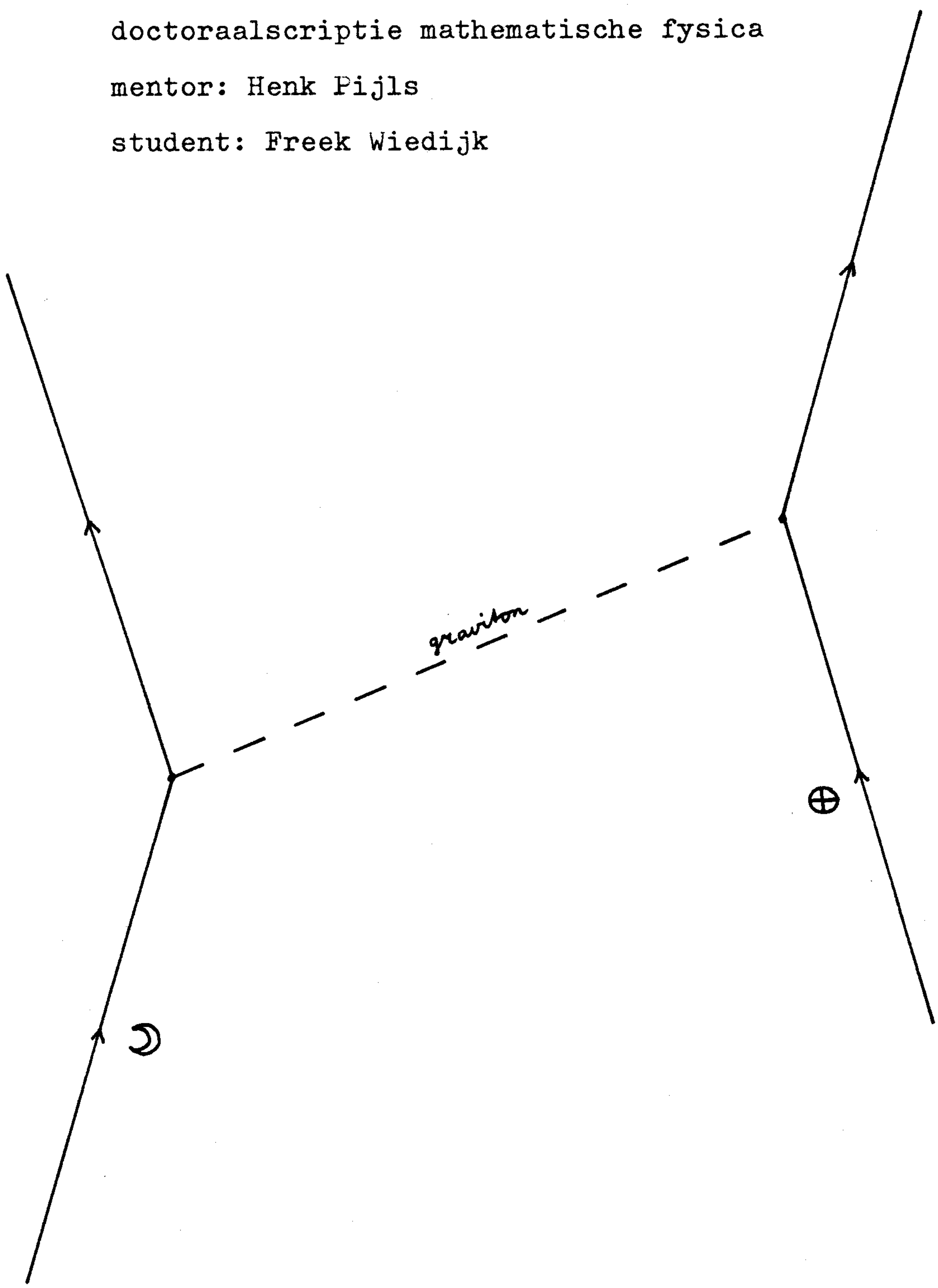
Conforme supergravitatie zonder constraints

doctoraalscriptie mathematische fysica

mentor: Henk Pijls

student: Freek Wiedijk



"At this point we wish to emphasize that the fact that the spin rotations and Lorentz transformations are related is entirely based on experimental observations. From a theoretical viewpoint there is no a priori reason why this should be so."

"This last restriction is quite essential to prevent certain absurdities - without it we should have

$$(1-\omega)+(\omega-\omega^2)+(\omega^2-\omega^3)+\cdots = 1,$$

in which an infinite sequence of negative numbers has positive sum."

Inhoud

I Introductie

Toen ik na bestudering van [de Wit, 1981], het artikel [Trautman] las dacht ik "zo zou ik het niet doen". Aan die gedachte dankt deze scriptie haar bestaan.

Er zijn drie soorten theorieën die de naam ijktheorieën verdienen:

(i) Yang-Mills theorieën,

(ii) (super-) gravitatie theorieën met zogenaamde conventional constraints op de velden,

(iii) (super-) gravitatie theorieën zonder dergelijke constraints.

Theorieën uit de laatste twee klassen komen in paren voor: bij iedere theorie met constraints hoort er één zonder, en vice versa. In [de Wit, 1981] en [de Wit, 1982] wordt een methode beschreven om gegeven een Yang-Mills theorie daarbij een gravitatie theorie met constraints te construeren. Deze scriptie modificeert dezelfde Yang-Mills theorie tot de corresponderende gravitatietheorie zónder de constraints die bij de Wit nodig zijn.

Normale gravitatie kent twee formuleringen: 2e orde en 1e orde formulering. 2e orde formulering is de normale formulering van gravitatie als theorie van het Riemann-oppervlak, en 1e orde formulering wordt ook wel het Palatini-formalisme genoemd. In deze scriptie zullen we de 2e orde vorm van gravitatie Einstein gravitatie, en de 1e orde vorm Einstein-Cartan gravitatie noemen. Deze twee theorieën vormen het prototype van corresponderende gravitatietheorieën met, respectievelijk zonder, constraints. [Trautman] geeft een vezelbundelformulering van Einstein-Cartan gravitatie, maar staat daarbij verder af van de vezelbundel beschrijving van Yang-Mills theorie dan de (equivalente) beschrijving hier, van Einstein-Cartan gravitatie in termen van vezelbundels.

Er bestaan veel parallelen tussen Yang-Mills theorie en gravitatie. Vaak tref je dan ook lijstjes aan met in twee kolommen corresponderende begrippen uit een Yang-Mills theorie en een gravitatie theorie. Een voorbeeld hiervan uit [Misner] (box 15.1 H/I):

<u>Electrodynamics</u>

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & \\ F = dA \arrow[r] \arrow[d] & {}^*F \arrow[d] \\ dF = 0 & d^*F = 4\pi {}^*J \arrow[d] \\ & d^*J = 0 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{d^*J = 0,\ \nabla \cdot J = 0}$$

<u>Geometrodynamics</u>

$$\begin{tikzcd} g \arrow[d] & & \\ \nabla = d \arrow[d] & & \\ \mathcal{R} = d^2 \arrow[r] \arrow[d] & G = {}^*R^* \arrow[r] & {}^*G = 8\pi {}^*T \arrow[d] \\ d\mathcal{R} = 0 & & d^*G = 0 \end{tikzcd}$$

$$\boxed{d^*T = 0,\ \nabla \cdot T = 0}$$

figuur (I.1)

Om deze reden duidt men beide soorten theorieën vaak aan als ijktheorieën. Toch gaat het meer om analogieën, dan dat beide soorten theorieën een speciaal geval zijn van een algemener concept.

Toch geven veel auteurs een beschrijving van gravitatie als ijktheorie, of, omdat het wiskundige object bij Yang-Mills theorie de vezelbundel is, gravitatie als vezelbundeltheorie. Het is verbazingwekkend hoe uiteenlopend dergelijke beschrijvingen zijn. Er is echter in zowel ijktheorieën als vezelbundeltheorieën een element waarmee dergelijke theorieën makkelijk te classificeren zijn: een groep. Uit de overzichtsartikelen [Basombrío] en [Ivanenko] heb ik de verschillende groepen (bij Einstein (-Cartan) gravitatie) eens geinventariseerd en in een diagram gerangschikt:

<u>in inclusiediagram</u>	<u>Basombrío</u>	<u>Ivanenko</u>
T(4)	T(4)	
SO(3,1)	O(1,3)	$\boxed{\mathrm{SO}(3,1)}$
M		M
GL(4)	GL(4)	GL(4,R)
$\boxed{\mathrm{T}(4) \rtimes \mathrm{SO}(3,1)}$	IO(1,3)	P
$\mathrm{T}(4) \rtimes \mathrm{GL}(4)$	IGL(4)	GA(4,R)
T(4) × SO(3,1)	T(4) × O(1,3)	
T(4) × GL(4)	$\boxed{\mathrm{T}(4) \times \mathrm{GL}(4)}$	
SO(4,1)		SO(4,1)
GL(5)		GL(5,R)

<u>Inclusies</u>

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T}(4) \times \mathrm{SO}(3,1) \arrow[rr] & & \mathrm{T}(4) \times \mathrm{GL}(4) \\
\mathrm{T}(4) \arrow[ur] \arrow[dr] & \mathrm{SO}(3,1) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & M \arrow[r] & \mathrm{GL}(4) \arrow[u] \arrow[d] \\
 & \mathrm{T}(4) \rtimes \mathrm{SO}(3,1) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathrm{T}(4) \rtimes \mathrm{GL}(4) \arrow[d] \\
 & \mathrm{SO}(4,1) \arrow[rr] & & \mathrm{GL}(5)
\end{tikzcd}
$$

figuur (I.2)

(Hierin is M het product van de Lorentzgroep, en de dilatatiegroep, en heb ik de respectievelijke voorkeuren van Basombrío en Ivanenko omlijnd)
De meeste van de theorieën die met deze groepen corresponderen hebben als eigenschap dat ze voor die ene groep gemaakt zijn: Er wordt geen algemeen mechanisme gegeven om bij een symmetriegroep van ruimtetijd een gravitatie theorie te construeren.
In [de Wit, 1981], [de Wit, 1982] en hier worden ook een stel groepen (met inclusies daartussen) bekeken, maar nu

correspondeert wel systematisch iedere groep met een gravitatietheorie:

Inclusies

$$\begin{array}{l}\text{Poincarégroep}\\ \downarrow\\ \text{conforme groep}\\ \downarrow\\ \text{superconforme groep}\\ \quad N=1\\ \downarrow\\ \text{superconforme groep}\\ \quad N=2\\ \downarrow\\ \vdots\end{array}$$

figuur (I.3)

In deze scriptie is Einstein-Cartan theorie de ijktheorie van de Poincarégroep. Artikelen waarin dit gezichtspunt ook wordt gepresenteerd zijn:

(i) [Kibble]. Dit is het standaard artikel over dit onderwerp. Vooral aardig door de noot op pagina 216:
"By analogy with (2.6) we should expect the covariant derivative to have the form
$$\chi_{;k} = \delta_k{}^\mu \chi_{,\mu} + \tfrac{1}{2} A^{ij}{}_k S_{ij} \chi - A^\mu{}_k \partial_\mu \chi$$
Because of the appearance of derivatives, the first and last terms can be combined in the form $h_k{}^\mu \chi_{,\mu}$, where $h_k{}^\mu = \delta_k{}^\mu - A^\mu{}_k$."
Volgens de gemiddelde fysicus is met dit artikel het onderwerp eigenlijk afgesloten.

(ii) [Cho, 1976, 2]. Dit is vrijwel het gezichtspunt hier. Waar ik het niet mee eens ben is dat hij Einstein-gravitatie beschouwd als de ijktheorie van T(4), de translatiegroep van de Minkowskiruimte. Dit geeft namelijk aanleiding tot een verkeerde koppeling van gravitatievelden aan spinoren.

* * *

De inhoud van deze scriptie is volgens mij:

(a) <u>wiskundig waar</u>.
De beschrijving van transformatieregels in termen van infinitesimale transformaties is enigzins oppervlakkig, maar dermate standaard dat ik hem niet heb gemodificeerd (bijv. met ordesymbolen). Hij wordt in paragraaf 2 rigoreus onderbouwd.
De mogelijkheid om in paragraaf 10 een theorie van supergroepen, supervarieteiten en supervezelbundels te geven is niet aangegrepen (want een beetje buiten het onderwerp), maar er wordt ook niet echt gepretendeerd dat er zo iets überhaupt bestaat.

(b) <u>wiskundig oninteressant</u>.
In paragraaf 2 en paragraaf 7 worden wel wat resultaten over de objecten bij een ijktheorie bewezen, maar dit is meer om de parallel met de resultaten uit de conventionelere formulering duidelijk te maken. Het bewijzen hiervan is rechttoe, rechtaan.

(c) <u>fysisch waar</u>.
Deze scriptie geeft voor gewone gravitatie een beschrijving van Einstein-Cartan gravitatie (gecontrasteerd met de methode bij de Wit die Einstein-gravitatie oplevert). Einstein en Einstein-Cartan gravitatie zijn (nog) niet experimenteel onderscheidbaar, maar op esthetische gronden prefereren de meeste fysici de laatste als de meest plausibele gravitatietheorie.

(d) <u>fysisch oninteressant</u>.
De theorieën die in hoofdstuk IV worden geconstrueerd zijn (i) al bekend en (ii) te groot om ooit interessant te kunnen zijn (zie (10.4)). Fysici willen juist graag constraints (liefst als gevolg van de veldvergelijkingen) om de theorie irreducibel en dus hanteerbaar te houden.

Toch vind ik de constructie uit paragraaf 8 esthetischer dan die uit paragraaf 3.

Voordelen:

(i) Niet $e_\mu{}^a$ is het ijkveld, maar $e_\mu{}^a - \delta_\mu{}^a$. Dit heeft als gevolg dat in het vlakke geval alle ijkvelden nul zijn, en niet een stel juist één.

(ii) Algemene coördinatentransformaties vallen (op een index na) met geijkte translaties samen, in plaats van een ingewikkelde veldafhankelijke combinatie van alle ijktransformaties te zijn.

