Berekenbaarheid 2016
Hertentamen
13 maart 2017

Voor je verder leest, schrijf je naam, studentnummer en studierichting op het antwoordvel. Er zijn 10 opgaven die ieder 9 punten opleveren, de eerste 10 punten zijn gratis, en het cijfer voor het tentamen is het aantal punten gedeeld door 10. Pas op: bij een aantal opgaven wordt je gevraagd het antwoord te verklaren, vergeet dit niet!

Turing-machines moeten altijd gegeven worden door middel van een toestandsdiagram met rondjes en pijlen, en dus *niet* als een tabel. In alle Turing-machines mogen hulpsymbolen worden gebruikt.

Veel succes!

1. Geef een standaard Turing-machine M_1 die de volgende taal herkent door eindtoestand:
$$L_1 := \{a^n b^m c^{n+m} \mid n \geq 0,\ m \geq 0\}$$
Er geldt bijv. dat $aaabbbbccccccc = a^3b^4c^7 \in L_1$. Merk op dat ook $\lambda = a^0b^0c^0 \in L_1$.

2. Geef een non-deterministische 2-tape Turing-machine M_2 die de volgende taal herkent door eindtoestand:
$$L_2 := \{(uu^R)^n \mid u \in \{a,b\}^*,\ n \geq 2\}$$
Er geldt bijv. dat $abbaabbaabba = ((ab)(ab)^R)^3 \in L_2$. Zorg ervoor dat een woord $w \in L_2$ wordt herkend in hoogstens $2|w| + 5$ stappen.

3. Geef een numerieke Turing-machine M_3 die de functie f_3 uitrekent die gegeven is door:
$$f_3(n, m) = n^m + m^n$$
Je mag gebruik maken van de macro's op pagina 3 van dit tentamen. Merk op dat er geen macro voor exponentiatie in deze lijst voorkomt. Als je wil mag je eerst eigen numerieke macro's definiëren om in je machine te gebruiken.

4. Gegeven de code
$$R(M_4) = 000101110110111011001101010110100110110101010000$$
Wat is het gedrag van de berekening $U(R(U)R(M_4)R(U))$, waarbij U een universele Turing-machine is met code $R(U)$? Verklaar je antwoord. Zie pagina 4 voor een relevant citaat uit het boek van Sudkamp.

5. Is het volgende probleem P_5 onbeslisbaar?

Input: Een code $R(M)$ van een Turing-machine M.
Vraag: Bevat de taal $L(M)$ een code $R(M')$ van een Turing-machine M' met $L(M') = L(M)$?

Zo ja, laat zien dat dit zo is. Zo nee, verklaar waarom dit niet zo is.

6. Laat zien dat het volgende probleem P_6 onbeslisbaar is:

Input: $R(M_1)R(M_2)$ met $R(M_1)$ en $R(M_2)$ codes van Turing-machines.
Vraag: Bevat de taal $L(M_1)$ de code $R(M_2)$?

7. Leg uit hoe de verzameling van primitief recursieve functies de verzameling van μ-recursieve functies, en de verzameling van totale numerieke functies gedefinieerd zijn, en geef aan hoe deze drie verzamelingen gerelateerd zijn door middel van een Venn- of Euler-diagram.

8. Geef numerieke functies f_8, g_8 en h_8 zodat:

$$\begin{aligned} f_8 \circ (g_8, h_8) &= p_1^{(1)} \\ g_8 \circ f_8 &= c_0^{(2)} \\ h_8 \circ f_8 &= \mathsf{add} \end{aligned}$$

Zie pagina 4 voor de definities van de functies in deze opgave. Verklaar je antwoord, en geef ook van ieder van deze drie functies de ariteit.

9. We definiëren de 'super-exponentiatie' functie f_9 als:

$$f_9(x) = \underbrace{2^{2^{2^{\cdots^{2}}}}}_{x \text{ tweeën}}$$

Er geldt bijv. $f_9(0) = 1$, $f_9(1) = 2$, $f_9(2) = 2^2 = 4$, en $f_9(3) = 2^{2^2} = 16$. Geef functies g_9 en h_9 zodat:

$$f_9 = \textbf{primrec}(g_9, h_9)$$

en schrijf deze functies als compositie van functies op pagina 4.

