

Berekenbaarheid 2012
Hertentamen
5 april 2013

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 9 opgaven die ieder 10 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het eindcijfer is het aantal punten gedeeld door 10. Turing machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een implementatie van de $P_2^{(2)}$ macro, zoals die ook voorkomt in de lijst macro's op pagina 3. Je moet de machine tot op toestanden uitwerken, dus je mag je implementatie niet in termen van andere macro's geven. Als je wil mag je wel hulpsymbolen in het tape alfabet opnemen. Zorg ervoor dat je machine aan de eisen van een macro voldoet!
2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing machine M_2 die de taal

$$L_2 := \{u^n \mid u \in \{a, b\}^*, n > 1\}$$

herkent door eindtoestand. Geef het aantal stappen dat M_2 nodig heeft (als functie van n) om het woord $a^n \in L_2$ te accepteren.

3. Gebruik de macro's uit de lijst op pagina 3 om een Turing machine M_3 te definiëren die de functie

$$\text{even}(n) := \begin{cases} 1 & \text{als } n \text{ even is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

berekent. De machine M_3 moet ook weer aan de eisen van een macro voldoen.

4. Geef alle talen over het alfabet $\{0, 1\}$ die geaccepteerd worden door een Turing machine waarvan de code precies één transitie bevat, en geef voor iedere van deze talen een code van een Turing machine die die taal herkent en precies één transitie bevat. Voor de codering van transities, zie het citaat uit het boek van Sudkamp op pagina 4.

5. Het probleem P_5 vraagt of er bij een gegeven Turing machine M er oneindig veel verschillende woorden w zijn waarvoor de berekening van $M(w)$ stopt (zonder van de tape te zijn afgelopen). Is dit probleem beslisbaar of onbeslisbaar? Bewijs je antwoord.
6. Het probleem P_6 vraagt of, gegeven een Turing machine M en een toestand q_i van deze Turing machine, er een input w is waarvoor geldt dat bij de berekening van $M(w)$ de Turing machine in de toestand q_i terecht komt. Laat zien dat dit probleem onbeslisbaar is.
7. Geef numerieke functies f_1 en f_2 , waarvan f_1 niet totaal is, en zodat $f_1 \circ f_2 = s$. Kan ook f_2 niet totaal zijn? Verklaar je antwoorden.
8. Gegeven een primitief recursieve functie k , definiëren we een functie **funpow** door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned}\text{funpow}(x, 0) &= x \\ \text{funpow}(x, n + 1) &= k(\text{funpow}(x, n))\end{aligned}$$

Er geldt dus

$$\text{funpow}(x, n) = k^n(x)$$

waarin k^n de compositie $k \circ \dots \circ k$ met n maal de functie k is.