(iii) De transformatieregels zijn intrinsiek en worden niet door modificatie gevormd. In het laatste geval is het niet zo duidelijk wat de ongemodificeerde theorie betekent.

(iv) Er is geen keuze van een stel constraints, en een splitsing in onafhankelijke en afhankelijke velden nodig.

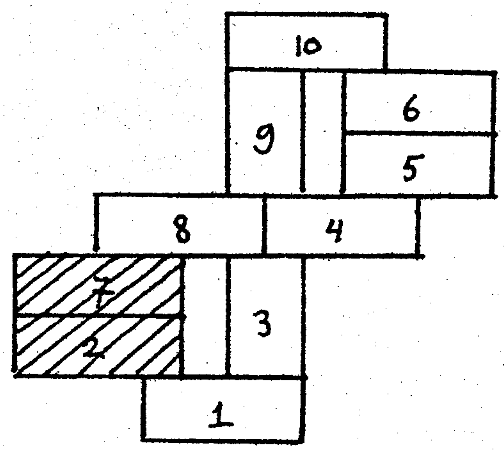
De prijs die hiervoor moet worden betaald is een niet voor de hand liggende definitie voor de componenten van wel voor de hand liggende abstract meetkundige objecten.

* * *

Van deze scriptie zijn paragraaf 1 en de paragrafen 3 tot en met 6 voor een groot deel overgeschreven uit [de Wit, 81] en [de Wit, 82] en komt paragraaf 2 voor een groot deel uit [Pijls]. Ik heb zoveel mogelijk de conventies van [de Wit, 82] en [Pijls] gevolgd.

De onderwerpen van de verschillende paragrafen blijken duidelijk uit de titels ervan. De kern van het idee achter deze scriptie staat in (7.1), (7.2) en (7.3). De afhankelijkheden tussen de verschillende paragrafen blijkt uit onderstaand diagram.

(Als in een paragraaf wordt voortgegaan op de stof in een andere paragraaf steunen de corresponderende blokjes op elkaar. De wiskundige paragrafen 2 en 7 zijn gearceerd, de fysische paragrafen niet.)



figuur (I.4)

II Yang-Mills theorie

1 Conventionele formulering

Het uitgangspunt van de constructie van een Yang-Mills theorie is een eindig-dimensionale Lie groep. De structuur hiervan wordt voor een groot deel bepaald door de commutatierelaties

$$[t_A, t_B] = f_{AB}{}^C\, t_C\,, \tag{1.1}$$

waarin de t_A de generatoren van de Lie-groep, de basiselementen van de bijbehorende Lie-algebra, zijn in een zekere representatie. De $f_{AB}{}^C$ heten de structuurconstanten van die Lie-algebra.

De Yang Mills theorie bij deze groep bestaat nu uit de ijkvelden of Yang Mills velden $W_\mu{}^A$. Deze ijkvelden transformeren onder infinitesimale ijktransformaties met ruimte-tijd afhankelijke parameters Λ^A als

$$\delta W_\mu{}^A = \partial_\mu \Lambda^A - f_{BC}{}^A\, W_\mu{}^B \Lambda^C\,. \tag{1.2}$$

Met de ijkvelden worden de krommingstensors of veldsterkten

$$R_{\mu\nu}{}^A = \partial_\mu W_\nu{}^A - \partial_\nu W_\mu{}^A - f_{BC}{}^A\, W_\mu{}^B W_\nu{}^C \tag{1.3}$$

gedefinieerd. Deze hebben als eigenschap covariant te transformeren als

$$\delta R_{\mu\nu}{}^A = - f_{BC}{}^A\, R_{\mu\nu}{}^B \Lambda^C\,. \tag{1.4}$$

Met behulp van de krommingstensor wordt tenslotte de Yang-

Mills Lagrangeaan en corresponderende veldvergelijkingen voor de ijkvelden gedefinieerd.

Een Yang-Mills theorie kan worden gekoppeld aan extra velden. Deze velden vormen op zich een theorie die de gegeven groep als globale symmetriegroep heeft. Deze bestaat uit de materievelden ϕ die waarden in de representatieruimte van de t_A hebben en dus transformeren als

$$\delta\phi = \Lambda^A t_A \phi . \tag{1.5}$$

Het toevoegen van de Yang-Mills velden kan dan gezien worden als een modificatie van de theorie waardoor de symmetrie locaal wordt. Hiertoe wordt de covariante afgeleide

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - W_\mu{}^A t_A \phi \tag{1.6}$$

gedefinieerd met als transformatie

$$\delta D_\mu \phi = \Lambda^A t_A D_\mu \phi \tag{1.7}$$

De covariante afgeleide is nu de bouwsteen voor de Lagrangeaan, en dus de veldvergelijking voor de ϕ en $W_\mu{}^A$ met locale symmetrie.

In het bovenstaande zijn de velden bosonisch, maar alles kan gegeneraliseerd worden om ook het fermionische geval in te sluiten. Normaal geldt dit alleen voor de materievelden die dan zowel commuterend als anticommuterend (Grassman variabelen) kunnen zijn. Voor supergravitatie moet echter ook de symmetrie fermionisch kunnen zijn. Hiertoe wordt de Liealgebra vervangen door een gegradeerde Liealgebra met gradering in $\mathbb{Z}_2 = \{+1,-1\}$* . In (1.1) treden dan naast commutatoren ook anti-commutatoren op. Bovendien zijn de Λ^A en $W_\mu{}^A$ dan net als de materievelden zowel commuterend als anti-commuterend.

2 Vezelbundels

(2.1) Definitie. Zij gegeven een Lie-groep G.
Een hoofdvezelbundel P met structuurgroep G of G-hoofdbundel wordt gedefinieerd als een C^∞-afbeelding

$$\pi : P \to M$$

van een C^∞-varieteit P, naar een C^∞-varieteit M, en een C^∞-rechtswerking

$$\begin{aligned} \delta : P \times G &\to P \\ (p,g) &\mapsto \delta(g)p \quad \text{met} \quad \delta(g)\,\delta(h) = \delta(hg) \text{ voor } g,h \in G, \end{aligned}$$

zodat (i) $\pi^{-1}(m)$ een baan is onder G voor iedere $m \in M$.
(ii) voor iedere $m \in M$ een omgeving N van m bestaat en een C^∞-afbeelding $s: N \to P$,
zodat (a) $\pi \circ s = \mathrm{id}_N$,
(b) de afbeelding

$$\begin{aligned} N \times G &\to \pi^{-1}[N] \\ (m,g) &\mapsto \delta(s(m),g) \end{aligned}$$

een diffeomorfisme is.

Laat $\pi : P \to M$ nu een G-hoofdbundel en laat $\mathfrak{g}$ de Lie-algebra van G.
Voor een gegeven element $p \in P$ is de afbeelding

$$\begin{aligned} G &\to P \\ g &\mapsto \delta(p,g) \end{aligned}$$

een diffeomorfisme van G op de vezel $\pi^{-1}(\pi p)$ van p.
We definiëren nu

$$\sigma_p : \mathfrak{g} \to T_p(P)$$

als de geïnduceerde afbeelding, een isomorfisme van $\mathfrak{g}$ op de deelruimte V_p van verticale raakvectoren in p.
Als $\Lambda \in \mathfrak{g}$ dan heet $p \mapsto \sigma_p(\Lambda)$ het fundamentele vectorveld bij Λ, notatie $\sigma(\Lambda)$.

(2.2) <u>Definitie</u>. Zij G een Lie-groep en $\pi: P \to M$ een G-hoofdbundel.
Een connectie op P wordt dan gedefinieerd als een $\mathfrak{g}$-waardige C^∞-1-vorm $\omega \in A^1(P, \mathfrak{g})$ met

(i) $\omega_p \circ \sigma_p = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$
(ii) $\delta(g)^* \omega = \mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega \qquad (g \in G)$.

Laat nu

$$h_p : T_p(P) \to T_p(P)$$

de horizontale projectie zijn gedefinieerd door

$$\begin{aligned} h_p(X) &= 0 \quad \text{als} \quad \pi_* X = 0 \quad \text{(X verticaal) en} \\ h_p(X) &= X \quad \text{als} \quad \omega_p X = 0 \quad \text{(X horizontaal).} \end{aligned}$$

Zij verder θ een n-vorm dan definiëren we de uitwendige covariante differentiaal (met betrekking tot de connectie ω) $D\theta$ door

$$D\theta\,(X_1, \ldots, X_{n+1}) := d\theta\,(hX_1, \ldots, hX_{n+1})$$

Hiermee definiëren we tenslotte de krommingsvorm van ω

$$\Omega := D\omega.$$

(2.3) <u>Stelling</u>. (correspondeert met (1.3))
Onder de voorwaarden van (2.2) geldt

$$\Omega = d\omega + \tfrac{1}{2}[\omega \wedge \omega].$$

met voor $\mathfrak{g}$-waardige 1-vormen θ_1, θ_2 de $\mathfrak{g}$-waardige 2-vorm $[\theta_1 \wedge \theta_2]$ gedefinieerd als

$$[\theta_1 \wedge \theta_2](X_1, X_2) := [\theta_1(X_1), \theta_2(X_2)] - [\theta_1(X_2), \theta_2(X_1)].$$

Bewijs. Te bewijzen: $\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$.
Dit is een lineaire relatie, dus mogen we X, Y horizontaal en verticaal afzonderlijk beschouwen.
Bovendien is het een tensorvergelijking: alleen de waarde van X en Y in een vast punt p zijn belangrijk.
We mogen dus aannemen dat $\omega(X)$, $\omega(Y)$ vast in $\mathfrak{g}$ zijn, en dan

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega[X, Y] = -\omega[X, Y].$$

Dus alternatief te bewijzen:

$\Omega(X, Y) = -\omega[X, Y] + [\omega(X), \omega(Y)]$ met $\omega(X)$, $\omega(Y)$ vast in $\mathfrak{g}$.

Twee gevallen:

(i) X, Y beide horizontaal:
$\Omega(X, Y) = d\omega(hX, hY) = d\omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)]$, want $\omega(X) = \omega(Y) = 0$.

(ii) X verticaal. Dan $\Omega(X, Y) = d\omega(hX, hY) = d\omega(0, hY) = 0$.
Verder mogen we om dezelfde reden dat we $\omega(X)$ vast mochten nemen in $\mathfrak{g}$, zelfs wel $X = \sigma(\Lambda)$ nemen voor $\Lambda = \omega_p(X_p)$.
Dus alleen nog te bewijzen: $\omega[\sigma(\Lambda), Y] = [\Lambda, \omega(Y)]$.

Er geldt nu: $\omega[\sigma(\Lambda), Y] = \omega(\mathcal{L}_{\sigma(\Lambda)}Y) =$ (2.2)(ii)
$\omega \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \delta(\exp(-t\Lambda))_* Y = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\delta(\exp(-t\Lambda))^* \omega) Y =$
$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(t\Lambda))\,\omega(Y) = [\Lambda, \omega(Y)]$. □

(2.4) Definitie. Zij $\pi: P \to M$ een G-hoofdbundel, en $N \subset M$ een open deelverzameling.
Onder een sectie van P op N verstaan we een C^∞-afbeelding

$$s: N \to P \qquad \text{met} \qquad \pi \circ s = \mathrm{id}_N.$$

Zij nu ω een connectie op P met krommingsvorm Ω.

We definieren nu bij een sectie s van P de $\mathfrak{g}$-waardige 1- en 2-vormen op N:

$$W := s^* \omega \,,$$
$$R := s^* \Omega \,.$$

(2.5) Stelling. (Correspondeert met (1.2) en (1.4))
Zij $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel, en $N \subset M$ open.
Zij verder $g: N \to G$ een C^∞-functie en s, s' secties van P op N met

$$s'(m) = \delta\,(s(m),\, g(m)) \qquad (m \in N).$$

Laat nu ω een connectie op P met krommingsvorm Ω en laat W, R en W', R' met s respectievelijk s' corresponderen.
Dan geldt:

$$W' = g^{-1}\,dg + Ad\,(g^{-1})\,W\,,$$
$$R' = \qquad\qquad Ad\,(g^{-1})\,R\,,$$

met

$$(g^{-1}dg)_m\, X_m := L_{g(m)^{-1}*}\, g_*\,(X_m) \in \mathfrak{g} \qquad m \in N,\ X \in T_m\,(M).$$

$$T_m\,(M) \xrightarrow[g_*]{} T_{g(m)}(G) \xrightarrow[L_{g(m)^{-1}*}]{} T_e(G) =$$

Bewijs.
(i) $s' = \delta\,(s,\, g) \Rightarrow s'_*\, X = \delta_*\,(s_*\,(X),\, g_*\,(X))$.
Er geldt $\delta_*\,(Z_1,\, Z_2) = \delta(g)_*\, Z_1 + \sigma_{s'(m)}\, L_{g(m)^{-1}*}\, Z_2$

$$\Rightarrow (s'_*\, X)_{s'(m)} = (\,\delta(g)_* s_*\, X)_{s'(m)} + \sigma_{s'(m)}\,((g^{-1}dg)\, X)_{s'(m)}$$
$$\Rightarrow (s'^*\omega)\, X = \omega\, s'_*\, X = (s^*\,\delta(g)^*\omega)\, X + (g^{-1}\,dg)\, X$$
$$\Rightarrow s'^*\,\omega = g^{-1}\,dg + Ad\,(g^{-1})\, s^*\omega$$
$$\Rightarrow W' = g^{-1}\,dg + Ad\,(g^{-1})\, W.$$

(ii) $\delta\,(g)^*\,\omega = Ad\,(g^{-1})\,\omega$ en $\Omega(X,\, Y) = X\,\omega(Y) - Y\,\omega(X) - \omega\,[X,\, Y] + [\,\omega X,\, \omega Y] \Rightarrow \delta\,(g)^*\Omega = Ad\,(g^{-1})\,\Omega$.
Nu is $(s'_*\, X)_{s'(m)} = (\,\delta(g)_* s_*\, X)_{s'(m)} + \sigma_{s'(m)}((g^{-1}dg)\, X)_{s(m}$

dus $s'_* X = \delta(g)_* s_* X$ + iets verticaals.
Verder is Ω van iets verticaals per definitie nul, dus
$\Omega(s'_* X, s'_* Y) = \Omega(\delta(g)_* s_* X, \delta(g)_* s_* Y) =$
$\mathrm{Ad}(g^{-1})\Omega(s_* X, s_* Y) \Rightarrow s'^*\Omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\, s^*\Omega \Leftrightarrow$
$R' = \mathrm{Ad}(g^{-1})\, R$. $\square$

(2.6) Definitie. Zij gegeven een C^∞-varieteit F en een C^∞-linkswerking van de Lie-groep G:

$$\rho : G \times F \to F$$
$$(g,f) \mapsto \rho(g)f \quad \text{met} \quad \rho(g)\rho(h) = \rho(gh) \text{ voor } g,h \in G.$$

Laat $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel dan noemen we de C^∞-afbeelding

$$\alpha : P \to F$$

equivariant als

$$\alpha \circ \delta(g) = \rho(g^{-1}) \circ \alpha \qquad \text{voor alle } g \in G.$$

Bij een equivariante afbeelding α en een sectie s van P op N definiëren we verder

$$\varphi : N \to F \qquad \text{door} \qquad \varphi := \alpha \circ s.$$

Laat nu F tevens een lineaire ruimte zijn. Dan is een equivariante afbeelding op te vatten als een 0-vorm op P met waarden in F. Beschouw daarom algemener een n-vorm α op P met waarden in F zodat

(i) α is horizontaal: $\alpha(X_1, \ldots, X_n) = \alpha(hX_1, \ldots, hX_n)$.
(ii) α is van type ρ : $\delta(g)^* \alpha = \rho(g^{-1}) \circ \alpha$ voor iedere vaste $g \in G$.

