

Berekenbaarheid 2013
Hertentamen
1 april 2014

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een standaard Turing machine die de predecessorfunctie uitrekent, waarbij getallen decimaal worden gerepresenteerd. Bij input '43' moet de output dus '42' zijn. $\Sigma = \{0, \dots, 9\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{B\}$, en je mag ervan uitgaan dat de input groter is dan nul, en niet met een nul begint. De leeskop hoeft na de berekening niet aan het begin van de tape te staan.

2. De taal

$$L_2 := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is het standaardvoorbeeld van een taal die *niet* contextvrij is. Beantwoord nu de volgende vier vragen, en verklaar de antwoorden:

- Is deze taal recursief opsombaar?
- Is deze taal recursief?
- Is het complement van deze taal recursief opsombaar?
- Is het complement van deze taal recursief?

3. Geef een non-deterministische 2-tape Turing machine die de taal

$$L_3 := \{ua^n b^n c^n v \mid u, v \in \{a, b, c\}^*, n > 0\}$$

herkent door eindtoestand. Zorg ervoor dat een correcte input w wordt herkend in minder dan $\text{length}(w) + 5$ stappen.

4. Definieer een macro die de numerieke functie $f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gegeven door

$$f_4(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

uitrekent. Je mag hierbij gebruik maken van de macros op pagina 3. (Hint: je kunt in een lus verschillende mogelijkheden proberen, en je kunt de SUB macro gebruiken in de test of het kwadraat van een mogelijkheid kleiner of gelijk is aan de input.)

5. Definieer een Turing machine M_5 die de taal

$$L_5 := \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \neq \lambda\}$$

herkent door stoppen, en geef de input van de universele Turing machine zodat deze M_5 simuleert op de lege tape. (Zie pagina 4 voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.) Zal de universele Turing machine met deze input stoppen? Verklaar je antwoorden.

6. Is het probleem P_6 onbeslisbaar dat vraagt of een Turing machine M precies dan stopt als de input niet-leeg is? Verklaar je antwoord.
7. Is het probleem P_7 onbeslisbaar dat vraagt of een Turing machine M de tape wist, dus of M voor iedere input stopt met de lege tape? Verklaar je antwoord.
8. Geef totale numerieke functies f_8 en g_8 zodat $f_8 \circ g_8$ injectief is (een functie is injectief als er geen twee verschillende inputs bestaan met dezelfde output), maar $g_8 \circ f_8$ niet. Verklaar je antwoord. Geef ook de ariteiten van f_8 en g_8 .
9. We definiëren een primitief recursieve functie f_9 door de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_9(x, 0) &= 1 \\ f_9(x, y + 1) &= f_9(x, y) \cdot x \end{aligned}$$

