Berekenbaarheid 2007, hertentamen

woensdag 15 augustus, 10.30–12.30

Er zijn negen opgaven die ieder tien punten opleveren. Tien punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door tien.

1. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input 'sorteert', dus de a's voor de b's neerzet. Bijvoorbeeld moet bij input $bbaba$ de output $aabbb$ zijn.

2. Definieer (door het tekenen van een toestandsdiagram) een non-deterministische 2-tape Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die de taal
$$L := \{uu \mid u \in \{a, b\}^*\}$$
herkent. Zorg ervoor dat een correcte input w (die dus van de vorm uu moet zijn) wordt geaccepteerd in niet meer dan $\frac{3}{2}|w| + 4$ stappen.

3. Definieer met behulp van de macro's op pagina 3 een Turing machine die de numerieke functie
$$l(n) = \text{het aantal bits in de binaire representatie van } n$$
berekent. Dus bijvoorbeeld $l(42) = 6$, want 42 heeft binaire representatie 101010. (Je mag zelf weten of je $l(0) = 0$ of $l(0) = 1$ laat zijn, afhankelijk wat het handigst is voor de definitie van je Turing machine.)

4. Schrijf de functie
$$c(x, y, z) = xyz + x + y + z$$
als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

5. De functie $r(x, y)$ is met primitieve recursie gedefinieerd door
$$\begin{aligned} r(x, 0) &= 0 \\ r(x, y+1) &= r(x, y) + x + y \end{aligned}$$
Bereken $r(3, 3)$. Laat verder zien hoe dit een instantie is van het schema van primitieve recursie. Schrijf r in de vorm $r = \mathsf{primrec}(g, h)$. Geef de functies g en h zowel in de stijl $g(x) = \ldots$, als in de stijl $g = \ldots$ (in dit tweede geval dus als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.)

6. Laat zien dat de functie

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{als er } n \text{ opvolgende getallen bestaan die niet priem zijn} \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

μ-recursief is. Bijvoorbeeld $f(3) = 1$, want de drie opvolgende getallen $8, 9, 10$ zijn allemaal geen priemgetal.

7. Geef de definitie van het begrip 'recursief opsombare taal'.

8. Laat zien dat de taal van het halting probleem

$$L_H := \{R(M)w \mid M(w)\downarrow\}$$

recursief opsombaar is.

9. Laat zien dat het niet beslisbaar is of er bij een gegeven Turing machine M precies één input bestaat waarvoor M niet termineert.

$\rightarrow\boxed{\mathrm{S}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{Z}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\dots B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$
termineert niet

$\rightarrow\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\,B\dots\quad\dots B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\,B\dots\quad\dots B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{A}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{D}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\dots B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{SUB}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\qquad B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}m}\dots\;B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{MR}_k}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{ML}_k}\rightarrow$
$$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{FR}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$$
$$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{FL}}\rightarrow$
$$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{E}_k}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\qquad\dots B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{T}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{INT}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{MULT}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_k}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\qquad\dots B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\rightarrow$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\qquad\dots B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$$

$\rightarrow\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n>0$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$
$$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1 \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0 \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0 \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3,\text{ etc.})
\end{aligned}
$$