Berekenbaarheid 2011, toets 3

woensdag 21 december, 11.45–12.30

Voor je begint schrijf je naam, studentnummer en studierichting boven je uitwerkingen. Bij ieder onderdeel is het aantal punten aangegeven, 1 punt is gratis. Veel succes!

1. Geef numerieke functies f_1 en f_2, zodat f_1 niet totaal is, en $f_1 \circ f_2 = \mathsf{id}$. (2 punten)

2. We definiëren een functie k met de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} k(0) &= 1 \\ k(y+1) &= 3\,k(y) - 1 \end{aligned}$$

Zo geldt bijvoorbeeld dat $k(6) = 365$. Schrijf k als $\mathsf{primrec}(g, h)$, dus geef de functies g en h die bij deze vergelijkingen horen volgens het primitieve recursieschema uit het boek. Schrijf g en h als compositie van functies op de achterzijde van dit blaadje. ($2\frac{1}{2}$ punten)

3. We definiëren een numerieke functie p door

$$p(x, y) \;:=\; \frac{1}{2}\,(x + y)\,(x + y + 1) + x$$

Zo hebben we bijvoorbeeld $p(3, 4) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 + 3 = 31$. Laat zien dat p een primitief recursieve functie is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn. ($2\frac{1}{2}$ punten)

4. Zij gegeven een injectieve functie $p(x, y)$ die primitief recursief is en de eigenschap heeft dat voor alle x en y geldt dat

$$p(x, y) \geq x \quad \text{en} \quad p(x, y) \geq y$$

Laat zien dat er primitief recursieve functies l en r bestaan zodat

$$l(p(x, y)) = x \quad \text{en} \quad r(p(x, y)) = y$$

voor iedere combinatie van natuurlijke getallen x en y. Als z niet een output van p is mag je zelf weten wat je $l(z)$ en $r(z)$ laat zijn. Je mag gebruiken dat de functies op de achterzijde van dit blaadje primitief recursief zijn. (Hint: gebruik begrensde operatoren en eq.) (2 punten)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& (\text{dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.})
\end{aligned}
$$