Gegeven een dergelijke α dan definiëren we bij een sectie s algemener

$$\varphi := s^* \alpha,$$

en dan is

$$\nabla\varphi := s^* D\alpha$$

een (n+1)-vorm op N met waarden in F, de uitwendige covariante afgeleide van φ bij s.

(2.7) Stelling. (correspondeert met (1.6))
Gegeven een α als in (2.6), dan geldt:

$$D\alpha = d\alpha + \rho_*\omega\wedge\alpha,$$

met

$$(\rho_*\omega\wedge\alpha)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}\ \rho_*(\omega X_i)\ \alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{n+1}),$$

$$\rho_*(\Lambda) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(t\Lambda)) : F \to F.$$

Bewijs. Het is voldoende twee gevallen te beschouwen:

(i) $X_1, \ldots, X_{n+1}$ horizontaal: triviaal.

(ii) $X_1 = \sigma(\Lambda)$ voor $\Lambda\in\mathfrak{g}$, $X_2, \ldots, X_{n+1}$ G-invariant, dat wil zeggen $\delta(g)_* X_i = X_i$ ($i=2,\ldots,n+1$, $g\in G$).
(het is duidelijk dat we dit mogen aannemen indien X_1 verticaal, en de andere willekeurig)
Nu is $D\alpha(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 0$, want $hX_1 = 0$.

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sum_{1\leq i\leq n} (-1)^{i+1} X_i\alpha(X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{n+1}) +$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{n+1})$$

$= \sigma(\Lambda)\alpha(X_2, \ldots, X_{n+1})$ want $\alpha(\ldots, X_1, \ldots) = 0$ en

$$[X_1, X_i] = \mathcal{L}_{\sigma(\Lambda)} X_i = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \delta(\exp -t\Lambda)_* X_i = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X_i = 0.$$
$(i=2,\ldots,n+1)$

Verder $(\rho_*\omega\wedge\alpha)(X_1, \ldots, X_{n+1}) =$
$\rho_*(\Lambda)\alpha(X_2, \ldots, X_{n+1})$ eveneens omdat $\alpha(\ldots, X_1, \ldots) = 0$

Laat nu $f\colon P \to F$, $p \mapsto \alpha_p((X_2)_p, \ldots, (X_{n+1})_p)$ dan is f equivariant:

$$f \circ \delta(g) = (\delta(g)^* \alpha)(\delta(g)_* X_2, \ldots, \delta(g)_* X_{n+1}) =$$
$$\rho(g^{-1})\alpha(X_2, \ldots, X_{n+1}) = \rho(g^{-1})\, f \quad \Rightarrow$$

$$d\alpha(X_1, \ldots, X_{n+1}) = \sigma(\Lambda)\, f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\delta(\exp t\Lambda))^* f =$$
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(-t\Lambda))\, f = -\rho_*(\Lambda) f =$$
$$-(\rho_* \omega \wedge \alpha)(X_1, \ldots, X_{n+1})$$ dus eveneens
$$(d\alpha + \rho_* \omega \wedge \alpha)(X_1, \ldots, X_{n+1}) = 0 \qquad \square$$

(2.8) <u>Stelling</u>. (correspondeert met (1.7))
Gegeven een α als in (2.6) en s, s' met $s' = \delta(s, g)$ als in (2.5). Laat verder $\nabla\varphi$ bij s en $(\nabla\varphi)'$ bij s' gedefinieerd zijn als in (2.6).
Dan geldt:

$$(\nabla\varphi)' = \rho(g^{-1})\, \nabla\varphi .$$

<u>Bewijs</u>. $\delta(g)^* \alpha = \rho(g^{-1})\alpha$ dus volgt uit (2.7) dat ook $\delta(g)^* D\alpha = \rho(g^{-1})\, D\alpha$. Nu is

$$(\nabla\varphi)' = s'^* D\alpha = s^* \delta(g)^* D\alpha = s^* \rho(g^{-1})\, D\alpha =$$
$$\rho(g^{-1})\, s^* D\alpha = \rho(g^{-1})\nabla\varphi . \qquad \square$$

* * *

(2.9) <u>Overzicht</u>. Een Yang-Mills theorie gekoppeld aan materievelden als in paragraaf 1 bestaat uit de velden $W_\mu{}^A$ en ϕ. Hieruit afgeleid worden de covariant transformerende velden $R_{\mu\nu}{}^A$ en $D_\mu\phi$.

Het object dat hiermee in paragraaf 2 correspondeert bestaat voor een zekere groep G uit:

(i) een G-hoofdbundel $\pi\colon P \to M$,
(ii) een connectie ω op P,
(iii) een equivariante afbeelding $\alpha\colon P \to F$.

Hieruit afgeleid worden de krommingsvorm Ω en de covariante differentiaal van α , $D\alpha$.

Gegeven een locale sectie s: $N \longrightarrow P$ corresponderen dan met ω, α, Ω, $D\alpha$ op N de objecten W, ϕ, R en $\nabla\phi$.

Bestaat er nu een coördinatenstelsel x^{μ} op N en is τ_A een basis van $\mathfrak{g}$, dan kunnen we de volgende identificaties maken:

paragraaf 2	paragraaf 1
F :	de representatieruimte uit paragraaf 1
$\rho_* (\tau_A) =$	t_A
$W =$	$-W_{\mu}{}^{A} \tau_A \, dx^{\mu}$
$\phi =$	ϕ
$R =$	$-\frac{1}{2} R_{\mu\nu}{}^{A} \tau_A \, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$
$\nabla\phi =$	$D_{\mu}\phi \, dx^{\mu}$
$g =$	$\exp(-\Lambda^A \tau_A)$

De laatste regel identificeert het overgaan van een sectie s op een sectie s' = S (s, g) met een ijktransformatie. Deze identificatie is pas exact indien we in de transformatie-regels van paragraaf 1 dat is (1.2), (1.4), (1.6) en (1.7), gelijkheid vervangen door gelijkheid tot op orde $\|\Lambda^A \tau_A\|^2$ (met $\| \cdot \|$ een norm in $\mathfrak{g}$). Dat is de betekenis van het woord infinitesimaal in de zin vóór (1.2).

III Gravitatie met constraints

3 Einstein gravitatie

Einstein gravitatie kan worden opgevat als de ijktheorie van de Poincarégroep. Normaal wordt deze groep altijd beschouwd als de symmetriegroep van de ruimtetijd. Hier wordt echter als uitgangspunt de Yang-Mills theorie van de Poincarégroep genomen, waarbij de groep dus een interne symmetriegroep is. Daarom zijn er in eerste instantie twee soorten indices: wereldindices μ, ν, ... als in iedere Yang-Mills theorie en Lorentzindices a, b, ... die corresponderen met de werking van de Poincarégroep als interne groep.

De constructie van de Yang-Mills theorie van de Poincarégroep verloopt als in paragraaf 1. De generatoren van de Poincarégroep heten $M_a{}^b$ (de generatoren van de Lorentztransformaties) en P_a (de generatoren van de translaties). Niet al deze generatoren zijn verschillend. Er geldt $M_{ab} = - M_{ba}$. Dientengevolge is de Poincarégroep 10-dimensionaal. De commutatierelaties van de Poincarégroep (corresponderend met (1.1)) luiden:

$$\begin{aligned} [M_{ab}, M_{cd}] &= 4\,\delta_{[b[c}\, M_{a]d]} \\ [M_{ab}, P_c] &= 2\,\delta_{[bc}\, P_{a]} \\ [P_a, P_b] &= 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

We hebben nu als ijkvelden de velden $\omega_\mu{}^a{}_b$ (het ijkveld bij $M_a{}^b$, de spinconnectie) en $e_\mu{}^a$ (het ijkveld bij P_a, de inverse vierbein of vielbein), en als parameters van de infinitesimale ijktransformaties $\varepsilon^a{}_b$ (parameters bij $M_a{}^b$) en $\xi_P{}^a$ (parameters bij P_a). Wederom zijn een aantal van deze velden/parameters identiek: $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$ en $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$. (Hierdoor moet bij $t^A = M$ voor $W_\mu{}^A$ en Λ^A in (1.2) $\frac{1}{2}\omega_\mu{}^a{}_b$ en $\frac{1}{2}\varepsilon^a{}_b$ in plaats van $\omega_\mu{}^a{}_b$ en $\varepsilon^a{}_b$ ingevuld worden)
De transformatieregels van de ijkvelden van de Poincarégroep

(corresponderend met (1.2)) luiden:

$$\begin{aligned} \delta \omega_\mu{}^a{}_b &= D_\mu \varepsilon^a{}_b \\ \delta e_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b + D_\mu \xi_P{}^a \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} D_\mu \varepsilon^a{}_b &= \partial_\mu \varepsilon^a{}_b - \omega_\mu{}^a{}_c \varepsilon^c{}_b + \omega_\mu{}^c{}_b \varepsilon^a{}_c \\ D_\mu \xi_P{}^a &= \partial_\mu \xi_P{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b \xi_P{}^b \end{aligned}$$

De krommingen van de Poincarégroep heten $R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M)$ (kromming bij $M_a{}^b$) en $R_{\mu\nu}{}^a(P)$ (kromming bij P_a). Ze zijn gedefinieerd als (corresponderend met (1.3)):

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M) &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^a{}_b - 2\omega_{[\mu}{}^a{}_c \omega_{\nu]}{}^c{}_b \\ R_{\mu\nu}{}^a(P) &= 2D_{[\mu}e_{\nu]}{}^a \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$D_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b$$

en transformeren als (corresponderend met (1.4)):

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\varepsilon^{[a}{}_c R_{\mu\nu}{}^{cb]}(M) \\ \delta R_{\mu\nu}{}^a(P) &= \varepsilon^a{}_b R_{\mu\nu}{}^b(P) - \xi_P{}^b R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Behalve onder de Yang-Mills ijktransformaties transformeren de ijkvelden verder ook onder algemene coördinaten transformaties. Als we de infinitesimale parameters hiervan ξ^μ noemen geldt:

$X_\mu = e_\mu{}^a, \omega_\mu{}^a{}_b$:

$$\delta X_\mu = -\partial_\mu \xi^\nu X_\nu - \xi^\nu \partial_\nu X_\mu \tag{3.5a}$$

Analoog voor een object met contravariante wereldindex:

$$\delta X^{\mu} = \partial_{\nu}\xi^{\mu} X^{\nu} - \xi^{\nu}\partial_{\nu}X^{\mu} \tag{3.5b}$$

* * *

De Yang-Mills theorie van de Poincarégroep wordt nu gemodificeerd tot een ijktheorie van de Poincarégroep die equivalent is aan Einstein gravitatie. Dit gebeurt door aan de theorie een constraint op te leggen:

$$R_{\mu\nu}{}^{a}(P) = 0 \tag{3.6}$$

Men spreekt van een conventional constraint. Omdat dit de enige zijn die in deze scriptie aan de orde zullen komen laat ik het bijvoegelijk naamwoord conventional voortaan weg.

Het opleggen van dit constraint heeft als gevolg dat de basisvariëteit van de theorie en de interne ruimte van de Yang-Mills symmetrie zinvol met elkaar in verband kunnen worden gebracht. De basis hiervoor is dat $e_{\mu}{}^{a}$ wordt opgevat als lineaire afbeelding van de raakruimte van de basisvariëteit naar de interne Lorentzruimte. We kunnen nu de afgeleide objecten $e_{a}{}^{\mu}$ (vierbein, vielbein), $g_{\mu\nu}$ (metrische tensor) en $g^{\mu\nu}$ bij $e_{\mu}{}^{a}$ definiëren.

$$\begin{gathered} e_{a}{}^{\mu} e_{\mu}{}^{b} = \delta_{a}{}^{b}, \quad e_{\mu}{}^{a} e_{a}{}^{\nu} = \delta_{\mu}{}^{\nu} \\ g_{\mu\nu} = e_{\mu}{}^{a} e_{\nu}{}^{b} \delta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_{a}{}^{\mu} e_{b}{}^{\nu} \delta^{ab} \\ g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^{\mu}{}_{\rho}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}{}^{\rho} \end{gathered} \tag{3.7}$$

Met $e_{\mu}{}^{a}$ en $e_{a}{}^{\mu}$ kunnen we systematisch wereldindices en

Lorentzindices in elkaar vertalen. De symmetrie van $g_{\mu\nu}$ motiveert zo de notatie: $e_\mu{}^a = e^a{}_\mu$, $e^\mu{}_a = e_a{}^\mu$.

