Berekenbaarheid 2006, inhaaltoets

woensdag 24 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 onderdelen die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. Definieer (door middel van een toestandsdiagram) een standaard Turing machine $M_\emptyset$ die de lege taal over het alfabet $\{0, 1\}$ accepteert door stoppen.

2. Laat zien dat het onbeslisbaar is of twee Turing machines dezelfde taal accepteren door stoppen. Dus laat zien dat het niet mogelijk is een Turing machine EQ te maken zodat als EQ als input op de tape een string van de vorm $R(M_1)R(M_2)$ krijgt, dat hij dan stopt en de input accepteert als $L(M_1) = L(M_2)$, en stopt en de input verwerpt als $L(M_1) \neq L(M_2)$.

   (Hint: laat eerst zien dat het probleem E onbeslisbaar is of een Turing machine M de eigenschap heeft dat hij voor geen enkele input stopt.)

3. Laat $R : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een primitief recursief predicaat zijn. Laat $R^* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gedefinieerd zijn door:

$$R^*(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{als er een rijtje natuurlijke getallen } x_0, x_1, \ldots, x_n \text{ bestaat} \\ & \text{met } x_0 = x,\ x_n = y, \text{ en } R(x_i, x_{i+1}) = 1 \text{ voor alle } 0 \leq i < n \\ \uparrow & \text{als er niet zo'n rijtje te vinden is} \end{cases}$$

   Laat zien dat R^* een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn.

   (Hint: schrijf R^* in een vorm dat naar het Gödel-getal van zo'n rijtje gezocht wordt.)

Primitief recursieve functies

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\ldots,x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\ldots,x_n \rangle \\
\mathsf{dec}(i,x) &= \text{`}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \\
\mathsf{gdln}(x) &= \text{`lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \\
&= \text{`hoogste index van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} + 1
\end{aligned}
$$