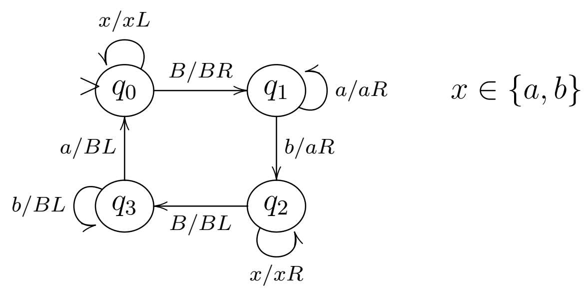
Berekenbaarheid 2014
Uitwerkingen Tentamen
19 januari 2015

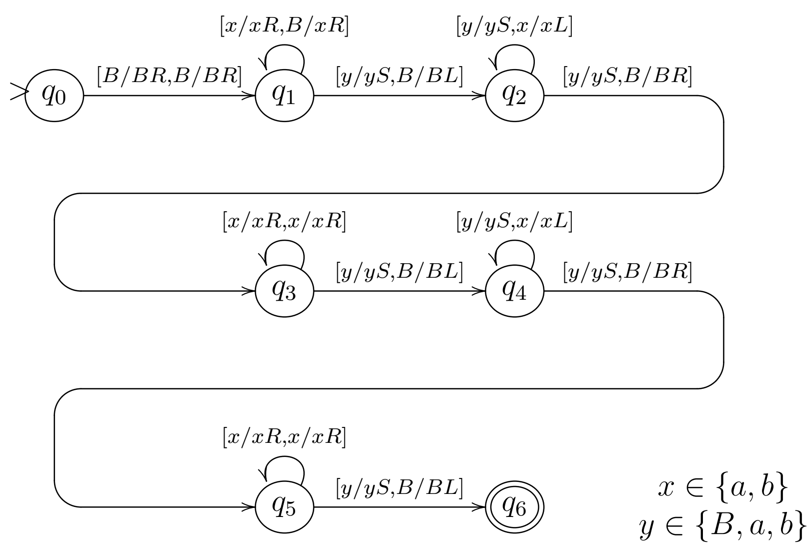
1. Geef een standaard Turing-machine M_1 met input alfabet $\Sigma = \{a, b\}$, die alle b's uit zijn input verwijdert en het resultaat aanschuift. Met input *abbab* moet de output dus *aa* zijn. Als je wil mag je hulpsymbolen gebruiken.



2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine die de taal

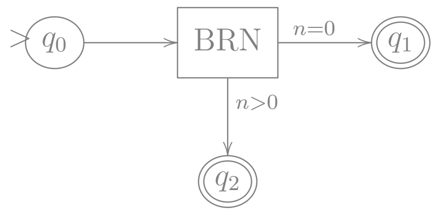
$$L_2 := \{uuu \mid u \in \{a, b\}^*\}$$

herkent door eindtoestand. Een correcte input van lengte n moet worden herkend in ten hoogste $2n + 6$ stappen.

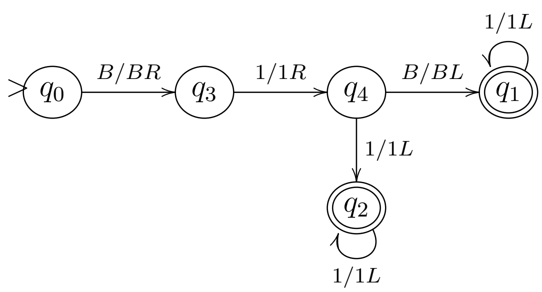


Een correcte input van lengte n is van de vorm uuu. Neem $m := |u|$, dan is $n = 3m$, ofwel $m = \frac{1}{3}n$. Het aantal stappen van deze machine is in dat geval $5m + 6 = \frac{5}{3}n + 6 \leq 2n + 6$.

3. Geef de macro



als Turing machine, dus met toestanden en transities.

