

Berekenbaarheid 2014
Tentamen
19 januari 2015

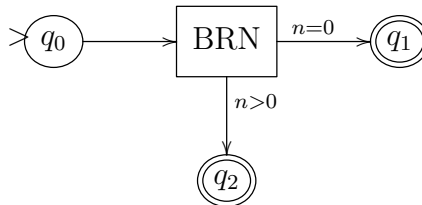
Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. Veel succes!

1. Geef een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$, die alle b 's uit zijn input verwijdert en het resultaat aanschuift. Met input $abbab$ moet de output dus aa zijn. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken.
2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine die de taal

$$L_2 := \{uuu \mid u \in \{a, b\}^*\}$$

herkent door eindtoestand. Een correcte input van lengte n moet worden herkend in ten hoogste $2n + 6$ stappen.

3. Geef de macro



als Turing machine, dus met toestanden en transities.

4. Geef een numerieke Turing-machine die de functie

$$f_4(x, y, z) := xy + xz + yz$$

uitrekent. Je mag gebruik maken van de macros op blz. 3.

5. Geef een code van een Turing-machine $R(M_5)$, waarvoor geldt dat de universele Turing-machine U niet stopt wanneer de input $R(M_5)$ is. Zie blz. 4 voor een relevant stukje uit het boek van Sudkamp.

6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij een gegeven Turing-machine M oneindig veel verschillende inputs bestaan waarvoor M stopt.
7. Laat zien dat het probleem P_7 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij gegeven een Turing-machine M een input bestaat waarbij de machine stopt met output 101.
8. We definiëren een functie:

$$f_8(x, y, z) = xy + xz + yz$$

Schrijf f_8 als compositie van functies uit de lijst op blz. 4.

9. We definiëren de functie f_9 met de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_9(x, 0) &= 1 \\ f_9(x, y + 1) &= \text{de rest van } 10 f_9(x, y) \text{ bij deling door } x + 1 \end{aligned}$$

