Berekenbaarheid 2010, tentamen

woensdag 19 januari, 10.30–12.30

Er zijn acht opgaven (waarvan twee op de achterzijde van dit blaadje!) die alle 1 punt waard zijn, behalve opgaven 1 en 3 die $1\frac{1}{2}$ punt waard zijn. Het eerste punt is gratis. Niet alle opgaven kosten evenveel tijd, dus het is aan te bevelen met de minder bewerkelijke opgaven te beginnen om in geval van tijdnood niet teveel punten te verspelen.

Denk eraan je naam en studentnummer op je uitwerkingen te vermelden. Veel succes!

1. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een standaard Turing machine met input in $\{a, b\}^*$, die in zijn input iedere b vervangt door cc. Bij input $abbab$ moet de output dus $accccacc$ zijn.

2. Definieer door het tekenen van een toestandsdiagram een non-deterministische twee-tape Turing machine die de taal

$$L_2 := \{u^n \mid u \in \{a, b\}^*, n \geq 2\}$$

herkent. De woorden in deze taal bestaan dus uit een minstens twee maal herhaald woord (bijv. $abbabbabbabb$: hierin is $u = abb$ en $n = 4$). Een correcte input $w \in L_2$ moet door de machine worden herkend in ten hoogste $4|w| + 4$ stappen.

3. Een Turing machine *met unieke eindtoestand* is een standaard Turing machine die precies één eindtoestand heeft. Laat zien dat de Turing machines met unieke eindtoestand precies de recursief opsombare talen herkennen.

4. Is de taal van het halting probleem L_H recursief opsombaar? En is deze taal recursief? En is het complement van deze taal $\overline{L_H}$ recursief opsombaar? En is die taal recursief? Verklaar je antwoorden.

5. Laat zien dat het onbeslisbaar is of een gegeven Turing machine M voor iedere input met lege output termineert. Dus of voor M de eigenschap geldt dat

$$M(w) = \lambda \text{ voor alle } w \in \{0, 1\}^*$$

Wat is de input van een Turing machine P_5 die dit probleem zou moeten oplossen (en die omdat het probleem onbeslisbaar is dus niet bestaat)?

6. Geef partiële getaltheoretische functies f_1 en f_2 die allebei ariteit 1 hebben, zodat

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 &= \mathsf{add} \circ (\mathsf{mult} \circ (c_2^{(1)}, p_1^{(1)}), c_1^{(1)}) \\ f_2 \circ f_1 &= \mathsf{add} \circ (\mathsf{mult} \circ (c_2^{(1)}, p_1^{(1)}), c_2^{(1)}) \end{aligned}$$

7. Geef de recursievergelijkingen die horen bij de notatie

$$f := \mathsf{primrec}(g, h)$$

Wat zijn de ariteiten van g en h als de ariteit van f gelijk is aan $k+1$?

8. We coderen paren getallen (x, y) als $2^x 3^y$ (het paar $(3,1)$ wordt dus gecodeerd door $2^3 \cdot 3^1 = 8 \cdot 3 = 24$), en we willen graag primitief recursieve functies p_1 en p_2 die gegeven zo'n codering de getallen x en y er weer uithaalt (dus $p_1(24) = 3$ en $p_2(24) = 1$). Laat dus zien dat er primitief recursieve functies p_1 en p_2 bestaan met

$$\begin{array}{rcl} p_1(2^x 3^y) & = & x \\ p_2(2^x 3^y) & = & y \end{array}$$

Het maakt niet uit wat er uit p_1 en p_2 komt als de input andere priemfactoren dan 2 en 3 heeft. Je mag gebruiken dat de functies op pagina 3 primitief recursief zijn.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x\\
z(x) &= 0\\
s(x) &= x+1\\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i\\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1\\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y\\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y\\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y\\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y\\
\mathsf{fact}(x) &= x!\\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1\\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y\\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders } 0\\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x\\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y\,|\,x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0\\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal}\\
&\ (\text{dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$