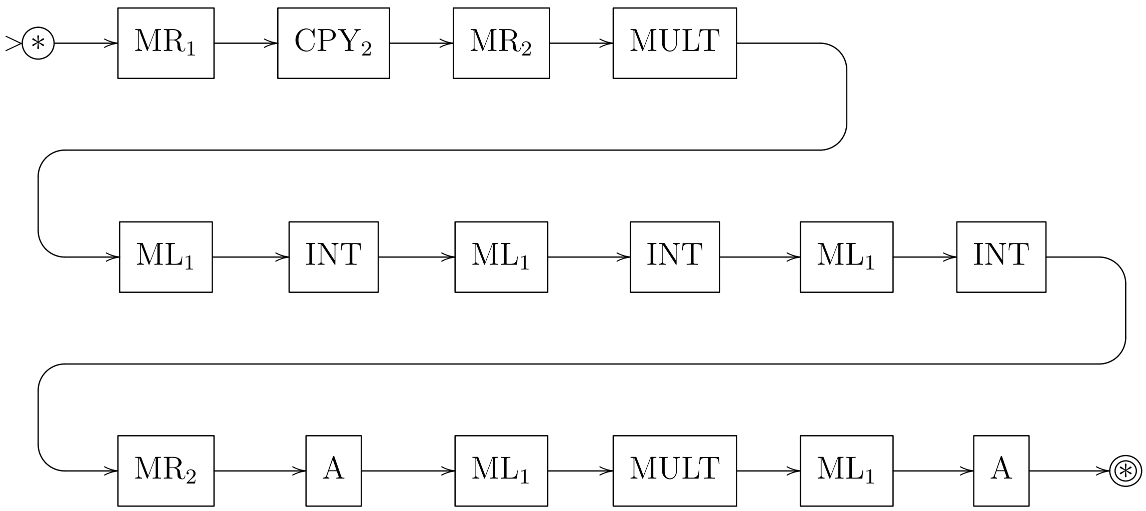


4. Geef een numerieke Turing-machine die de functie

$$f_4(x, y, z) := xy + xz + yz$$

uitrekent. Je mag gebruik maken van de macros op blz. 7.

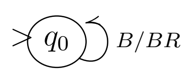
We gebruiken dat $xy + xz + yz = x(y + z) + yz$:



5. Geef een code van een Turing-machine $R(M_5)$, waarvoor geldt dat de universele Turing-machine U niet stopt wanneer de input $R(M_5)$ is. Zie blz. 8 voor een relevant stukje uit het boek van Sudkamp.

   $U(R(M_5)) = U(R(M_5)\lambda) = M_5(\lambda)$, dus we zoeken een machine die niet stopt met als input de lege tape. Een voorbeeld hiervan is:

   M_5 :

   De code van deze machine is:

   $$R(M_5) = 0001011101011101100 0$$

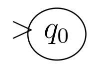
6. Laat zien dat het probleem P_6 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij een gegeven Turing-machine M oneindig veel verschillende inputs bestaan waarvoor M stopt.

   P_6 is equivalent aan de vraag of de taal $L(M)$ oneindig is. Dit valt dus onder de stelling van Rice, als dit probleem ook niet-triviaal is.

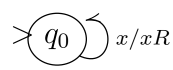
   Om dit laatste te laten zien moeten we twee machines geven, een machine M_{ja} die wel aan de eigenschap van P_6 voldoet, en een machine

M_{nee} die daar niet aan voldoet:

M_{ja} :



M_{nee} :



$x \in \{B, 0, 1\}$

Deze machines accepteren door stoppen, dus er geldt dat $L(M_{\mathsf{ja}}) = \{0,1\}^*$ inderdaad oneindig is, en dat $L(M_{\mathsf{nee}}) = \emptyset$ niet oneindig is.

7. Laat zien dat het probleem P_7 onbeslisbaar is dat vraagt of er bij gegeven een Turing-machine M een input bestaat waarbij de machine stopt met output 101.

   We bewijzen dit door het blank tape probleem B naar het probleem P_7 te reduceren. Hiertoe moet een effectieve procedure worden aangegeven om bij iedere Turing machine M een machine M' te maken zodat:

$$M(\lambda)\downarrow \iff \exists w \in \{0,1\}^* \, (M'(w) = 101)$$

   Een constructie die dit bereikt is door M' te definiëren als:

   (a) wis de tape
   (b) voer de machine M uit
   (c) wis de output van M
   (d) schrijf 101 op de tape

   (Een subtiliteit is hoe je bij stap (c) weet welk stuk van de tape beschreven is. De makkelijkste manier is eerst M' als 2-spoor machine te maken, waarin bij stap (b) wordt bijgehouden welke vakjes op de tape tijdens de berekening zijn langsgekomen, en daarna M' om te zetten in een corresponderende 1-spoor machine. Als deze subtiliteit niet is opgemerkt of opgelost, zijn hier geen punten voor afgetrokken.)

