

Berekenbaarheid 2015

Toets 3

20 oktober 2015

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Het cijfer voor deze toets is de som van de punten voor de vier opgaven, plus nog 1 gratis punt. In de laatste twee opgaven mag je gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. Veel succes!

1. We definiëren: (2½ punten)

$$f_1 := \text{add} \circ (\text{exp}, \text{exp} \circ (p_2^{(2)}, p_1^{(2)}))$$

Bereken de waarde van $f_1(2, 3)$ en leg uit hoe je aan dit antwoord bent gekomen.

2. Laat *direct uit de definitie van primitief recursieve functies* zien dat de vermenigvuldigingsfunctie **mult** primitief recursief is. Je mag hierbij de nulfunctie z als een basisfunctie beschouwen. Schrijf **mult** ook in een vorm: (2½ punten)

$$\text{mult} = \dots$$

(Hint: laat eerst zien dat **add** primitief recursief is. Bepaal bij iedere primitief recursieve definitie het recursieschema en de functies g en h .)

3. Een getal heet *perfect* als het de som is van zijn delers behalve zichzelf. De eerste twee perfecte getallen zijn 6 en 28 want $6 = 1 + 2 + 3$ en $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. We definiëren de functie **isperfect** door: (2 punten)

$$\text{isperfect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \text{ een perfect getal is} \\ 0 & \text{als } x \text{ geen perfect getal is} \end{cases}$$

Laat zien dat **isperfect** een primitief recursieve functie is.

4. We definiëren **perfect**(x) als het x -de perfecte getal, tellend vanaf nul, dus **perfect**(0) = 6 en **perfect**(1) = 28. Als er maar eindig veel perfecte getallen bestaan (het is onbekend of dat zo is), dan is **perfect**(x) voor te grote x ongedefinieerd. (2 punten)

Laat zien dat **perfect** een μ -recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functie **isperfect** uit de vorige opgave primitief recursief is.

Primitief recursieve functies

$$\text{id}(x) = x$$

$$z(x) = 0$$

$$s(x) = x + 1$$

$$p_i^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = x_i$$

$$c_n^{(k)}(x_1, \dots, x_k) = n$$

$\text{pred}(y) = y \dot{-} 1$	$\text{eq}(x, y) = \text{als } x = y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$\text{add}(x, y) = x + y$	$\text{ne}(x, y) = \text{als } x \neq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$\text{mult}(x, y) = x \cdot y$	$\text{max}(x, y) = \text{het maximum van } x \text{ en } y$
$\text{sub}(x, y) = x \dot{-} y$	$\text{min}(x, y) = \text{het minimum van } x \text{ en } y$
$\text{exp}(x, y) = x^y$	$\text{quo}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders } 0$
$\text{fact}(x) = x!$	$\text{rem}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x$
$\text{sg}(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$\text{divides}(x, y) = \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \mid x \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$
$\text{cosg}(x) = \text{als } x \neq 0 \text{ dan } 0 \text{ anders } 1$	$\text{even}(x) = \text{als } x \text{ even is dan } 1 \text{ anders } 0$
$\text{lt}(x, y) = \text{als } x < y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$\text{prime}(x) = \text{als } x \text{ priem is dan } 1 \text{ anders } 0$
$\text{gt}(x, y) = \text{als } x > y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	$\text{pn}(x) = \text{het } x\text{-de priemgetal}$
$\text{le}(x, y) = \text{als } x \leq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	(dus $\text{pn}(0) = 2$, $\text{pn}(1) = 3$, etc.)
$\text{ge}(x, y) = \text{als } x \geq y \text{ dan } 1 \text{ anders } 0$	