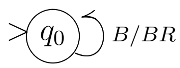
Berekenbaarheid 2013
Uitwerkingen Toets 2
18 december 2013

1. (a) Geef het toestandsdiagram van een Turing machine M_1 die de taal van de niet-lege woorden $L_1 := \{0,1\}^* \setminus \{\lambda\}$ accepteert door stoppen.

M_1 :



(b) Geef een code $R(M_1)$ van deze machine. Zie de achterkant van dit blaadje voor een relevant stukje uit het boek van Sudkamp.

$$R(M_1) = 00010111010111011000$$

(c) Geef de lengte van de input van de universele Turing machine U die correspondeert met de berekening $M_1(\lambda)$.

$$|R(M_1)\lambda| = |00010111010111011000| = 20$$

2. Gegeven een functie $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Laat zien dat er een functie $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bestaat, zodat voor geen enkele $x_0 \in \mathbb{N}$ geldt dat:

$$d(y) = h(x_0, y) \text{ voor alle } y \in \mathbb{N}$$

Ofwel, dat als we h opvatten als een tweedimensionale tabel, dat er een functie d is die verschilt van iedere rij in die tabel.

Definieer
$$d(y) := h(y,y) + 1$$
voor alle $y \in \mathbb{N}$.

Stel dat er een $x_0 \in \mathbb{N}$ zou bestaan zodat $d(y) = h(x_0, y)$ voor alle $y \in \mathbb{N}$. Dan zou ook gelden $d(x_0) := h(x_0, x_0) + 1 = h(x_0, x_0)$, en dat kan niet, want voor geen enkel getal n geldt $n + 1 = n$.

3. Laat zien, zonder de stelling van Rice te gebruiken, dat het probleem P_3 onbeslisbaar is, dat vraagt of een Turing machine M_3 alléén termineert met als input de blanco tape, ofwel, of $L(M_3) = \{\lambda\}$.

   Dit volgt uit het feit dat het blank tape probleem B reduceert naar P_3. Zij dus gegeven een machine M waarvoor we willen weten of $M(\lambda)\downarrow$. Dan kunnen we dit oplossen door aan het probleem P_3 de machine M' te geven die het volgende doet:

   (a) Als de input $w \neq \lambda$, termineer dan niet.

   (b) Voer vervolgens M uit (op λ dus).

4. Laat zien dat het probleem P_4 onbeslisbaar is, dat vraagt of een Turing machine M_4 een universele Turing machine is in de stijl van het boek, dus met de eigenschap dat $M_4(w)$ termineert precies dan als $w = R(M)w'$ met $M(w')\downarrow$. Het is niet belangrijk wat de output van M_4 is als $M_4(w)$ termineert.

   Een machine M_4 voldoet aan probleem P_4 precies dan als $L(M_4) = L(U)$. Het probleem P_4 vraagt dus naar een eigenschap van de taal van M_4, en valt daarom onder de stelling van Rice. We moeten alleen nog laten zien dat dit probleem niet triviaal is. Neem hiervoor $M_{\text{ja}} := U$ en $M_{\text{nee}} = M_1$ (de machine uit de eerste opgave, die duidelijk geen universele Turing machine is).