Het constraint moet nu de theorie veranderen. Dit gebeurt door aan de hand van de constraints de transformatieregels van de velden te veranderen. Over de wijze waarop dit gaat zijn drie opvattingen mogelijk:

(i) Van het geheel bestaande uit de Yang-Mills symmetrieën en algemene coördinaten transformaties houden we alleen de symmetrieën die de constraints invariant laten. In dit geval blijven dan ((3.4) en (3.6)) van de M-transformaties, P-transformaties en algemene coördinaten transformaties alleen de M-transformaties en de algemene coördinaten transformaties over. Deze overgebleven symmetrieën vormen dan de getrunceerde algebra en corresponderen met de (ruimte-tijd) symmetrieën van Einstein gravitatie.

Probleem met opvatting (i):

In conforme supergravitatie (paragraaf 5) zijn de constraints niet invàriant onder Q-transformaties, terwijl deze toch in gemodificeerde vorm in de uiteindelijke algebra voorkomen.

(ii) De symmetrieën uit de Yang-Mills symmetrieën die het constraint niet invariant laten worden gemodificeerd (de constraints worden altijd invariant onder algemene coördinaten transformaties gekozen). Dit gebeurt door de ijkvelden in twee categorieën te verdelen: de onafhankelijke en de afhankelijke velden. De verdeling is dan zó dat de afhankelijke velden in de onafhankelijke velden uitgedrukt precies de constraints op lossen. In dit geval zijn $e_\mu{}^a$ de onafhankelijke velden en $\omega_\mu{}^a{}_b$ de afhankelijke. De oplossing van (3.6) luidt dan:

$$\omega_\mu{}^{ab}(e) = \tfrac{1}{2} e_\mu{}^c (\Omega^{ab}{}_c + \Omega^a{}_c{}^b - \Omega^b{}_c{}^a) \qquad (3.8)$$
$$\Omega_{ab}{}^c = 2\, e_{[a}{}^\mu e_{b]}{}^\nu \partial_\mu e_\nu{}^c$$

De transformatieregels van de onafhankelijke velden worden nu gedefinieerd als identiek aan de oorspronkelijke transformatieregels, nu echter met de afhankelijke velden daarin als functie van de onafhankelijke. De transformatie van de afhankelijke velden zijn dan redundant en volgen met behulp van de constraints of uit de expliciete uitdrukking.

Er bestaat nu over het algemeen een lineaire afhankelijkheid tussen de verschillende (gemodificeerde) transformaties, zodat een aantal kunnen worden weggelaten omdat ze in de andere kunnen worden uitgedrukt. In het onderhavige geval hebben we

$$\delta_M(\xi^\mu \omega_\mu{}^a{}_b) + \delta_P(\xi^\mu e_\mu{}^a) + \delta_{gct}(\xi^\mu) = 0. \qquad (3.9)$$

We kunnen de P-transformaties nu dus in de andere uitdrukken en houden alleen als onafhankelijk de M-transformaties en de algemene coördinaten transformaties over.

Probleem met opvatting (ii):
In conforme supergravitatie (paragraaf 5) wil je de P-transformaties ook weglaten uit de uiteindelijke algebra, hoewel er dan niet een lineaire afhankelijkheid als (3.9) is [de Wit, 1982, bladzijde 7].

(iii) Dit is de tussenoplossing: Vervang de P-transformaties door de algemene coördinaten transformatie. Modificeer de andere interne transformaties. Dit is de methode gevolgd in de paragrafen 5 en 6.

Alle drie de manieren om de transformatieregels van de velden te wijzigen geven hetzelfde resultaat. De enige onafhankelijke transformaties zijn de M-transformaties en de algemene coördinaten transformaties, en de resulterende transformatieregels luiden voor de onafhankelijke velden

$$\delta e_\mu{}^a = \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b - \partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a - \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a \tag{3.10}$$

en voor de overgebleven krommingen

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\varepsilon^{[a}{}_c R_{\mu\nu}{}^{cb]}(M) \\ &\quad - 2\partial_{[\mu}\xi^\tau R_{\tau\nu]}{}^{ab}(M) - \xi^\tau \partial_\tau R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) \end{aligned} \tag{3.11}$$

* * *

In het bovenstaande ((3.2), (3.3)) zijn een aantal voorbeelden gegeven van de afgeleide D_μ, die covariant is onder M-transformaties. Deze is analoog aan (1.6) gedefinieerd door voor iedere Lorentzindex een term met de spinconnectie toe te voegen.

Nu geldt echter voor een vector X_μ, dat $D_\mu X_\nu$ geen tensor is onder algemene coördinaten transformaties. Daarom wordt de covariante afgeleide $\mathcal{D}_\mu$ gedefinieerd die zowel covariant is onder M-transformaties als onder algemene coördinaten transformaties. $\mathcal{D}_\mu$ wordt als volgt gedefinieerd: vertaal eerst alle wereldindices met $e_\mu{}^a$, $e_a{}^\mu$ in Lorentzindices, pas D_μ toe, en vertaal de indices dan weer terug. In het geval van de vectoren X_μ en X^μ resulteert dit in:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu X_\nu &= e_\nu{}^a D_\mu(e_a{}^\rho X_\rho) = D_\mu X_\nu - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} X_\rho \\ \mathcal{D}_\mu X^\nu &= e^\nu{}_a D_\mu(e^a{}_\rho X^\rho) = D_\mu X^\nu + \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} X^\rho \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} = -e_{\nu}{}^{a} D_{\mu} e_{a}{}^{\rho} = e^{\rho}{}_{a} D_{\mu} e^{a}{}_{\nu}$$
$$= -\omega_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + e^{\rho}{}_{a} \partial_{\mu} e^{a}{}_{\nu}$$
$$\omega_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}\, e_{a}{}^{\rho} e^{b}{}_{\nu}$$

Behalve de spinconnectie voor Lorentzindices treedt in $\mathcal{D}_{\mu}$ een affiene connectie $\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}$ voor wereldindices op. Dit is (voor $R_{\mu\nu}{}^{a}(P) = 0$) de Levi-Civita connectie voor de metrische tensor $g_{\mu\nu}$. Met deze connectie wordt standaard een kromming (de Riemann tensor) en een torsie geassocieerd:

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma) = 2\,\partial_{[\rho} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma]} + 2\,\Gamma^{\mu}{}_{\tau[\rho} \Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma]} \qquad (3.13)$$
$$T^{\mu}{}_{\nu\rho}(\Gamma) = 2\,\Gamma^{\mu}{}_{[\nu\rho]}$$

Er geldt nu dat $R(\Gamma)$ en $T(\Gamma)$ hetzelfde object zijn als $R(M)$ en $R(P)$, zodat de krommingstensoren van de Poincarégroep voldoende zijn om de Lagrangeaan en veldvergelijkingen van Einstein gravitatie mee te definieren:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(\Gamma) = R_{\rho\sigma\nu\mu}(M) \qquad (3.14)$$
$$T_{\mu\nu\rho}(\Gamma) = R_{\rho\nu\mu}(P)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(\Gamma) = g_{\mu\tau} R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma)$$
$$T_{\mu\nu\rho}(\Gamma) = g_{\mu\sigma} T^{\sigma}{}_{\nu\rho}(\Gamma)$$
$$R_{\rho\sigma\nu\mu}(M) = R_{\rho\sigma}{}^{a}{}_{b}(M)\, e_{\nu a} e_{\mu}{}^{b}$$
$$R_{\rho\nu\mu}(P) = R_{\rho\nu}{}^{a}(P)\, e_{\mu a}$$

4 Conforme gravitatie

De constructie in deze paragraaf is identiek aan die in paragraaf 3 alleen wordt uitgegaan van de Yang-Mills theorie van een grotere groep, de conforme groep, en aan deze theorie worden meer constraints opgelegd. Het resultaat van deze constructie heet conforme gravitatie of Weyl gravitatie.

De verschillende objecten bij de conforme groep en de commutatie-relaties tussen de generatoren (analoog van (3.1)) zijn:

generatoren	dim	infin. transf. par.	ijkvelden	naam
$M_a{}^{b}\,^{\circledast}$	6	$\varepsilon^a{}_b\,^{\circledast}$	$\omega_\mu{}^a{}_b\,^{\circledast}$	Lorentz rotaties
P_a	4	$\xi_P{}^a$	$e_\mu{}^a$	translaties
K_a	4	$\Lambda_K{}^a$	$f_\mu{}^a$	conforme boosts
D	1	Λ_D	b_μ	dilataties

(4.1)

$^{\circledast}$ $M_{ab} = -M_{ba}$, $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$, $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$

$$
\begin{aligned}
[M_{ab}, M_{cd}] &= 4\,\delta_{[b[c} M_{a]d]} \\
[M_{ab}, P_c] &= 2\,\delta_{[bc} P_{a]} \\
[M_{ab}, K_c] &= 2\,\delta_{[bc} K_{a]} \\
[P_a, K_b] &= -M_{ab} - \delta_{ab} D \\
[P_a, D] &= P_a \\
[K_a, D] &= -K_a
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

alle andere commutatoren zijn nul

De verschillende objecten uit de Yang-Mills theorie van de conforme groep met hun transformatiegedrag (analoog van (3.2), (3.3), (3.4)) zijn:

$$
\begin{aligned}
\delta \omega_\mu{}^{ab} &= D_\mu \varepsilon^{ab} + 2\xi_P^{[a} f_\mu{}^{b]} + 2\Lambda_K^{[a} e_\mu{}^{b]} \\
\delta e_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b + D_\mu \xi_P{}^a - \Lambda_D e_\mu{}^a \\
\delta f_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b f_\mu{}^b + D_\mu \Lambda_K^a + \Lambda_D f_\mu{}^a \\
\delta b_\mu &= -\xi_P{}^a f_{\mu a} + \Lambda_K{}^a e_{\mu a} + \partial_\mu \Lambda_D
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu \varepsilon^{ab} &= \partial_\mu \varepsilon^{ab} - 2\omega_\mu{}^{[a}{}_c \varepsilon^{cb]} \\
D_\mu \xi_P{}^a &= \partial_\mu \xi_P{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b \xi_P{}^b + b_\mu \xi_P{}^a \\
D_\mu \Lambda_K{}^a &= \partial_\mu \Lambda_K{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b \Lambda_K{}^b - b_\mu \Lambda_K{}^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}{}^{ab} - 2\omega_{[\mu}{}^{[a}{}_c \omega_{\nu]}{}^{cb]} - 4e_{[\mu}{}^{[a} f_{\nu]}{}^{b]} \\
R_{\mu\nu}{}^a(P) &= 2D_{[\mu} e_{\nu]}{}^a \\
R_{\mu\nu}{}^a(K) &= 2D_{[\mu} f_{\nu]}{}^a \\
R_{\mu\nu}(D) &= 2\partial_{[\mu} b_{\nu]} + 2e_{[\mu}{}^a f_{\nu]a}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu e_\nu{}^a &= \partial_\mu e_\nu{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b e_\nu{}^b + b_\mu e_\nu{}^a \\
D_\mu f_\nu{}^a &= \partial_\mu f_\nu{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b f_\nu{}^b - b_\mu f_\nu{}^a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\varepsilon^{[a}{}_c R_{\mu\nu}{}^{cb]}(M) + 2\xi_P^{[a} R_{\mu\nu}{}^{b]}(K) + 2\Lambda_K^{[a} R_{\mu\nu}{}^{b]}(P) \\
\delta R_{\mu\nu}{}^a(P) &= \varepsilon^a{}_b R_{\mu\nu}{}^b(P) - \xi_P{}^b R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M) + \xi_P{}^a R_{\mu\nu}(D) - \Lambda_D R_{\mu\nu}{}^a(P) \\
\delta R_{\mu\nu}{}^a(K) &= \varepsilon^a{}_b R_{\mu\nu}{}^b(K) - \Lambda_K{}^b R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M) - \Lambda_K^a R_{\mu\nu}(D) + \Lambda_D R_{\mu\nu}{}^a(K) \\
\delta R_{\mu\nu}(D) &= -\xi_P{}^a R_{\mu\nu a}(K) + \Lambda_K^a R_{\mu\nu a}(P)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

De constraints die we aan deze theorie opleggen luiden:

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu}{}^a(P) &= 0 \\
R_{\mu\nu}(D) &= 0
\end{aligned}
\tag{4.6a}
$$

Hierover twee opmerkingen:

(i) Gegeven $R_{\mu\nu}{}^a(P)=0$ volgt uit een Bianchi identiteit voor de Yang Mills theorie van de conforme groep dat $R_{\mu a}(M) = R_{\mu a}(D)$, met $R_\mu{}^a(M) = R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)\, e^\nu{}_b$, $R_{\mu a}(D) = R_{\mu\nu}(D)\, e^\nu{}_a$. Equivalent zijn dus de constraints:

$$R_{\mu\nu}{}^a(P) = 0 \qquad (4.6b)$$
$$R_\mu{}^a(M) = 0 \qquad R_\mu{}^a(M) = R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)\, e^\nu{}_b$$

(ii) Gegeven de constraints, dan geldt onder de ijkkeuze $b_\mu = 0$ dat $R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)$ alleen afhangt van $e_\mu{}^a$. Deze correspondeert dan (analoog aan (3.14)) met de Weyl-tensor van de Einstein gravitatie (in plaats van met de Riemanntensor).