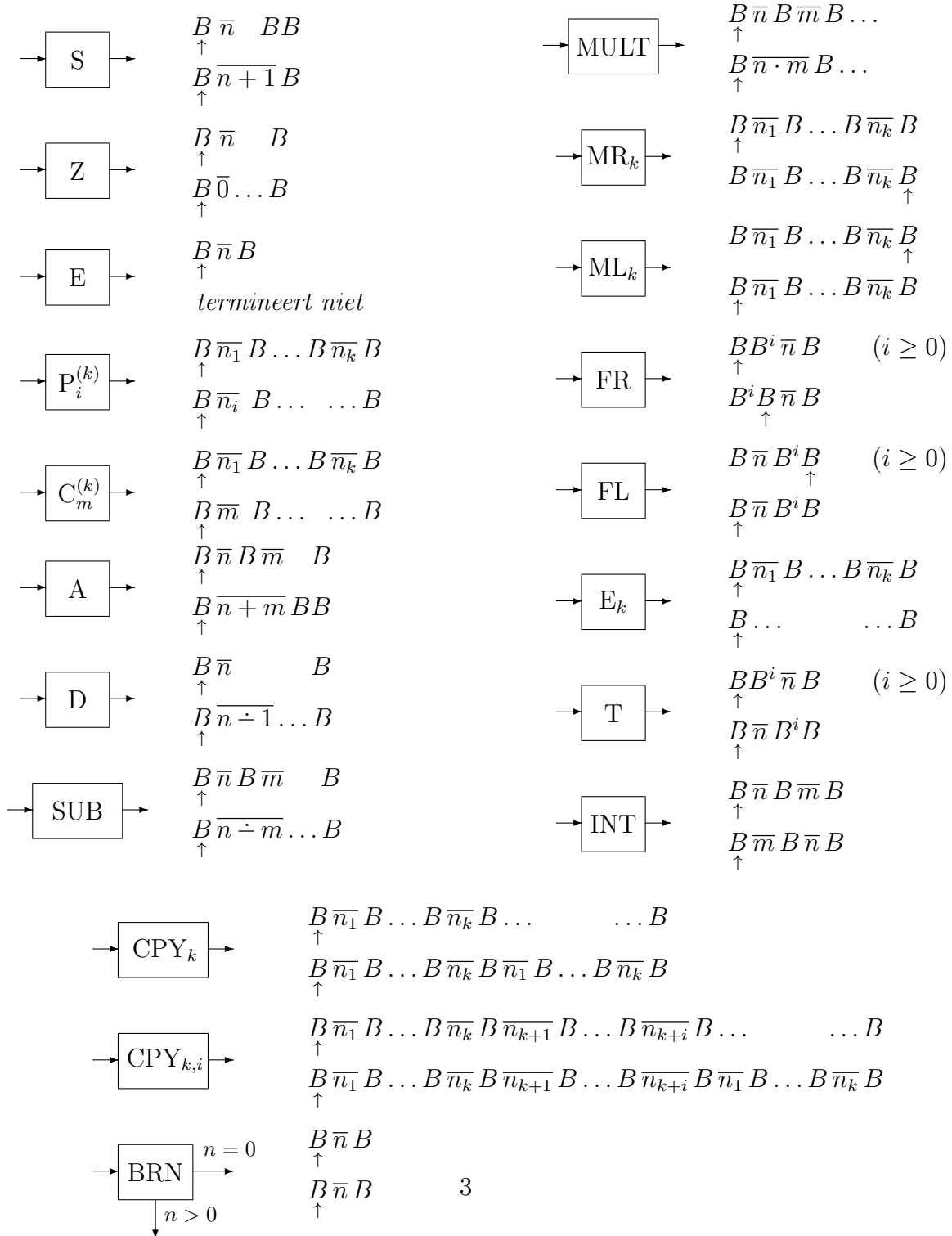
Bereken eerst $f_9(6, 3)$. Schrijf vervolgens f_9 in de vorm **primrec**(g, h), en geef g en h ook als compositie van functies uit de lijst op blz. 4.

10. Gegeven een primitief recursieve functie k van ariteit 2, definiëren we de functie f_{10} door:

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er } x' \text{ en } y' \text{ bestaan met } x \leq x' \leq y' \text{ en } k(x', y') \neq 0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat f_{10} een μ -recursieve functie is.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen



Codering van transitities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
\vdots	\vdots
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x . A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

	$id(x) = x$	
	$z(x) = 0$	
	$s(x) = x + 1$	
	$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$	
	$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$	
$pred(y) = y \dot{-} 1$	$eq(x, y) =$ als $x = y$ dan 1 anders 0	
$add(x, y) = x + y$	$ne(x, y) =$ als $x \neq y$ dan 1 anders 0	
$mult(x, y) = x \cdot y$	$max(x, y) =$ het maximum van x en y	
$sub(x, y) = x \dot{-} y$	$min(x, y) =$ het minimum van x en y	
$exp(x, y) = x^y$	$quo(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $\lfloor x/y \rfloor$ anders 0	
$fact(x) = x!$	$rem(x, y) =$ als $y \neq 0$ dan $x \bmod y$ anders x	
$sg(x) =$ als $x \neq 0$ dan 1 anders 0	$divides(x, y) =$ als $y \neq 0$ en $y \mid x$ dan 1 anders 0	
$cosg(x) =$ als $x \neq 0$ dan 0 anders 1	$even(x) =$ als x even is dan 1 anders 0	
$lt(x, y) =$ als $x < y$ dan 1 anders 0	$prime(x) =$ als x priem is dan 1 anders 0	
$gt(x, y) =$ als $x > y$ dan 1 anders 0	$pn(x) =$ het x -de priemgetal	
$le(x, y) =$ als $x \leq y$ dan 1 anders 0	(dus $pn(0) = 2$, $pn(1) = 3$, etc.)	
$ge(x, y) =$ als $x \geq y$ dan 1 anders 0		