Berekenbaarheid 2013
Uitwerkingen Inhaaltoets
20 januari 2014

1. Definieer een POP macro die bij een tape die een 'stack' bevat in de stijl

$$\underset{\uparrow}{B}\overline{n_1}B\overline{n_2}B\ldots B\overline{n_k}BB\ldots$$

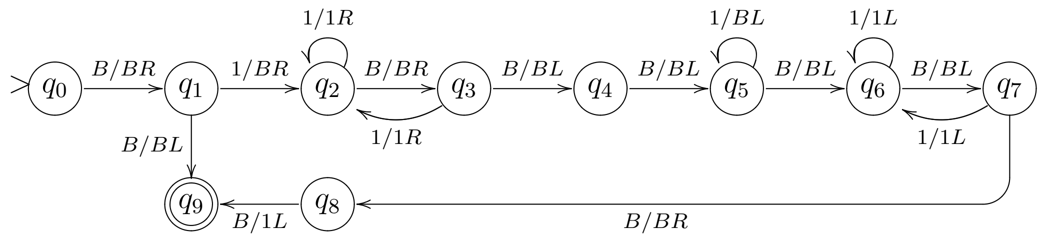
de top van die stack weghaalt, dus die dan stopt met de tape

$$\underset{\uparrow}{B}\overline{n_1}B\overline{n_2}B\ldots B\overline{n_{k-1}}BB^{n_k+3}\ldots$$

Bij een tape die de lege stack codeert, namelijk

$$\underset{\uparrow}{B}B\ldots$$

moet de macro niets doen. In je macro mag je hulpsymbolen gebruiken.



2. Laat zien dat het probleem P_2 onbeslisbaar is of een machine M waarvan gegeven is dat $M(\lambda)\downarrow$, ook de eigenschap heeft dat $M(w)\downarrow$ voor alle andere $w \in \{0,1\}^*$.

Preciezer geformuleerd: laat zien dat er geen Turing machine P_2 bestaat met de eigenschap dat voor iedere Turing machine M met $M(\lambda)\downarrow$ geldt dat

$$P_2(R(M)) = \begin{cases} 1 & \text{als voor alle } w \in \{0,1\}^* \text{ geldt dat } M(w)\downarrow \\ 0 & \text{als er een } w \in \{0,1\}^* \setminus \{\lambda\} \text{ bestaat met } M(w)\uparrow \end{cases}$$

Er wordt dus niets geëist voor $P_2(R(M))$ als $M(\lambda)\uparrow$.

De onbeslisbaarheid volgt uit het feit dat het blank tape probleem B reduceert naar P_2. Hiervoor moeten we bij een machine M waarvoor we willen weten of $M(\lambda)\downarrow$ een machine M' construeren waarvoor P_2 deze informatie levert. Deze constructie gaat als volgt:

De machine M' stopt direct als zijn input λ is. Zo niet, dan wist hij zijn input, en bestaat vervolgens uit M.

Als $M(\lambda)$ stopt, dan stopt $M'(w)$ voor iedere w en er geldt dus $P_2(R(M')) = 1$. Als $M(\lambda)$ niet stopt, dan stopt $M'(w)$ niet als $w \neq \lambda$, maar wel als $w = \lambda$, en dus geldt dan $P_2(R(M')) = 0$.

We hebben dus $P_2(R(M')) = B(R(M))$. Als P_2 met een Turing machine zou zijn te beslissen, zou dit dus ook voor B gelden. Maar B is niet beslisbaar, en dus P_2 ook niet.

3. Geef een voorbeeld van een functie $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die niet μ-recursief is.

Laat $\chi_{L_H} : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ de karakteristieke functie van de taal van het halting probleem zijn, dus:

$$\chi_{L_H}(w) = \begin{cases} 1 & \text{als } w = R(M)w' \text{ en } M(w')\downarrow \\ 0 & \text{als } w = R(M)w' \text{ en } M(w')\uparrow \\ 0 & \text{als } w \text{ niet met een legale code van een} \\ & \text{deterministische Turing machine begint} \end{cases}$$

Omdat het halting probleem onbeslisbaar is, is deze functie niet Turing-berekenbaar. Maar de Turing-berekenbare functies zijn dezelfde als de μ-recursieve functies, dus dit is in essentie de f_3 die we zoeken.

Het enige dat er nog tussen moet is een berekenbare bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}^*$. We noemen deze functie $h : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$, en definiëren hem als:

$$h((1w)_2 - 1) = w$$

Hierin betekent w_2 dat het woord w als een binair getal wordt geïnterpreteerd.

De functie $f_3 : \mathbb{N} \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{N}$ is tenslotte:

$$f_3 := \chi_{L_H} \circ h$$