functie μ-recursief is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blad primitief recursief zijn.

   Als voorbeeld: $f(3) = 8$ want het rijtje $8, 9, 10$ is de eerste keer dat er in de natuurlijke getallen drie niet-priemgetallen achter elkaar voorkomen.

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$