8. We definiëren een functie:

$$f_8(x, y, z) = xy + xz + yz$$

   Schrijf f_8 als compositie van functies uit de lijst op blz. 8.

$$f_8 = \mathsf{add} \circ (\mathsf{add} \circ (\mathsf{mult} \circ (p_1^{(3)}, p_2^{(3)}), \mathsf{mult} \circ (p_1^{(3)}, p_3^{(3)})), \mathsf{mult} \circ (p_2^{(3)}, p_3^{(3)}))$$

9. We definiëren de functie f_9 met de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} f_9(x,0) &= 1 \\ f_9(x,y+1) &= \text{de rest van } 10\, f_9(x,y) \text{ bij deling door } x+1 \end{aligned}$$

Bereken eerst $f_9(6,3)$. Schrijf vervolgens f_9 in de vorm $\textbf{primrec}(g,h)$, en geef g en h ook als compositie van functies uit de lijst op blz. 8.

$f_9(6,3) = 6$ want:

$$\begin{aligned} f_9(6,0) &= 1 \\ f_9(6,1) &= \text{de rest van 10 bij deling door } 7 = 3 \\ f_9(6,2) &= \text{de rest van 30 bij deling door } 7 = 2 \\ f_9(6,3) &= \text{de rest van 20 bij deling door } 7 = 6 \end{aligned}$$

Voorts zijn de recursievergelijkingen geschreven met de functies van blz. 8:

$$\begin{aligned} f_9(x,0) &= 1 \\ f_9(x,y+1) &= \mathsf{rem}(10 f_9(x,y), s(x)) \end{aligned}$$

Dus geldt voor g en h:

$$\begin{aligned} g(y) &= 1 \\ h(x,y,w) &= \mathsf{rem}(10w, s(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= c_1^{(1)} \\ h &= \mathsf{rem} \circ (\mathsf{mult} \circ (c_{10}^{(3)}, p_3^{(3)}), s \circ p_1^{(3)}) \end{aligned}$$

Ofwel

$$f_9 = \textbf{primrec}\big(c_1^{(1)}, \mathsf{rem} \circ (\mathsf{mult} \circ (c_{10}^{(3)}, p_3^{(3)}), s \circ p_1^{(3)})\big)$$

10. Gegeven een primitief recursieve functie k van ariteit 2, definiëren we de functie f_{10} door:

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als er } x' \text{ en } y' \text{ bestaan met } x \leq x' \leq y' \text{ en } k(x',y') \neq 0 \\ \uparrow & \text{anders} \end{cases}$$

Laat zien dat f_{10} een μ-recursieve functie is.

Dit volgt uit het feit dat f_{10} te schrijven is als:

$$f_{10}(x) = c_1^{(1)}(\mu y'. \sum_{x'=x}^{y'} k(x', y'))$$

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

S	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
Z	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\ldots B$
E	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\mathrm{P}_i^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
$\mathrm{C}_m^{(k)}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;\;B\ldots\quad\ldots B$
A	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
D	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} 1}\ldots B$
SUB	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \mathbin{\dot{-}} m}\ldots B$
MULT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\ldots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\ldots$
MR_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
ML_k	$B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
FR	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
FL	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
E_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\ldots\qquad\ldots B$
T	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad(i\geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
INT	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
CPY_k	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
$\mathrm{CPY}_{k,i}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\ldots\qquad\ldots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\ldots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\ldots B\,\overline{n_k}\,B$
BRN ($n=0$; $n>0$)	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x+1 \\
p_i^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1,\ldots,x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \mathbin{\dot{-}} 1 \\
\mathsf{add}(x,y) &= x+y \\
\mathsf{mult}(x,y) &= x\cdot y \\
\mathsf{sub}(x,y) &= x \mathbin{\dot{-}} y \\
\mathsf{exp}(x,y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x\neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x,y) &= \text{als } x<y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x,y) &= \text{als } x>y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x,y) &= \text{als } x\leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x,y) &= \text{als } x\geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x,y) &= \text{als } x=y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x,y) &= \text{als } x\neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x,y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x,y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y\rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x,y) &= \text{als } y\neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0)=2,\ \mathsf{pn}(1)=3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$