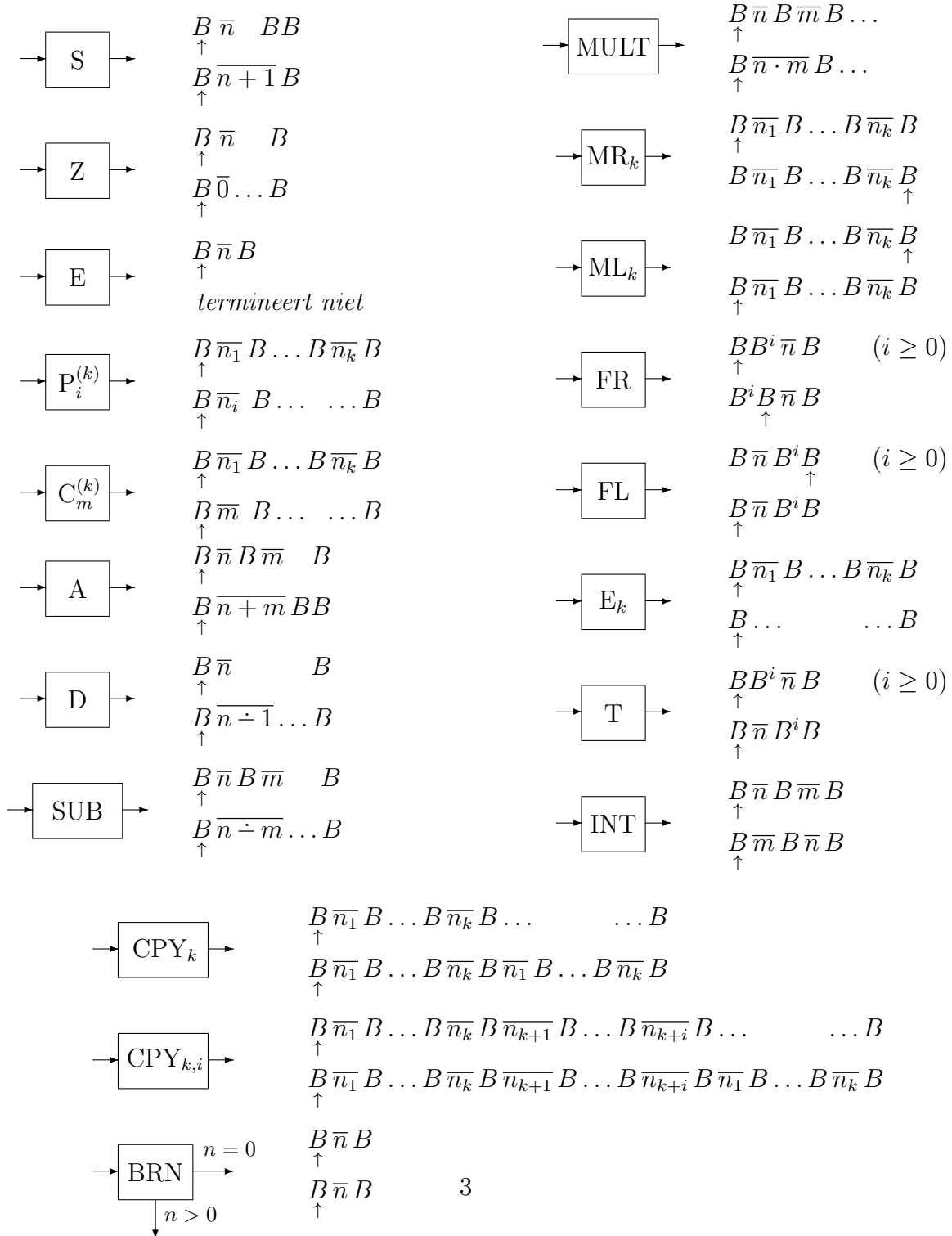
Geef de waarde van $f_9(3, 3)$. Geef vervolgens functies g en h zodat $f_9 = \text{primrec}(g, h)$, en schrijf deze functies als compositie van functies uit de lijst op pagina 4.

10. Laat zien dat de functie f_{10} gedefinieerd door

$$f_{10}(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$$

primitief recursief is. Je mag gebruiken dat de functies uit de lijst op pagina 4 primitief recursief zijn.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen



Codering van transitities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
\vdots	\vdots
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x . A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

	$id(x) = x$	
	$z(x) = 0$	
	$s(x) = x + 1$	
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$	
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$	
$pred(y) = y \dot{-} 1$	$eq(x, y) =$ als $x = y$ dan 1 anders 0	
$add(x, y) = x + y$	$ne(x, y) =$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0	
$mult(x, y) = x \cdot y$	$max(x, y) =$ het maximum van x en y	
$sub(x, y) = x \dot{-} y$	$min(x, y) =$ het minimum van x en y	
$exp(x, y) = x^y$	$quo(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0	
$fact(x) = x!$	$rem(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders x	
$sg(x) =$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0	$divides(x, y) =$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0	
$cosg(x) =$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1	$even(x) =$ als x even is dan 1 anders 0	
$lt(x, y) =$ als $x < y$ dan 1 anders 0	$prime(x) =$ als x priem is dan 1 anders 0	
$gt(x, y) =$ als $x > y$ dan 1 anders 0	$pn(x) =$ het x -de priemgetal	
$le(x, y) =$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0	(dus $pn(0) = 2$, $pn(1) = 3$, etc.)	
$ge(x, y) =$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0		