Berekenbaarheid 2016
Uitwerkingen Toets 3
10 januari 2017

1. (a) Geef functies f_1, f_2 en f_3 zo dat geldt: (1 punt)

$$f_1 \circ (f_2, f_3) = s$$
$$f_1 \circ (f_3, f_2) = e$$

Hierin zijn s en e respectievelijk de successor-functie en de lege functie, dus $s(x) = x + 1$ en $e(x)\uparrow$ voor alle $x \in \mathbb{N}$.

Een mogelijke oplossing is:

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \uparrow & \text{als } x = 0 \\ x & \text{als } x > 0 \end{cases}$$
$$f_2 = s$$
$$f_3 = z$$

Merk op dat

$$f_1 = p_1^{(2)}$$
$$f_2 = s$$
$$f_3 = e$$

niet werkt, omdat functie-applicatie strict is en daarom $f_1 \circ (f_2, f_3) = e$.

(b) Wat zijn de ariteiten van deze drie functies? (1 punt)

f_1 heeft ariteit 2 en f_2 en f_3 hebben ariteit 1.

2. Wat is de definitie van het begrip 'primitief recursieve functie'? (1 punt)

De verzameling primitief recursieve functies zijn precies die functies die je kan maken met:

- De basisfuncties: $c_0^{(0)}$, s en $p_i^{(k)}$ voor iedere i en k met $1 \leq i \leq k$.
- Functiecompositie.
- Primitieve recursie.

3. We definiëren de functie $f_4(x)$ door de recursievergelijkingen:

$$f_4(x, 0) = 1$$
$$f_4(x, y + 1) = f_4(x, y) + xy + 1$$

Er geldt bijvoorbeeld $f_4(4, 32) = 2017$.

(a) Bereken $f_4(2,2)$ en verklaar hoe je aan het antwoord bent gekomen. (1 punt)

$$f_4(2,2) = 5$$

want:

$$\begin{aligned} f_4(2,0) &= 1 \\ f_4(2,1) &= f_4(2,0) + 2 \cdot 0 + 1 = 1 + 0 + 1 = 2 \\ f_4(2,2) &= f_4(2,1) + 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 5 \end{aligned}$$

(b) Geef functies g_4 en h_4 zodanig dat (2 punten)

$$f_4 = \textbf{primrec}(g_4, h_4)$$

Schrijf g_4 en h_4 als compositie van functies uit de lijst op de achterkant van dit blaadje.

$$\begin{aligned} g_4 &= c_1^{(1)} \\ h_4 &= s \circ \mathsf{add} \circ (p_3^{(3)}, \mathsf{mult} \circ (p_1^{(3)}, p_2^{(3)})) \end{aligned}$$

4. We definiëren de functie f_5 door:

$$f_5(x,y) = \begin{cases} \lfloor \sqrt[x]{y} \rfloor & \text{als } x > 0 \\ \uparrow & \text{als } x = 0 \end{cases}$$

Hierin betekent $\lfloor \ldots \rfloor$ dat naar beneden wordt afgerond. Als $z^x \leq y < (z+1)^x$ dan $f_5(x,y) = z$. Zo geldt bijvoorbeeld dat $f_5(3,9) = \lfloor \sqrt[3]{9} \rfloor = \lfloor 2,08008382\ldots \rfloor = 2$, en dat klopt met $2^3 = 8 \leq 9 < 3^3 = 27$.

(a) Laat zien dan f_5 een μ-recursieve functie is. Je mag gebruiken dat de functies op de achterkant van dit blaadje primitief recursief zijn. (2 punten)

Dit volgt uit het feit dat de definitie van f_5 te schrijven is als

$$f_5(x,y) = \mu z.[\mathsf{le}(z^x, y) \cdot \mathsf{lt}(y, (z+1)^x)]$$

(b) Is f_5 ook primitief recursief? Verklaar je antwoord. (1 punt)

Nee, want f_5 is niet totaal, want bijvoorbeeld $f_5(0,0) \uparrow$, en primitief recursieve functies zijn altijd totaal.