Berekenbaarheid najaar 2008, tentamen

dinsdag 20 januari, 10.30–12.30

Er zijn 9 onderdelen die ieder 1 punt opleveren en 1 punt is gratis. Let op: bij het 'definiëren' van een Turing machine moet je deze geven door middel van een toestandsdiagram. Veel succes!

1. Definieer een standaard Turing machine met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ die zijn input wist als er in die input evenveel a's als b's voorkomen, en die die input als output heeft (dus die de tape terugbrengt in de oorspronkelijke toestand alvorens te termineren) als dat niet zo is.

2. Definieer een non-deterministische 2-tape Turing machine die de volgende taal herkent:

   $$L = \{u_2 c u_1 u_2 u_3 \mid u_1, u_2, u_3 \in \{a, b\}^*\}$$

   (Een voorbeeld van een element van deze taal is *abacaaabbabab* want *aba* is een substring van *aaabbabab*.) De machine moet een element w van de taal in ten hoogste $\frac{3}{2}|w| + 5$ stappen herkennen.

3. Definieer met de macro's op pagina 3 een Turing machine die de functie

   $$k(x, y) = xy\,(x + y)$$

   uitrekent.

4. Is iedere recursieve taal ook een recursief opsombare taal? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een voorbeeld van een recursieve taal die niet recursief opsombaar is.

   Is iedere recursief opsombare taal ook een recursieve taal? Zo ja, leg uit waarom. Zo nee, geef een voorbeeld van een recursief opsombare taal die niet recursief is.

5. Voor een Turing machine M definiëren we het probleem H_M als het probleem of M met gegeven input w termineert. Dit probleem heeft dus w als input.

   Laat U een universele Turing machine zijn. Laat zien dat H_U onbeslisbaar is.

6. Bestaat er een Turing machine M waarvoor het probleem H_M uit de vorige opgave wél beslisbaar is?

7. Schrijf de functie
$$k(x, y) = xy\,(x + y)$$
als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

8. We definiëren met primitieve recursie
$$\begin{aligned} f(x, 0) &= 1 \\ f(x, y + 1) &= xy\, f(x, y) \end{aligned}$$
Geef de waarde van $f(2, 2)$.

   Geef voorts functies g en h met $f = \mathsf{primrec}(g, h)$.

9. We definiëren een functie
$$l(x, y) = \begin{cases} \text{het kleinste priemgetal } p \text{ met } x \le p \le y \\ \qquad \text{als er zo'n priemgetal bestaat} \\ 0 \qquad \text{als dat niet zo is} \end{cases}$$
Geef de waarde van $l(8, 10)$.

   Laat voorts zien dat l primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op pagina 4 primitief recursief zijn.

$\to\boxed{\mathrm{S}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{Z}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{E}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\to\boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\ldots\quad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\ldots\quad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{A}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\to\boxed{\mathrm{D}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\dot{-}1}\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{MULT}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
$\to\boxed{\mathrm{MR}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\to\boxed{\mathrm{ML}_k}\to$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{FR}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{FL}}\to$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to\boxed{\mathrm{E}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
$\to\boxed{\mathrm{T}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\to\boxed{\mathrm{INT}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{CPY}_k}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}}\to$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\to\boxed{\mathrm{BRN}}\xrightarrow{n=0}$; $\downarrow n>0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot-} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot-} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}$$