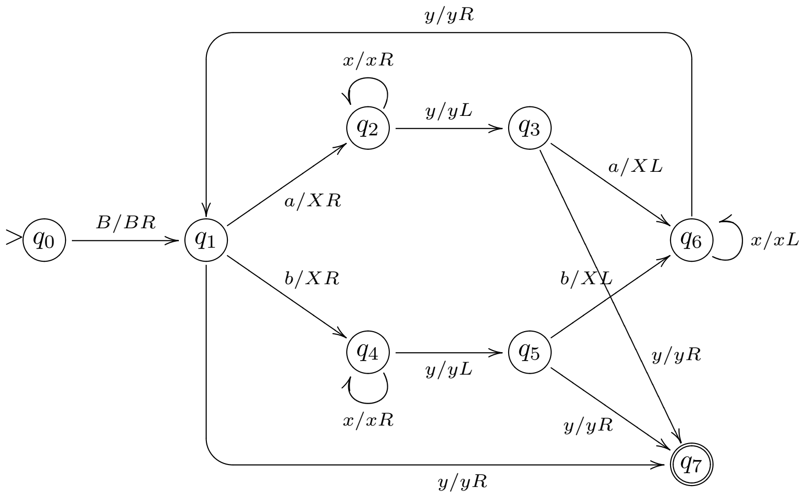
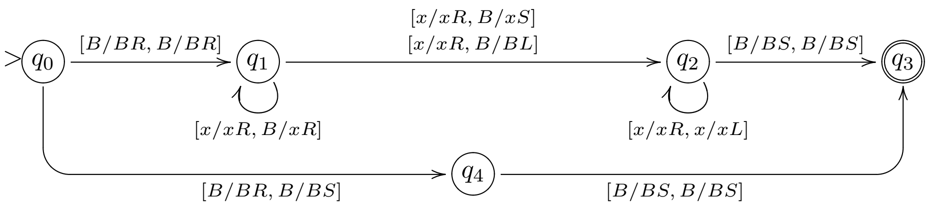
Berekenbaarheid 2009, uitwerkingen tentamen

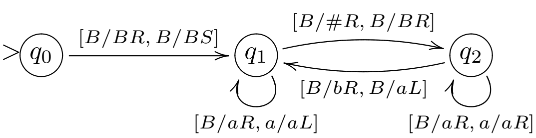
1. We nemen als tape alfabet $\Gamma = \{a, b, X, B\}$. De variabelen in dit toestandsdiagram zijn $x \in \{a, b\}$ en $y \in \{X, B\}$:



2. De variabele in onderstaand toestanddiagram is $x \in \{a, b\}$:



3.



4. Bij een recursief opsombare taal bestaat per definitie een Turing machine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \delta, F)$ die de taal herkent. Maak van deze M een nieuwe machine M', door twee extra toestanden q_0' en q_1' toe te voegen en δ uit te breiden tot δ' volgens

$$\begin{array}{rcll} \delta'(q_0', B) & = & [q_1', B, R] & \\ \delta'(q_1', x) & = & [q_0, x, L] & x \in \Gamma \\ \delta'(q_i, x) & = & \delta(q_i, x) & q_i \in Q,\ x \in \Gamma \end{array}$$

of in een plaatje

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & q_0' \arrow[r, "B/BR"] & q_1' \arrow[r, "x/xL"] & q_0 \end{tikzcd}$$

waarbij $x \in \Gamma$.

Dan herkent $M' = (\{q_0', q_1'\} \cup Q, \Sigma, \Gamma, q_0', \delta', F)$ duidelijk dezelfde taal als M, en M' voldoet aan de eisen uit de opgave.

5. De universele Turing machine U gedraagt zich volgens

$$U(R(M)w) = M(w)$$

als $R(M)$ de code van een Turing machine is (dit betekent dat de berekening $U(R(M)w)$ stopt precies dan als $M(w)$ stopt), en volgens

$$U(w')\uparrow$$

als w' niet van de vorm $R(M)w$ is. (Dit betekent dus dat ook $U(\lambda)\uparrow$, want $R(M)$ kan niet het lege woord zijn.)

De taal die U herkent is

$$L(U) = L_H = \{R(M)w \mid M(w)\downarrow\}$$

de taal van het halting probleem. Deze taal is niet recursief, want anders zou het halting probleem beslisbaar zijn, maar wel recursief opsombaar, want hij wordt herkend door U.

6. De onbeslisbaarheid volgt uit het feit dat we het blank tape probleem kunnen reduceren naar het probleem uit de opgave.

De reductie gaat als volgt:

Laat gegeven zijn een M waarvan we willen weten of $M(\lambda)\downarrow$. Maak van M een nieuwe machine M' die eerst de input van de tape wist en dan M uitvoert. Dan geldt duidelijk dat

$$M'(R(M))\downarrow \iff M(\lambda)\downarrow$$

Het probleem uit de opgave voor M' vertelt of de linkerkant geldt, en geeft daarmee ook het antwoord van het blank tape probleem voor M.

7.

$$f_7 = \mathsf{add} \circ (\mathsf{add} \circ (\mathsf{mult} \circ (p_1^{(4)}, \mathsf{mult} \circ (p_4^{(4)}, p_4^{(4)})), \mathsf{mult} \circ (p_2^{(4)}, p_4^{(4)})), p_3^{(4)})$$

8. We hebben de recursievergelijkingen

$$\begin{aligned} \mathsf{cosg}(0) &= 1 \\ \mathsf{cosg}(y+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{odd}(0) &= 0 \\ \mathsf{odd}(y+1) &= \mathsf{cosg}(\mathsf{odd}(y)) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}\mathsf{cosg} &= \mathsf{primrec}\big(s \circ c_0^{(0)},\, z \circ p_1^{(2)}\big)\\ \mathsf{odd} &= \mathsf{primrec}\big(c_0^{(0)},\, \mathsf{cosg} \circ p_2^{(2)}\big)\end{aligned}$$

of samen:

$$\mathsf{odd} = \mathsf{primrec}\big(c_0^{(0)},\, \mathsf{primrec}\big(s \circ c_0^{(0)},\, z \circ p_1^{(2)}\big) \circ p_2^{(2)}\big)$$

Hieruit blijkt duidelijk dat odd te maken is uit de basisfuncties s, z, $c_0^{(0)}$ en $p_i^{(n)}$, met behulp van compositie en primitieve recursie, en dat deze functie daarom primitief recursief is.

9. Dit volgt uit het feit dat f_9 te schrijven is als

$$f_9(x,y) = \mathsf{sg}(\mathsf{ge}(x,y) + \prod_{z=x}^{y \dot{-} 1} \mathsf{le}(g_9(z), g_9(z+1)))$$

(Iets als de disjunctie met $\mathsf{ge}(x,y)$ aan het begin is nodig omdat de sub uit de bovengrens van het product tot het verkeerde antwoord leidt als $x = y = 0$.)