De constraints hebben nu, $e_\mu{}^a$ en b_μ zijn de onafhankelijke velden, $\omega_\mu{}^a{}_b$ en $f_\mu{}^a$ de afhankelijke (analoog aan (3.8)) als oplossing

$$\omega_\mu{}^{ab}(e,b) = \tfrac{1}{2} e_\mu{}^c (\Omega^{ab}{}_c + \Omega^a{}_c{}^b - \Omega^b{}_c{}^a) \qquad (4.7)$$
$$\Omega_{ab}{}^c = 2 e_{[a}{}^\mu e_{b]}{}^\nu (\partial_\mu - b_\mu) e_\nu{}^c$$
$$f_\mu{}^a(e,b) = \tfrac{1}{2} R_\mu{}^a(e,b) - \tfrac{1}{12} e_\mu{}^a R(e,b)$$
$$R_{\mu\nu}{}^a{}_b(e,b) = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^a{}_b - 2\omega_{[\mu}{}^a{}_c\, \omega_{\nu]}{}^c{}_b$$
$$R_\mu{}^a(e,b) = R_{\mu\nu}{}^a{}_b(e,b)\, e^{\nu b}, \quad R(e,b) = R_\mu{}^a(e,b)\, e^\mu{}_a$$

en leiden tot de volgende afhankelijkheid (analoog aan (3.9)) tussen de gemodificeerde ijktransformaties en algemene coördinaten transformaties:

$$\delta_M(\xi^\mu \omega_\mu{}^a{}_b) + \delta_P(\xi^\mu e_\mu{}^a) + \delta_K(\xi^\mu f_\mu{}^a) + \delta_D(\xi^\mu b_\mu) + \delta_{gct}(\xi^\mu) = 0 \quad (4.8)$$

Tenslotte de resulterende theorie. Onder de ijktransformaties die (zie (4.5)) de constraints behouden, namelijk de M-, K- en D-transformaties, en onder de algemene coördinaten transformaties transformeren de onafhankelijke ijkvelden (analoog aan (3.10)) als

$$
\begin{aligned}
\delta e_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b\, e_\mu{}^b - \Lambda_D\, e_\mu{}^a - \partial_\mu \xi^\nu\, e_\nu{}^a - \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a \\
\delta b_\mu &= \Lambda_K{}^a\, e_{\mu a} + \partial_\mu \Lambda_D - \partial_\mu \xi^\nu\, b_\nu - \xi^\nu \partial_\nu b_\mu
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

en de overgebleven krommingen (analoog aan (3.11)) als

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\varepsilon^{[a}{}_c\, R_{\mu\nu}{}^{cb]}(M) \\
&\quad - \partial_\mu \xi^\tau R_{\tau\nu}{}^{ab}(M) - \partial_\nu \xi^\tau R_{\mu\tau}{}^{ab}(M) - \xi^\tau \partial_\tau R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) \\
\delta R_{\mu\nu}{}^a(K) &= \varepsilon^a{}_b\, R_{\mu\nu}{}^b(K) - \Lambda_K{}^b\, R_{\mu\nu}{}^a{}_b(M) + \Lambda_D\, R_{\mu\nu}{}^a(K) \\
&\quad - \partial_\mu \xi^\tau R_{\tau\nu}{}^a(K) - \partial_\nu \xi^\tau R_{\mu\tau}{}^a(K) - \xi^\tau \partial_\tau R_{\mu\nu}{}^a(K)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

5 Conforme supergravitatie N=1

De constructie in deze paragraaf is opnieuw analoog aan die in paragraaf 3 en 4. Opnieuw wordt uitgegaan van de Yang-Mills theorie van een grotere groep, de superconforme groep, en er worden aan deze meer constraints opgelegd.
Er zijn echter twee verschillen:

(i) Een deel van de symmetrieën zijn fermionisch. De velden die met deze symmetrie corresponderen zijn nu anticommuterend, en in de commutatierelaties moet hierom tussen de generatoren van dergelijke symmetrieën in plaats van de commutator de anticommutator worden genomen.
($[W_\mu{}^A t_A, W_\nu{}^B t_B] = W_\mu{}^A W_\nu{}^B \{t_A, t_B\} = W_\mu{}^A W_\nu{}^B f_{AB}{}^C t_C$
met $W_\mu{}^A$ anticommuterend)
Bij de superconforme groep zijn de generatoren van de fermionische symmetrie de Q en S. Deze zijn bovendien Majorana spinoren.

(ii) De modificaties in de theorie naar aanleiding van de constraints werken terug op de vorm van diezelfde constraints. Dit komt doordat, hoewel de transformatieregels van de onafhankelijke velden na modificatie onveranderd zijn, in dit geval die van de oorspronkelijke krommingstensoren niet onveranderd blijven, en deze niet meer covariant transformeren. Om de constraints dus überhaupt te kunnen oplossen moet van de achteraf gecovariantiseerde krommingen uitgegaan worden.
Op zich is dit geen principieel verschil met paragraaf 3 en 4, maar het maakt de keuze van de constraints wel ondoorzichtiger.

Het resultaat van de constructie uitgaande van de superconforme groep, heet conforme supergravitatie.

* * *

De verschillende objecten bij de superconforme groep en de (anti-) commutatierelaties tussen de generatoren (analoog van (3.1), (4.1), (4.2)) zijn nu:

generatoren	dim	infin. trans. par.	ijkvelden	naam
$M_a{}^b$ ⊛	6	$\varepsilon^a{}_b$ ⊛	$\omega_\mu{}^a{}_b$ ⊛	Lorentz rotaties
P_a	4	$\xi_P{}^a$	$e_\mu{}^a$	translaties
K_a	4	$\Lambda_K{}^a$	$f_\mu{}^a$	conforme boosts
D	1	Λ_D	b_μ	dilataties
A	1	Λ_A	A_μ	chirale rotaties
Q	4	$2\bar{\varepsilon}$ ⊛⊛	$\bar{\psi}_\mu$	supersymmetrieën
S	4	$2\bar{\eta}$ ⊛⊛	$\bar{\phi}_\mu$	speciale supersymmetrieën

(5.1)

⊛ $M_{ab} = -M_{ba}$, $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}$, $\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}$

⊛⊛ de factor 2 is conventie

$$[M_{ab}, M_{cd}] = 4\delta_{[b[c} M_{a]d]} \qquad [P_a, S] = -\tfrac{1}{2}\gamma_a Q \tag{5.2}$$
$$[M_{ab}, P_c] = 2\delta_{[bc} P_{a]} \qquad [K_a, D] = -K_a$$
$$[M_{ab}, K_c] = 2\delta_{[bc} K_{a]} \qquad [K_a, Q] = -\gamma_a S$$
$$[M_{ab}, Q] = -\sigma_{ab} Q \qquad [D, Q] = -\tfrac{1}{2} Q$$
$$[M_{ab}, S] = -\sigma_{ab} S \qquad [D, S] = \tfrac{1}{2} S$$
$$[P_a, K_b] = -M_{ab} - \delta_{ab} D \qquad [A, Q] = -\tfrac{1}{2} i \gamma_5 Q$$
$$[P_a, D] = P_a \qquad [A, S] = \tfrac{1}{2} i \gamma_5 S$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = \tfrac{1}{2}\gamma^a P_a$$
$$\{Q, \bar{S}\} = -\tfrac{1}{4}\sigma^{ab} M_{ab} + \tfrac{1}{4} D + \tfrac{3}{4} i \gamma_5 A$$
$$\{S, \bar{S}\} = \tfrac{1}{4}\gamma^a K_a$$

alle andere (anti-) commutatoren zijn nul

De verschillende objecten uit de Yang-Mills theorie van de superconforme groep met hun transformatiegedrag zijn (analoog van (3.2) - (3.4) en (4.3) - (4.5)):

$$\delta\omega_\mu{}^{ab} = D_\mu\varepsilon^{ab} + 2\xi_P{}^{[a} f_\mu{}^{b]} + 2\Lambda_K{}^{[a} e_\mu{}^{b]} - \bar\varepsilon\sigma^{ab}\phi_\mu - \bar\eta\sigma^{ab}\psi_\mu \qquad (5.3)$$
$$\delta e_\mu{}^a = \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b + D_\mu\xi_P{}^a - \Lambda_D e_\mu{}^a + \bar\varepsilon\gamma^a\psi_\mu$$
$$\delta f_\mu{}^a = \varepsilon^a{}_b f_\mu{}^b + D_\mu\Lambda_K{}^a + \Lambda_D f_\mu{}^a + \tfrac{1}{2}\bar\eta\gamma^a\phi_\mu$$
$$\delta b_\mu = -\xi_P{}^a f_{\mu a} + \Lambda_K{}^a e_{\mu a} + \partial_\mu\Lambda_D + \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon\phi_\mu - \tfrac{1}{2}\bar\eta\psi_\mu$$
$$\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda_A + \tfrac{3}{2}i\bar\varepsilon\gamma_5\phi_\mu - \tfrac{3}{2}i\bar\eta\gamma_5\psi_\mu$$
$$\delta\psi_\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}\sigma_{ab}\psi_\mu + \tfrac{1}{2}\xi_P{}^a\gamma_a\phi_\mu - \tfrac{1}{2}(\Lambda_D + i\Lambda_A\gamma_5)\psi_\mu + 2D_\mu\varepsilon - e_\mu{}^a\gamma_a\eta$$
$$\delta\phi_\mu = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}\sigma_{ab}\phi_\mu + \Lambda_K{}^a\gamma_a\psi_\mu + \tfrac{1}{2}(\Lambda_D + i\Lambda_A\gamma_5)\phi_\mu - 2f_\mu{}^a\gamma_a\varepsilon + 2D_\mu\eta$$

$$D_\mu\varepsilon^{ab} = \partial_\mu\varepsilon^{ab} - 2\omega_\mu{}^{[a}{}_c\,\varepsilon^{cb]}$$
$$D_\mu\xi_P{}^a = \partial_\mu\xi_P{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b\,\xi_P{}^b + b_\mu\xi_P{}^a$$
$$D_\mu\Lambda_K{}^a = \partial_\mu\Lambda_K{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b\,\Lambda_K{}^b - b_\mu\Lambda_K{}^a$$
$$D_\mu\varepsilon = \partial_\mu\varepsilon - \tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\varepsilon + \tfrac{1}{2}(b_\mu + iA_\mu\gamma_5)\varepsilon$$
$$D_\mu\eta = \partial_\mu\eta - \tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\eta - \tfrac{1}{2}(b_\mu + iA_\mu\gamma_5)\eta$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) = 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} - 2\omega_{[\mu}{}^{[a}{}_c\,\omega_{\nu]}{}^{cb]} - 4e_{[\mu}{}^{[a} f_{\nu]}{}^{b]} + \bar\psi_{[\mu}\sigma^{ab}\phi_{\nu]} \qquad (5.4)$$
$$R_{\mu\nu}{}^a(P) = 2D_{[\mu}e_{\nu]}{}^a - \tfrac{1}{2}\bar\psi_{[\mu}\gamma^a\psi_{\nu]}$$
$$R_{\mu\nu}{}^a(K) = 2D_{[\mu}f_{\nu]}{}^a - \tfrac{1}{4}\bar\phi_{[\mu}\gamma^a\phi_{\nu]}$$
$$R_{\mu\nu}(D) = 2\partial_{[\mu}b_{\nu]} + 2e_{[\mu}{}^a f_{\nu]a} - \tfrac{1}{2}\bar\psi_{[\mu}\phi_{\nu]}$$
$$R_{\mu\nu}(A) = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} - \tfrac{3}{2}i\bar\psi_{[\mu}\gamma_5\phi_{\nu]}$$
$$R_{\mu\nu}(Q) = 2D_{[\mu}\psi_{\nu]} - e_{[\mu}{}^a\gamma_a\phi_{\nu]}$$
$$R_{\mu\nu}(S) = 2D_{[\mu}\phi_{\nu]} - 2f_{[\mu}{}^a\gamma_a\psi_{\nu]}$$

$$D_\mu e_\nu{}^a = \partial_\mu e_\nu{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b\,e_\nu{}^b + b_\mu e_\nu{}^a$$
$$D_\mu f_\nu{}^a = \partial_\mu f_\nu{}^a - \omega_\mu{}^a{}_b\,f_\nu{}^b - b_\mu f_\nu{}^a$$
$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\psi + \tfrac{1}{2}(b_\mu + iA_\mu\gamma_5)\psi$$
$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - \tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\phi - \tfrac{1}{2}(b_\mu + iA_\mu\gamma_5)\phi$$

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) &= 2\varepsilon^{[a}{}_{c}R_{\mu\nu}{}^{cb]}(M) + 2\xi_P{}^{[a}R_{\mu\nu}{}^{b]}(K) + 2\Lambda_K{}^{[a}R_{\mu\nu}{}^{b]}(P) \\
&\quad - \bar{\varepsilon}\sigma^{ab}R_{\mu\nu}(S) - \bar{\eta}\sigma^{ab}R_{\mu\nu}(Q) \\
\delta R_{\mu\nu}{}^{a}(P) &= \varepsilon^{a}{}_{b}R_{\mu\nu}{}^{b}(P) - \xi_P{}^{b}R_{\mu\nu}{}^{a}{}_{b}(M) + \xi_P{}^{a}R_{\mu\nu}(D) - \Lambda_D R_{\mu\nu}{}^{a}(P) \\
&\quad + \bar{\varepsilon}\gamma^{a}R_{\mu\nu}(Q) \\
\delta R_{\mu\nu}{}^{a}(K) &= \varepsilon^{a}{}_{b}R_{\mu\nu}{}^{b}(K) - \Lambda_K{}^{b}R_{\mu\nu}{}^{a}{}_{b}(M) - \Lambda_K{}^{a}R_{\mu\nu}(D) + \Lambda_D R_{\mu\nu}{}^{a}(K) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\bar{\eta}\gamma^{a}R_{\mu\nu}(S) \\
\delta R_{\mu\nu}(D) &= -\xi_P{}^{a}R_{\mu\nu a}(K) + \Lambda_K{}^{a}R_{\mu\nu a}(P) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}R_{\mu\nu}(S) - \tfrac{1}{2}\bar{\eta}R_{\mu\nu}(Q) \\
\delta R_{\mu\nu}(A) &= \tfrac{3}{2}i\bar{\varepsilon}\gamma_5 R_{\mu\nu}(S) - \tfrac{3}{2}i\bar{\eta}\gamma_5 R_{\mu\nu}(Q) \\
\delta R_{\mu\nu}(Q) &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}\sigma_{ab}R_{\mu\nu}(Q) + \tfrac{1}{2}\xi_P{}^{a}\gamma_a R_{\mu\nu}(S) - \tfrac{1}{2}(\Lambda_D + i\Lambda_A\gamma_5)R_{\mu\nu}(Q) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)\sigma_{ab}\varepsilon + \tfrac{1}{2}(R_{\mu\nu}(D) + iR_{\mu\nu}(A)\gamma_5)\varepsilon - R_{\mu\nu}{}^{a}(P)\gamma_a\eta \\
\delta R_{\mu\nu}(S) &= \tfrac{1}{2}\varepsilon^{ab}\sigma_{ab}R_{\mu\nu}(S) + \Lambda_K{}^{a}\gamma_a R_{\mu\nu}(Q) + \tfrac{1}{2}(\Lambda_D + i\Lambda_A\gamma_5)R_{\mu\nu}(S) \\
&\quad - 2R_{\mu\nu}{}^{a}(K)\gamma_a\varepsilon - \tfrac{1}{2}R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)\sigma_{ab}\eta - \tfrac{1}{2}(R_{\mu\nu}(D) + iR_{\mu\nu}(A)\gamma_5)\eta
\end{aligned} \tag{5.5}$$

