Berekenbaarheid 2007, inhaaltoets

woensdag 9 mei, 11.45–12.30

Er zijn 3 onderdelen die ieder 3 punten opleveren, 1 punt is gratis.

1. Geef (door het tekenen van een toestandsdiagram) een niet-deterministische 2-tape Turing machine die de taal herkent gedefinieerd door:

   $$L_1 = \{ucvcw \mid u, v, w \in \{a, b, c\}^*, v = v^R\}$$

   (Het gaat hier dus om de woorden waarbij er ergens tussen twee c's een palindroom zit.)

   De machine moet een input $s \in L_1$ accepteren in ten hoogste $3|s| + 6$ stappen.

2. Beschouw de taal L_D gedefinieerd door

   $$\begin{aligned} L_D &= \{R(M) \mid M(R(M))\uparrow\} \\ &= \{R(M) \mid R(M) \notin L(M)\} \end{aligned}$$

   Is dit een

   - recursieve taal?
   - recursief opsombare taal?
   - het complement van een recursief opsombare taal?

   Verklaar je antwoorden.

3. Laat zien dat er een primitief recursieve functie $\mathsf{reverse}$ bestaat zodat als x het Gödel-getal van een rijtje is, dat dan $\mathsf{reverse}(x)$ het Gödel-getal van dat rijtje achterstevoren is.

   (Bijvoorbeeld moet gelden dat $\mathsf{reverse}(67500) = 10800$, want $67500 = 2^{1+1}3^{2+1}5^{3+1} = \mathsf{gn}_2(1, 2, 3)$ en $10800 = 2^{3+1}3^{2+1}5^{1+1} = \mathsf{gn}_2(3, 2, 1)$.)

   Er wordt niets geëist over wat de waarde van $\mathsf{reverse}$ moet zijn als het argument niet het Gödel-getal van een rijtje is. En je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn.

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{gn}_n(x_0,\ldots,x_n) &= \text{Gödel-getal van het rijtje } \langle x_0,\ldots,x_n\rangle \\
\mathsf{dec}(i,x) &= \text{`}i\text{-de element in het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'} \\
\mathsf{gdln}(x) &= \text{`lengte van het rijtje bij het Gödel-getal } x\text{'}
\end{aligned}$$