Geef functies g en h zodat

$$\text{funpow} = \text{primrec}(g, h)$$

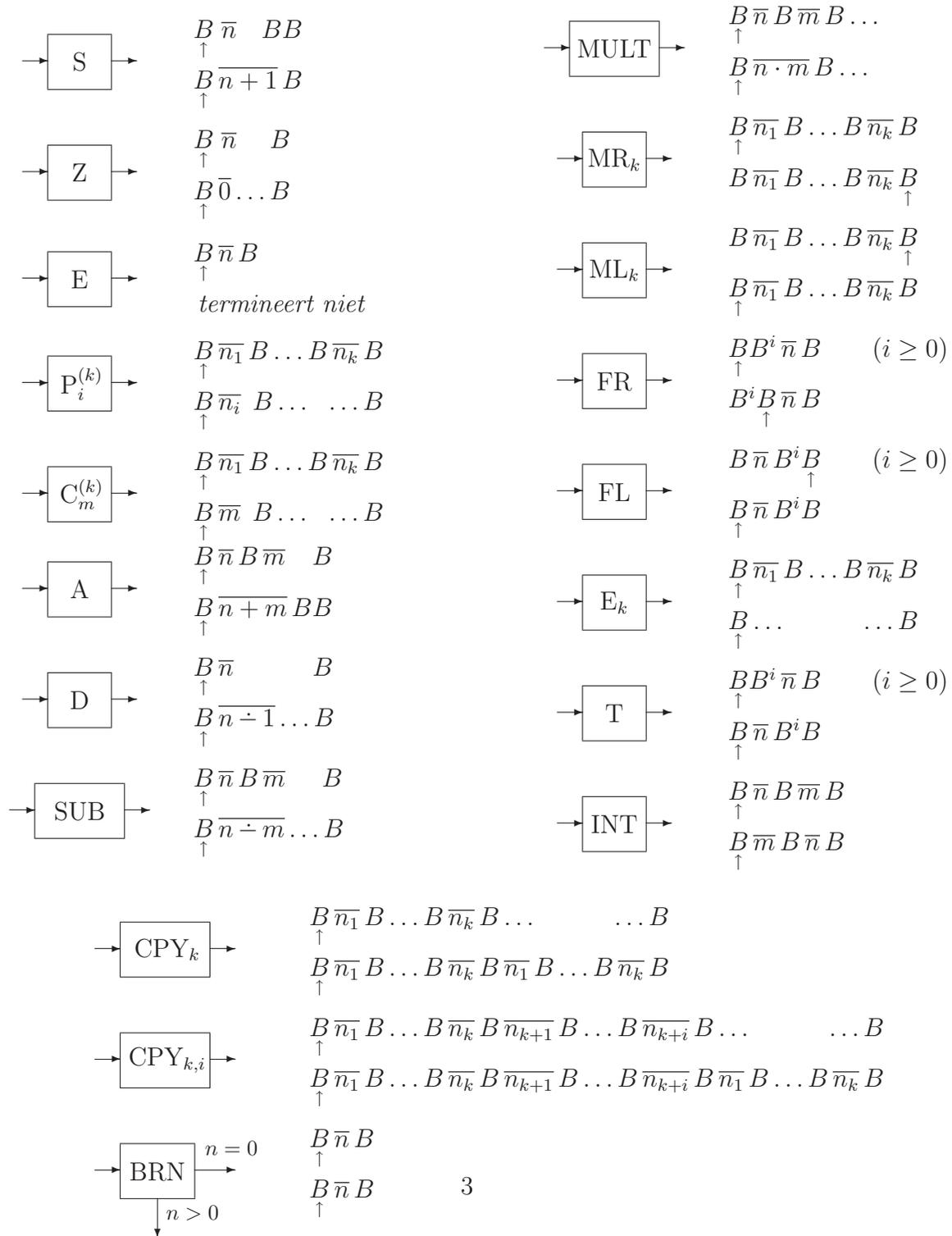
Schrijf deze twee functies g en h (ook) als compositie van k en primitief recursieve functies uit de lijst op pagina 4. Geef tenslotte de ariteiten van de drie functies **funpow**, g en h .

9. We definiëren een functie **leastdivisor** door

$$\text{leastdivisor}(x) := \begin{cases} \text{het kleinste priemgetal } p \text{ dat } x \text{ deelt} & \text{als } x \geq 2 \\ 1 & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat **leastdivisor** primitief recursief is. Je mag hierbij gebruiken dat de functies uit de lijst op pagina 4 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing machines voor numerieke berekeningen



Codering van transitities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
\vdots	\vdots
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x . A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

	$id(x) = x$
	$z(x) = 0$
	$s(x) = x + 1$
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$
$pred(y) = y \dot{-} 1$	$eq(x, y) = \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$add(x, y) = x + y$	$ne(x, y) = \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$mult(x, y) = x \cdot y$	$max(x, y) = \text{het maximum van } x \text{ en } y$
$sub(x, y) = x \dot{-} y$	$min(x, y) = \text{het minimum van } x \text{ en } y$
$exp(x, y) = x^y$	$quo(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0$
$fact(x) = x!$	$rem(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x$
$sg(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$divides(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$cosg(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1$	$even(x) = \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0$
$lt(x, y) = \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$prime(x) = \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0$
$gt(x, y) = \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$pn(x) = \text{het } x\text{-de priemgetal}$
$le(x, y) = \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	(dus $pn(0) = 2, pn(1) = 3, \text{ etc.}$)
$ge(x, y) = \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	