De constraints die we aan deze theorie opleggen luiden (uitbreiding van (3.5) en (4.6b)):

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}{}^{a}(P) = 0 \\
&\hat{R}_{\mu\nu}(M) - \tfrac{1}{3}i\tilde{R}_{\mu\nu}(A) = 0 \\
&\gamma^{\mu}R_{\mu\nu}(Q) = 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$R_{\mu a} = R_{\mu\nu}e^{\nu}{}_{a}, \quad R_{ab} = R_{\mu b}e^{\mu}{}_{a}, \quad \gamma^{\mu} = e^{\mu}{}_{a}\gamma^{a} \quad \text{etc.}$$
$$\hat{R}_{\mu}{}^{a}(M) = \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(M)e^{\nu}{}_{b}$$
$$\tilde{R}_{ab}(A) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{cd}(A)$$

$\hat{R}(M)$ is een kromming die covariant is gemaakt ten opzichte van de gemodificeerde transformaties; de definitie ervan komt nog in (5.10).

De constraints hebben nu, $e_{\mu}{}^{a}$, b_{μ}, A_{μ} en ψ zijn de onafhankelijke velden, $\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}$, $f_{\mu}{}^{a}$ en ϕ de afhankelijke, als oplossing (analoog aan (3.8) en (4.7)):

$$
\begin{aligned}
\omega_\mu{}^{ab}(e,b,\psi) &= \tfrac{1}{2} e_\mu{}^c (\Omega^{ab}{}_c + \Omega^a{}_c{}^b - \Omega^b{}_c{}^a) && (5.7)\\
\Omega_{ab}{}^c &= 2 e_{[a}{}^\mu e_{b]}{}^\nu ((\partial_\mu - b_\mu) e_\nu{}^c - \tfrac{1}{4} \bar\psi_\mu \gamma^c \psi_\nu) \\
f_\mu{}^a(e,b,\psi) &= \tfrac{1}{2} \hat R_\mu{}^a(e,b,\psi) - \tfrac{1}{12} e_\mu{}^a \hat R(e,b,\psi) - \tfrac{1}{2} R_\mu{}^a(D) \\
\hat R_{\mu\nu}{}^a{}_b(e,b,\psi) &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^a{}_b - 2\omega_{[\mu}{}^a{}_c \omega_{\nu]}{}^c{}_b + \bar\psi_{[\mu} \sigma^a{}_b \phi_{\nu]} - \bar\psi_{[\mu} \gamma_{\nu]} R^{ab}(Q) \\
\phi_\mu(e,b,\psi) &= (\sigma^{\nu\rho}\gamma_\mu - \tfrac{1}{3}\gamma_\mu \sigma^{\nu\rho}) D_\nu \psi_\rho
\end{aligned}
$$

De resulterende theorie: De M, K, D, A, S, gct -transformaties behouden in de oorspronkelijke vorm de constraints, en de Q-transformatie wordt gemodificeerd. Het resultaat is (voor de onafhankelijke velden; generalisatie van (3.10) en (4.9)):

$$
\begin{aligned}
\delta e_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b - \Lambda_D e_\mu{}^a + \bar\varepsilon \gamma^a \psi_\mu - \partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a - \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a && (5.8)\\
\delta b_\mu &= \Lambda_K{}^a e_{\mu a} + \partial_\mu \Lambda_D + \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon \phi_\mu(e,b,\psi) - \tfrac{1}{2}\bar\eta \psi_\mu - \partial_\mu \xi^\nu b_\nu - \xi^\nu \partial_\nu b_\mu \\
\delta A_\mu &= \partial_\mu \Lambda_A + \tfrac{3}{2} i \bar\varepsilon \gamma_5 \phi_\mu(e,b,\psi) - \tfrac{3}{2} i \bar\eta \gamma_5 \psi_\mu - \partial_\mu \xi^\nu A_\nu - \xi^\nu \partial_\nu A_\mu \\
\delta \psi_\mu &= \tfrac{1}{2} \varepsilon^{ab} \sigma_{ab} \psi_\mu - \tfrac{1}{2}(\Lambda_D + i\Lambda_A \gamma_5)\psi_\mu + 2 D_\mu \varepsilon - e_\mu{}^a \gamma_a \eta
\end{aligned}
$$

$$
D_\mu \varepsilon = \partial_\mu \varepsilon - \tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^{ab}(e,b,\psi)\sigma_{ab}\varepsilon + \tfrac{1}{2}(b_\mu + i A_\mu \gamma_5)\varepsilon
$$

* * *

Uit (5.8) volgt dat:

$$
\begin{aligned}
\delta_Q \omega_\mu{}^{ab} &= -\bar\varepsilon \sigma^{ab} \phi_\mu + \bar\varepsilon \gamma_\mu R^{ab}(Q) && (5.9)\\
\delta_Q f_\mu{}^a &= \bar\varepsilon \gamma_\mu D_b R^{ba}(Q) \\
\delta_Q \phi_\mu &= -2 f_\mu{}^a \gamma_a \varepsilon + \tfrac{2}{3} i R_{ab}(A) \sigma^{ab} \gamma_\mu \varepsilon
\end{aligned}
$$

Willen de krommingen covariant blijven transformeren dan moeten $R(M)$, $R(K)$ en $R(S)$ vervangen worden door:

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(M) = R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) - \bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu]} R^{ab}(Q) \qquad (5.10)$$
$$\hat{R}_{\mu\nu}(K) = R_{\mu\nu}(K) - \bar{\psi}_{[\mu}\gamma_{\nu]} D_b R^{ba}(Q)$$
$$\hat{R}_{\mu\nu}(S) = R_{\mu\nu}(S) + \tfrac{2}{3} i\, R_{ab}(A)\, \sigma^{ab} \gamma_{[\mu}\psi_{\nu]}$$

(De Q-transformaties van de krommingen zijn nu niet meer zo eenvoudig te vinden. De Q-transformaties van $R(Q)$, $R(D) \propto \tilde{R}(A)$ en $\hat{R}(M)$ luiden:

$$\delta_Q R_{ab}(Q) = -\hat{R}_{ab}{}^{de}(M)\sigma_{de}\varepsilon - R_{ab}(D)\varepsilon + \tilde{R}_{ab}(D)\gamma_5\varepsilon \qquad (5.11)$$
$$\delta_Q R_{ab}(D) = \tfrac{1}{2}\bar{\varepsilon}\,\hat{R}_{ab}(S) + 2\bar{\varepsilon}\,\gamma_{[a} D_c R_{b]}{}^c(Q)$$
$$\delta_Q \hat{R}_{abcd}(M) = -\bar{\varepsilon}\,\sigma_{cd}\hat{R}_{ab}(S) - 4\bar{\varepsilon}\,\gamma_{[a}\left(D_c \tilde{R}_{b]d}(Q)\right)\tilde{\uparrow}_{cd}$$

Deze transformaties zijn handig als tussenresultaat om uit (5.9) af te leiden dat de gemodificeerde Q-transformatie van de constraints nul is.)

6 Conforme supergravitatie N>1

Van de superconforme groep bestaat een generalisatie met meerdere supersymmetrieën, de superconforme groep voor $N \geq 1$. Met deze groep kan hetzelfde verhaal worden gehouden als in paragraaf 5. Het analogon van (5.1) is dan bijvoorbeeld:

(6.1)

generatoren	dim	inf. transf.-par.	ijkvelden	naam
$M_a{}^b$ ⊛	6	$\varepsilon^a{}_b$ ⊛	$\omega_\mu{}^a{}_b$ ⊛	Lorentz rotaties
P_a	4	$\xi_P{}^a$	$e_\mu{}^a$	translaties
K_a	4	$\Lambda_K{}^a$	$f_\mu{}^a$	conforme boosts
D	1	Λ_D	b_μ	dilataties
A ⊕	1	Λ_A	A_μ	chirale U(1) rotaties
$V_i{}^j$ ⊛	N^2-1	$\Lambda_V{}^i{}_j$ ⊛	$V_\mu{}^i{}_j$ ⊛	chirale SU(N) rotaties
Q_i	4N	$2\bar{\varepsilon}^i$	$\bar{\psi}_\mu{}^i$	supersymmetrieën
S_i	4N	$2\bar{\eta}^i$	$\bar{\phi}_\mu{}^i$	speciale supersymmetrieën

⊛ $M_{ab} = -M_{ba}\,, \quad V_i{}^j = -(V_j{}^i)^*\,, \quad V_i{}^i = 0$
$\varepsilon^{ab} = -\varepsilon^{ba}\,, \quad \Lambda_V{}^i{}_j = -(\Lambda_V{}^j{}_i)^*\,, \quad \Lambda_V{}^i{}_i = 0$
$\omega_\mu{}^{ab} = -\omega_\mu{}^{ba}\,, \quad V_\mu{}^i{}_j = -(V_\mu{}^j{}_i)^*\,, \quad V_\mu{}^i{}_i = 0$

⊕ niet voor N=4
(indien toch aanwezig heeft de groep de structuur $\cdots \times U(1)$)

(In tegenstelling tot de andere velden zijn de V-velden niet reëel, maar complex, en hebben bovendien een soortgelijke redundantie als de M-velden.)

Na het opleggen van de constraints zijn als onafhankelijke velden over: $e_\mu{}^a$, b_μ, A_μ, $V_\mu{}^i{}_j$ en $\psi_\mu{}^i$. De zo ontstane theorie voor N>1 is niet volledig. Voor de theorieën die

Resulteerden in paragraaf 3, 4 en 5 gold dat een commutator van twee infinitesimale transformaties uit de transformatiealgebra ((3.10), (4.9), (5.8)) zelf ook als een dergelijke infinitesimale transformatie te schrijven viel: de algebra sloot. Dat dit gold, volgde a priori niet uit de gebruikte procedure: modificatie onder constraints. Hier, voor N>1, geldt dan ook niet dat de resulterende algebra sluit. Dit heeft als gevolg dat er geen niet-infinitesimale transformaties bestaan die met de infinitesimale transformaties corresponderen.

De manier waarop het bovenstaande direct kan worden ingezien, is de techniek van het off-shell tellen van vrijheidsgraden. Hierbij wordt het aantal onafhankelijke velden geteld modulo de verschillende ijksymmetrieën in de theorie, zowel bosonisch als fermionisch. Voor een supersymmetrische theorie is dan het aantal bosonische vrijheids-graden gelijk aan het aantal fermionische. (De term off-shell betekent dat naar willekeurige veldconfiguraties wordt gekeken, terwijl on-shell betekend dat de velden voldoen aan de massaschil-vergelijking $(\partial^2-m^2)\phi=0$ of algemener een veldvergelijking. Zo geldt dat $e_\mu{}^a$ in Einstein gravitatie off-shell 6 maar on-shell maar 2 vrijheidsgraden heeft)

We tellen nu in de theorie voor $N\geqslant 1$:

het aantal onafhankelijke velden:

bosonisch: $e_\mu{}^a, b_\mu, A_\mu, V_\mu{}^i{}_j$: $16+4+4+4(N^2-1)=20+4N^2$

fermionisch: ψ_μ^i : $16N$

het aantal symmetrieën:

bosonisch: $M_a{}^b, P_a, K_a, D, A, V$: $6+4+4+1+1+(N^2-1)=15+N^2$

fermionisch: Q_i, S_i : $4N+4N=8N$

het aantal vrijheidsgraden:

bosonisch: $(20+4N^2)-(15+N^2)=5+3N^2$

fermionisch: $16N-8N=8N$

Als de algebra sluit geldt dus $5+3N^2=8N$ ofwel N=1 ($\frac{5}{3}$ is niet geheel). Omgekeerd valt expliciet te controleren dat voor N=1 de algebra sluit.

De manier waarop de theorie voor N>1 nog verder wordt gemodificeerd zo dat de transformatie algebra toch weer sluit is dat er extra velden worden toegevoegd (en wel zoveel dat het aantal bosonische vrijheidsgraden gelijk wordt aan het aantal fermionische), en de oorspronkelijke velden dan ook transformeren in de nieuwe. De $N=2$ theorie krijgt op die manier in plaats van 17+16 vrijheidsgraden nu 24+24 vrijheidsgraden.

De constructie van een consistente theorie voor $N>1$ valt dus duidelijk buiten de procedure om Yang-Mills theorie door constraints te modificeren tot (super-) gravitatie theorie.

IV Gravitatie zonder constraints

7 IJktheorie

(7.1) Motivatie. Beschouw een veldentheorie bestaande uit precies 4 reële scalaire velden $\phi(x)$. We willen deze theorie op een natuurlijke wijze aan gravitatie koppelen en zo de gravitatie ijkvelden construeren. (De constructie is generaliseerbaar naar niet-scalaire of meer dan 4 velden, maar wordt dan minder doorzichtig.)
Nu geldt dat van de functie $\phi(x)$ bij Yang-Mills theorie een symmetrie geijkt wordt waarbij ϕ transformeert, terwijl bij gravitatie het om een symmetrie gaat waarbij x transformeert.
We construeren de velden en de Lagrangeaan van de gekoppelde theorie nu in drie stappen:

(i) Beschouw (locaal) de inverse $x(\phi)$.