10. De 'super-logaritme' functie f_{10} is gedefinieerd door:

$$f_{10}(x) = \begin{cases} y & \text{als } f_9(y) \le x < f_9(y+1) \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

waarin f_9 de functie uit de vorige opgave is. Er geldt bijv. dat $f_{10}(10^{100}) = 4$ want $2^{2^{2^2}} \le 10^{100} < 2^{2^{2^{2^2}}}$. Laat zien dat f_{10} primitief recursief is.

Je mag gebruiken dat de functies of pagina 4 primitief recursief zijn, en dat begrensde operatoren toegepast op expressies met alleen primitief recursieve functies weer primitief recursieve functies definiëren.

Macro's voor Turing-machines voor numerieke berekeningen

$\rightarrow \boxed{\mathrm{S}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad BB$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+1}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{Z}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{0}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	*termineert niet*
$\rightarrow \boxed{\mathrm{P}_i^{(k)}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_i}\;B\dots\quad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{C}_m^{(k)}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\;B\dots\quad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{A}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n+m}\,BB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{D}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\qquad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \dot{-} 1}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{SUB}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\quad B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n \dot{-} m}\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{MULT}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B\dots$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n\cdot m}\,B\dots$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{MR}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{ML}_k} \rightarrow$	$B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,\underset{\uparrow}{B}$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{FR}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i \geq 0)$	$B^i\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{FL}} \rightarrow$	$B\,\overline{n}\,B^i\underset{\uparrow}{B}\qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{E}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\dots\qquad\dots B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{T}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}B^i\,\overline{n}\,B\qquad (i \geq 0)$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B^iB$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{INT}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B\,\overline{m}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{m}\,B\,\overline{n}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_k} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{CPY}_{k,i}} \rightarrow$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\dots\qquad\dots B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B\,\overline{n_{k+1}}\,B\dots B\,\overline{n_{k+i}}\,B\,\overline{n_1}\,B\dots B\,\overline{n_k}\,B$
$\rightarrow \boxed{\mathrm{BRN}} \xrightarrow{n=0}$, $\downarrow n > 0$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$	$\underset{\uparrow}{B}\,\overline{n}\,B$

Codering van transities

Symbol	Encoding
0	1
1	11
B	111
q_0	1
q_1	11
$\vdots$	$\vdots$
q_n	1^{n+1}
L	1
R	11

Let $en(x)$ denote the encoding of a symbol x. A transition $\delta(q_i, x) = [q_j, y, d]$ is encoded by the string

$$en(q_i)0en(x)0en(q_j)0en(y)0en(d).$$

Primitief recursieve functies

$$\begin{aligned}
\mathsf{id}(x) &= x \\
z(x) &= 0 \\
s(x) &= x + 1 \\
p_i^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= x_i \\
c_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) &= n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{pred}(y) &= y \dot{-} 1 \\
\mathsf{add}(x, y) &= x + y \\
\mathsf{mult}(x, y) &= x \cdot y \\
\mathsf{sub}(x, y) &= x \dot{-} y \\
\mathsf{exp}(x, y) &= x^y \\
\mathsf{fact}(x) &= x! \\
\mathsf{sg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{cosg}(x) &= \text{als } x \neq 0 \text{ dan 0 anders 1} \\
\mathsf{lt}(x, y) &= \text{als } x < y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{gt}(x, y) &= \text{als } x > y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{le}(x, y) &= \text{als } x \leq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ge}(x, y) &= \text{als } x \geq y \text{ dan 1 anders 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{eq}(x, y) &= \text{als } x = y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{ne}(x, y) &= \text{als } x \neq y \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{max}(x, y) &= \text{het maximum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{min}(x, y) &= \text{het minimum van } x \text{ en } y \\
\mathsf{quo}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } \lfloor x/y \rfloor \text{ anders 0} \\
\mathsf{rem}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ dan } x \bmod y \text{ anders } x \\
\mathsf{divides}(x, y) &= \text{als } y \neq 0 \text{ en } y \,|\, x \text{ dan 1 anders 0} \\
\mathsf{even}(x) &= \text{als } x \text{ even is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{prime}(x) &= \text{als } x \text{ priem is dan 1 anders 0} \\
\mathsf{pn}(x) &= \text{het } x\text{-de priemgetal} \\
& \text{(dus } \mathsf{pn}(0) = 2,\ \mathsf{pn}(1) = 3, \text{ etc.)}
\end{aligned}$$