(ii) Koppel deze velden met minimale koppeling aan de Yang-Mills ijkvelden van de symmetrie van de x . We hebben dan dus de velden $x(\phi)$, $W(\phi)$.

(iii) Inverteer weer terug: Dit levert de velden $\phi(x)$, $W(x) := W(\phi(x))$.

Er rijzen nu twee vragen, namelijk: Corresponderen de $W(x)$ die we op deze manier krijgen met de normale gravitatievelden? en: Levert de minimale koppeling van de Yang-Mills velden aan de $x(\phi)$, minimale koppeling van gravitatie aan de $\phi(x)$ (Beide zonder kinetische term voor de ijkvelden in de Lagrangeaan)? Beide vragen kunnen bevestigend worden beantwoord.

(7.2) Motivatie. In een willekeurige veldentheorie worden functies beschouwd van het soort $(x^\mu) \mapsto (\phi_\alpha)$. Hierbij is zowel structuur aanwezig in het domein als in het bereik van de functie die het veld voorstelt. Het ligt nu voor de hand alle structuur naar één kant te halen. Dit correspondeert met twee veranderingen in gezichtspunt:

(a) In de Quantum Field Theory is het gebruikelijk om over te gaan op functies van het soort: $(x^\mu, \alpha) \mapsto \phi$, waarbij het bereik alleen nog maar de verzameling $\mathbb{R}$ is. Men spreekt van gegeneraliseerde indices.

(b) In gravitatie (volgt uit (7.1)) is het handig om over te gaan op de grafiek van de functie: $* \mapsto (x^\mu, \phi_\alpha)$. Hierbij is de enige structuur die rest in het domein het feit dat het een C^∞-varieteit is. (In dit geval diffeomorf met $\mathbb{R}^4$ maar de lineaire structuur is bijv. weg)

(7.3) Motivatie. Vooruitlopend op de rest van deze scriptie bekijken we hoe een viertal fysische theorieën er volgens de beschrijving van paragraaf 7 uitzien. Dit is een soort verwisseltruc tussen M en F in vier stappen. Hoewel (A) en (B) precies de situatie bij paragraaf 1/2 voorstellen noemen we M en F nu X en V om uiteindelijk toch weer in de notatie van paragraaf 2 terug te komen, waarbij de oude namen nu echter naar nieuwe objecten verwijzen.

(A) Pure Yang-Millstheorie
(groep: G)

$$\begin{array}{c} P \\ \pi \big\downarrow \\ X \end{array} \qquad \& \qquad \omega$$

De objecten die corresponderen met de velden uit deze theorie zijn:

(i) Een G-hoofdbundel $\pi : P \to X$,
(ii) Een connectie op P: ω.

Om een realistische theorie te krijgen: Laat X de 4-dimensionale Minkowskiruimte zijn en G de 12-dimensionale Lie-groep $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

(B) Yang-Millstheorie gekoppeld aan materievelden
(groep: G)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & V \\ X \end{tikzcd} \qquad \& \qquad \omega$$

We hebben nu als extra object naast die uit (A):
(iii) Een equivariante afbeelding $P \to V$.

In bovenstaande realistische theorie is V een 184-dimensionale representatieruimte van G.

Gemotiveerd door (7.2) breiden we nu de equivariante afbeelding uit:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & X \times V \\ X \end{tikzcd} \qquad \& \qquad \omega$$

Hierin is X inert onder de werking van G en is commutatief.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & X \times V \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

De uitbreiding tot α voegt dus niets nieuws toe en laat de theorie onveranderd. We vervangen nu de naam X door M en noemen $X \times V =: F$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ M \end{tikzcd} \qquad \& \qquad \omega$$

(C) <u>Yang-Millstheorie en gravitatie gekoppeld aan materievelden</u> (groep: (Poincarégroep) $\times$ G)

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & X \times V = F \\ M \end{tikzcd} \qquad \& \qquad \omega$$

Gemotiveerd door (7.1) breiden we nu de groep uit. In plaats van G beschouwen we het product (Poincarégroep) $\times G$, en P en ω worden dientengevolge overeenkomstig groter.

Onder de Poincarégroep transformeert de Minkowskiruimte X nu op de voor de hand liggende wijze en transformeert V volgens de spin van de verschillende materievelden die hun waarden in V hebben.

(D) <u>Pure gravitatie</u>
(groep: Poincarégroep)

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & X = F \\
M &
\end{tikzcd}
\qquad \& \qquad \omega
$$

We laten nu al het irrelevante weg, en bekijken alleen nog alles wat met gravitatie te maken heeft. In feite is dit de situatie bij (C) met G en V triviaal, dat wil zeggen met nul Yang-Mills- en nul materie-velden.

Pure gravitatie wordt dus niet als pure Yang-Millstheorie beschreven door bundel + connectie van de Poincarégroep zonder meer, maar in combinatie met coördinaatvelden op de bundel. Deze kunnen met behulp van de groep weggetransformeerd worden, maar geven toch extra structuur. (Dit is analoog aan de situatie bij het Stückelberg model. Daar kan een scalair veld weggetransformeerd worden, maar dit veld kan ook niet weggelaten worden zonder de theorie te veranderen.)

We kunnen het diagram bij (D) suggestiever schrijven als

$$
\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
M & & X
\end{tikzcd}
$$

Hierbij zijn zowel M als X vierdimensionale tijdruimtes. Evenwel is M een structuurloos C^{∞}-oppervlak, de basis-varieteit uit de algemene relativiteits theorie, en is X de vlakke Minkowski-ruimte, met indefiniet inproduct

δ , etcetera. Ook transformeert M niet onder locale translaties en rotaties uit de Poincarégroep, en transformeert X wél onder dergelijke translaties en rotaties.

Resumerend wat er aan M en F verandert bij de overgang van paragraaf 2 naar paragraaf 7: M placht de vlakke Minkowskiruimte te zijn, en is nu een structuurloze C^∞-variëteit. F placht een representatieruimte te zijn, waarin de materievelden hun waarde hadden, en is nu de vlakke Minkowskiruimte.

* * *

(7.4) <u>Definitie</u>. Zij G een Lie-groep, F een C^∞-varieteit, en ρ een C^∞-linkswerking op F. Dan verstaan we onder een ijktheorie van ρ een drietal (vergelijk (2.9)):

(i) een G-hoofdbundel $\pi : P \to M$,

(ii) een connectie ω op P,

(iii) een equivariante C^∞-afbeelding $\alpha : P \to F$.

We noemen P de bundel van de ijktheorie.

(7.5) <u>Eigenschappen</u>. Een ijktheorie als gedefinieerd in (7.4) heeft nu de volgende eigenschappen:

Correspondentie met bestaande theorieën.

In paragraaf 8 tot en met 10 zullen we zien dat voor geschikte groep G, voor F een vlakke tijdruimte (superruimte), en ρ de voor de hand liggende werking van G op F, de componenten van de verschillende objecten uit de bijbehorende ijktheorie zo kunnen worden gedefinieerd dat de resulterende theorie samenvalt met één van de theorieën uit paragraaf 4 tot en met 6, maar dan zonder constraints.

Autonome eigenschappen.

- interne consistentie. Dit is de existentie-eigenschap: voor gegeven ρ bestaat er een ijktheorie van ρ . Dit volgt direct uit:
- incorporatie van de ongeijkte theorie: Gegeven een willekeurige veldconfiguratie $\varphi : M \to F$ is er een ijktheorie die daar mee correspondeert. Dit is het onderwerp van

(7.14), (7.15).
- minimale koppeling en resulterende locale symmetrie: Dit zijn (7.11), (7.13) en (7.10).

(7.6) <u>Definitie</u>. Zij G een Lie-groep en $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel. Dan definieren we bij P de connectiebundel, als de C^∞-bundel over P

$$\pi_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to P$$

met

$$\mathcal{P} = \{ (p, \omega') \mid p \in P,\ \omega' : T_pP \to \mathfrak{g} \text{ lineair},\ \omega' \circ \sigma_p = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \}$$
$$\pi_{\mathcal{P}}(p, \omega') = p \quad \text{voor} \quad (p, \omega') \in \mathcal{P}.$$

We definieren verder de linkswerking $\rho_{\mathcal{P}}$ op $\mathcal{P}$ door

$$\rho_{\mathcal{P}}(g, (p, \omega')) = (\delta(g^{-1})\, p\ ,\ \mathrm{Ad}\,(g)\, \omega' \circ \delta(g)_*)$$
$$g \in G,\ (p, \omega') \in \mathcal{P},$$

met $\delta(g)_* : T_{\delta(g^{-1})p}P \to T_pP$
de afgeleide van $\delta(g)$ in $\delta(g^{-1})p$.

Zij nu verder gegeven een C^∞-linkswerking ρ op F als in (7.4), dan definieren we de ijkbundel van ρ bij de bundel P:

$$\pi_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to P$$

met

$$\mathcal{F} = \mathcal{P} \times F \quad \text{en} \quad \pi_{\mathcal{F}}((p, \omega'), f) = p \text{ voor } (p, \omega') \in P,\ f \in F.$$

Evenzo hebben we bij $\mathcal{F}$ de linkswerking $\rho_{\mathcal{F}} : G \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ gedefinieerd door

$$\rho_{\mathcal{F}}(g, (q,f)) = (\rho_{\mathcal{P}}(g,q), \rho(g,f)) \text{ voor } g \in G,\ q \in \mathcal{P},\ f \in F.$$

Onder een equivariante sectie van $\mathcal{F}$ wordt een equivariante C^{∞}-afbeelding

$$\beta : P \to \mathcal{F}$$

met

$$\pi_{\mathcal{F}} \circ \beta = \mathrm{id}_P$$

verstaan.

(7.7) Stelling. Zij ρ een werking als in (7.4), $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel, en $\mathcal{F}$ de bij ρ horende ijkbundel op P. Dan hoort bij iedere equivariante

$$\beta : P \to \mathcal{F}$$

een ijktheorie van ρ zó gedefinieerd dat als

$$\begin{aligned} \iota &: P \to P \\ \alpha &: P \to F \\ \text{en } \omega'_{\iota p} &: T_{\iota p} P \to \mathfrak{g} \quad \text{met} \end{aligned}$$

$$\beta(p) = ((\iota(p), \omega'_{\iota p}), \alpha(p)) \qquad \text{voor alle } p \in P,$$

en verder

$$\omega = \iota^* \omega'$$

dat dan P de bundel, ω de connectie en α de equivariante afbeelding van de ijktheorie is.
(slordige notatie: Er wordt de suggestie gewekt dat ω' een vorm op P is, maar $\omega'_{\iota p}$ hoeft niet door ιp vast te liggen.
Met $\omega = \iota^* \omega'$ wordt preciezer bedoeld: $\omega_p X_p = \omega'_{\iota p} (\iota_* X)_{\iota p}$

Bewijs. We moeten bewijzen dat P, ω, α als gedefinieerd in de formulering van de stelling voldoen aan definitie (7.4).

Voor P is dit triviaal, en α is equivariant omdat β equivariant is. Rest te bewijzen dat ω een connectie op P is. ((2.2))

(i) β equivariant $\Rightarrow \iota(\delta(g)\,p) = \delta(g)\,\iota p \Rightarrow$

$\iota_* \sigma_p(\Lambda) = \sigma_{\iota p}(\Lambda)$ voor $\Lambda \in \mathfrak{g} \Rightarrow$

$\omega_p\, \sigma_p = (\iota^* \omega')_p\, \sigma_p = \omega'_{\iota p} \circ \iota_* \sigma_p = \omega'_{\iota p} \circ \sigma_{\iota p} \overset{(7.6)}{=} \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$.

(ii) $\iota(\delta(g)\,p) = \delta(g)\,\iota p$ dus voldoende om $\delta(g)^* \omega' = \mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega'$ op $\iota[P]$ te bewijzen.

β equivariant $\Leftrightarrow \beta(\delta(g)\,p) = \rho\,(g^{-1})\,\beta(p) \Rightarrow$

$\omega'_{\delta(g)\iota p} = \mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega'_{\iota p}\, \delta(g^{-1})_*$.

Nu is dus $(\delta(g)^* \omega')_{\iota p}\, X_{\iota p} = \omega'_{\delta(g)\iota p}\,(\delta(g)_*\, X)_{\delta(g)\iota p} =$

$\mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega'_{\iota p}\,\delta(g^{-1})_*\,(\delta(g)_*\, X)_{\delta(g)\iota p} =$

$\mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,(\omega'_{\iota p}\, X_{\iota p})$. □

(7.8) <u>Stelling</u>. Onder de correspondentie van (7.7) corresponderen de equivariante secties van $\mathcal{F}$ bijectief met de ijktheorieën van ρ.
Er geldt dan, dat als β correspondeert met ω, α:

$$\beta(p) = ((p, \omega_p), \alpha(p)) \qquad \text{voor alle } p \in P.$$

<u>Bewijs</u>. Een equivariante sectie heeft buiten de condities van (7.7) ook $\pi_{\mathcal{F}} \circ \beta = \mathrm{id}_P \Leftrightarrow \iota = \mathrm{id}_P$. Hieruit volgt de relatie tussen β, ω en α onmiddelijk.
Bijectiviteit van de correspondentie:
injectiviteit:
Als β_1 en β_2 beide aanleiding geven tot ω, α dan is $\beta_1(p) = ((p, \omega_p), \alpha(p)) = \beta_2(p)$ voor alle p dus $\beta_1 = \beta_2$.
surjectiviteit:
Gegeven een connectie ω op P en een equivariante $\alpha : P \to F$.
Definieer $\beta : P \to \mathcal{F}$ door $\beta(p) = ((p, \omega_p), \alpha(p))$ voor $p \in P$.
Dan correspondeert β met ω, α. Te bewijzen dat β een equivariante sectie is:
De sectie-eigenschap is triviaal. Equivariantie (zie (2.6)):
$\delta(g^{-1})^* \omega = \mathrm{Ad}\,(g)\,\omega \Rightarrow \mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega_p\, \delta(g^{-1})_* = \omega_{\delta(g)\,p} \Rightarrow$

$(\delta(g)\,p, \omega_{\delta(g)p}) = (\delta(g)\,p, \mathrm{Ad}\,(g^{-1})\,\omega_p\, \delta(g^{-1})_*) =$

$$= \rho_{\mathcal{P}}(g^{-1})(p,\omega_p) \Rightarrow$$
$$\beta(\delta(g)p) = ((\delta(g)p, \omega_{\delta(g)p}), \alpha(\delta(g)p)) =$$
$$(\rho_{\mathcal{P}}(g^{-1})(p,\omega_p), \rho(g^{-1})\alpha(p)) = \rho_{\mathcal{F}}(g^{-1})((p,\omega_p),\alpha(p)) =$$
$$\rho_{\mathcal{F}}(g^{-1})\beta(p). \qquad \square$$

(7.9) <u>Definitie</u>. Laat ρ een werking op F als in (7.4) en $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel. Laat verder ω, ω' twee connecties op P en α, α' twee equivariante afbeeldingen $P \to F$. De twee ijktheorieën bepaald door ω, α respectievelijk ω', α' bij P heten equivalent als er een bijectie

$$\lambda : P \to P$$

bestaat, zodat geldt dat:

(i) λ commuteert met de werking: $\delta(g) \circ \lambda = \lambda \circ \delta(g) \quad (g \in G)$
en met de projectie: $\pi \circ \lambda = \pi$.

(ii) $\omega = \lambda^* \omega'$, $\quad \alpha = \alpha' \circ \lambda$.

(Er is een veel ruimer equivalentiebegrip mogelijk, bijvoorbeeld door ook diffeomorfismes in M te hebben. Dit hebben we niet nodig om de eigenschappen uit (7.5) te bewijzen, en we zullen er niet verder op in gaan.)

(7.10) <u>Stelling</u>. Laat ρ een werking op F als in (7.4), $\pi : P \to M$ een G-hoofdbundel, en $\mathcal{F}$ de ijkbundel van ρ bij P. Zij nu gegeven:

$\beta, \beta' : P \to \mathcal{F}$ equivariant, en
$g : M \to G$

met

$$\beta'(p) = \rho_{\mathcal{F}}(g(\pi p), \beta(p)) \quad \text{voor alle } p \in P,$$

dan corresponderen β en β' (op de wijze van (7.7)) met equivalente theorieën.

Bewijs. Definieer $\lambda : P \to P$ door $p \mapsto \delta(g\pi p)\, p$.
Equivariantie β', plus de relatie uit de gegevens:
$\beta'(\lambda p) = \beta'(\delta(g\pi p)\, p) = \rho_{\mathcal{F}}(g\pi p)\, \rho_{\mathcal{F}}((g\pi p)^{-1})\beta(p) = \beta(p) \Rightarrow \beta = \beta' \circ \lambda$.

Laat β en β' nu corresponderen met de ijktheorieën gegeven door ω, α respectievelijk ω', α'.
Dan hebben we:

$$\beta(p) = ((\iota p, \overline{\omega}_{\iota p}), \alpha(p)), \qquad \omega = \iota^* \overline{\omega}$$
$$\beta'(p) = ((\iota' p, \overline{\omega}'_{\iota' p}), \alpha'(p)), \qquad \omega' = \iota'^* \overline{\omega}'$$

Nu volgt uit $\beta = \beta' \circ \lambda$ dat $\iota = \iota' \circ \lambda$ en $\overline{\omega}_{\iota p} = \overline{\omega}'_{\iota \lambda p} \Rightarrow$

$$\omega_p X_p = (\iota^* \overline{\omega})_p X_p = \overline{\omega}_{\iota p}(\iota_* X)_{\iota p} = \overline{\omega}'_{\iota \lambda p}(\iota'_* \lambda_* X)_{\iota' \lambda p} = (\iota'^* \overline{\omega}')_{\lambda p}(\lambda_* X)_{\lambda p} = \omega'_{\lambda p}(\lambda_* X)_{\lambda p} = (\lambda^* \omega')_p X_p$$

$\omega = \lambda^* \omega'$.
en verder vanzelf dat $\alpha = \alpha' \circ \lambda$. □

(7.11) Definitie. Zij M en F C^∞-varieteiten. Een Lagrangeaan voor de ongeijkte theorie, de verzameling C^∞-functies $\{\phi : M \to F\}$, is een operatie die met iedere $\phi : M \to F$ een reële d-vorm L_ϕ op M associeert, waarbij d de dimensionaliteit van M is.
Een dergelijke Lagrangeaan heet van de eerste orde, als geldt dat voor $\phi, \phi' : M \to F$ en een zekere vaste $m \in M$,

$$\phi(m) = \phi'(m) \quad \text{en} \quad (\phi_*)_m = (\phi'_*)_m : T_m M \to T_{\phi(m)} F$$

dat dan ook geldt:

$$(L_\phi)_m = (L_{\phi'})_m.$$

Een dergelijke Lagrangeaan heet globaal invariant (onder de werking ρ), als geldt dat voor $\phi, \phi' : M \to F$, en voor zekere vaste $g \in G$,

$$\phi'(m) = \rho(g, \phi(m)) \qquad \text{voor alle } m \in M,$$

dat dan ook geldt:

$$L_\phi = L_{\phi'}.$$

Laat nu G een Lie-groep, en ρ een C^∞-linkswerking op F. Zij nu gegeven een G-hoofdbundel $\pi : P \to M$, dan is een Lagrangeaan van de geijkte theorie, de verzameling ijktheorieën bij ρ met als bundel P, een operatie die met iedere ω connectie op P en α equivariante afbeelding van P naar F een reële d-vorm $\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)}$ op M associeert.

(Eigenlijk zou je nog aan L en $\mathcal{L}$ willen opleggen dat ze invariant blijven onder diffeomorfismen van M. We zullen dit nergens gebruiken dus eisen dat hier niet. Deze eigenschap blijft wel behouden onder minimale koppeling (zie hierna))

(7.12) <u>Stelling</u>. Laat $L: \phi \mapsto L_\phi$ een globaal invariante Lagrangeaan van de eerste orde voor de ongeijkte theorie zijn. Dan bestaat er precies één $\mathcal{L}: (\omega,\alpha) \mapsto \mathcal{L}_{(\omega,\alpha)}$ Lagrangeaan voor de geijkte theorie zó dat als (ω,α) een ijktheorie bij ρ geeft, en $s: N \to P$ een locale sectie van P is, en $m \in N$ met $(s^*\omega)_m = 0$ dat dan $(\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)})_m = (L_{\alpha\circ s})_m$.

De operatie $L \mapsto \mathcal{L}$ die zo gedefinieerd wordt heet minimale koppeling.

<u>Bewijs</u>. Uniciteit: triviaal omdat uit (2.5) volgt dat er bij ieder punt $m \in M$ altijd een $s: N \to P$, locale sectie van P, bestaat met $(s^*\omega)_m = 0$. $(\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)})_m$ is dus eenduidig bepaald door (ω,α) en dus $\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)}$ ook, en dus ligt $\mathcal{L}$ eenduidig vast.
Existentie: We moeten laten zien dat als we $\mathcal{L}$ definiëren door de relatie $(\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)})_m = (L_{\alpha\circ s})_m$ dat de rechterkant van deze uitdrukking niet van de keuze van s afhangt.

We hebben dus s, s' met $(s^*\omega)_m = (s'^*\omega)_m = 0$ en moeten bewijzen dat $(L_{\alpha\circ s})_m = (L_{\alpha\circ s'})_m$.
Definieer $g \in G$ door $s(m) = \delta(s'(m), g^{-1})$ en $s'' := \delta(g^{-1}) \circ s'$ dan: $s''(m) = s(m)$; uit globale invariantie van L: $(L_{\alpha\circ s''})_m = (L_{\alpha\circ s})_m$; en uit (2.5): $(s''^*\omega)_m = 0$.
Nu is $(s^*\omega)_m = (s''^*\omega)_m$ zodat $(s_*)_m = (s''_*)_m$.
Dus ook $((\alpha\circ s)_*)_m = ((\alpha\circ s'')_*)_m$. Eveneens $\alpha\circ s''(m) = \alpha\circ s(m)$, dus uit de eerste orde van L: $(L_{\alpha\circ s})_m = (L_{\alpha\circ s''})_m$. □

(7.13) Stelling. Laat L een globaal invariante Lagrangeaan van de eerste orde voor de ongeijkte theorie zijn, en $\mathcal{L}$ die voor de geijkte theorie uit minimale koppeling. Laat verder (ω, α) en (ω', α') equivalente ijktheorieën bij dezelfde bundel $\pi : P \to M$ geven. Dan

$$\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)} = \mathcal{L}_{(\omega',\alpha')}$$

(Met (7.10) valt deze stelling te interpreteren als locale invariantie van de Lagrangeaan uit minimale koppeling.)

Bewijs. We hebben dus een $\lambda : P \to P$ als in (7.9) met in het bijzonder $\omega = \lambda^*\omega'$, $\alpha = \alpha'\circ\lambda$.
Zij nu $m \in N \subset M$, $s: N \to P$ locale sectie, $s^*\omega = 0$.
Definieer $s' := \lambda \circ s$ dan $s'^*\omega' = s^*\lambda^*\omega' = s^*\omega = 0$ en $\alpha'\circ s' = \alpha'\circ\lambda\circ s = \alpha\circ s$.

$$\text{Dus } (\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)})_m \underset{s^*\omega=0}{=} (L_{\alpha\circ s})_m \underset{\alpha\circ s=\alpha'\circ s'}{=} (L_{\alpha'\circ s'})_m \underset{s'^*\omega'=0}{=} (\mathcal{L}_{(\omega',\alpha')})_m.$$

Dit verhaal geldt voor alle $m \in M \Rightarrow \mathcal{L}_{(\omega,\alpha)} = \mathcal{L}_{(\omega',\alpha')}$. □

(7.14) Definitie. Zij $\phi: M \to F$ een C^∞-afbeelding (M, F C^∞-variëteiten, ρ linkswerking van Lie-groep G op F).
De ijktheorie met ϕ geassocieerd is nu:

(i) de G-hoofdbundel: $P := M \times G$, $\pi : (m,g) \mapsto m$
(ii) de connectie: $: T_{(m,g)}P = T_mM \times T_gG \to \mathfrak{g}$

$$(X_m, Y_g) \mapsto (L_{g^{-1}*}Y)_e \in T_eG$$

(iii) de equivariante afbeelding: $\alpha : P = M \times G \to F$

$$(m,g) \mapsto \rho(g^{-1}, \phi(m))$$

(7.15) <u>Stelling</u>. Laat $\mathcal{L}$ gedefinieerd zijn uit L als in (7.12) en laat (ω, α) de ijktheorie bij $\phi : M \to F$ zijn als in (7.14) dan $L_\phi = \mathcal{L}_{(\omega, \alpha)}$.

<u>Bewijs</u>. Definieer $s: M \to P = M \times G$ door $m \mapsto (m,e)$. Dan duidelijk $s^*\omega = 0$, $\alpha \circ s = \phi$ dus volgens de definitie van minimale koppeling $\mathcal{L}_{(\omega,\alpha)} = L_{\alpha \circ s} = L_\phi$. □

8 Einstein-Cartan gravitatie

Laat G de Poincarégroep zijn, X de 4-dimensionale Minkowski-ruimte, en ρ de normale werking van G op X.
We beschouwen nu een ijktheorie van de werking ρ als in (7.3)(D). Deze wordt gegeven door de objecten:

(i)	een G-hoofdbundel	$\pi : P \to M$
(ii)	een equivariante C^∞-afbeelding	$\alpha : P \to X$
(iii)	een connectie op P:	ω

Samen met de definities van de verschillende hier gebruikte begrippen uit paragraaf 2 en 7 is dit een volledige beschrijving van het model.

Er geldt nu dat de structuur van deze objecten overeenkomt met de velden van Einstein-Cartan gravitatie. Hiertoe moeten we laten zien dat we bij een locale sectie s: $N \to P$ velden

$$\omega_\mu{}^a{}_b\ ,\ e_\mu{}^a$$

kunnen definiëren die transformatieregels hebben die een generalisatie zijn van (3.10). Over de wijze waarop ω en e in termen van π, α, ω en s zijn gedefinieerd en de manier waarop ze transformeren onder overgang op een andere sectie s' handelt deze paragraaf.

* * *

Laat nu dus s: $N \to P$ een locale sectie van P zijn, $N \subset M$, dan hebben we als in (2.4) en (2.6):

$W := s^*\omega$ een $\mathfrak{g}$-waardige 1-vorm op N,

$\varphi := \alpha \circ s$ een C^∞-afbeelding $\varphi : N \to X$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ N \arrow[ur, "s"] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & M & X' \end{tikzcd}$$

De verschillende velden definiëren we alleen voor punten waar $\det|(\varphi_*)\neq 0$. We beperken ons daarom hier tot s met $\varphi : N \to X' := \varphi[N] \subset X$ een diffeomorfisme. Omdat $X \cong \mathbb{R}^4$, is φ dan een kaart van M, een coördinatenstelsel op N.

We vormen nu de $\mathfrak{g}$-waardige 1-vorm $\varphi^{-1*}W$ op X'.
Dan definiëren we $\omega_\mu{}^a{}_b$ en $e_\mu{}^a$ op X' door:

$$\varphi^{-1*}W = -(\tfrac{1}{2}\omega_\mu{}^a{}_b M_a{}^b(x) + h_\mu{}^a P_a(x))\,dx^\mu$$
$$e_\mu{}^a = \delta_\mu{}^a + h_\mu{}^a$$

waarbij x^μ de (vaste) standaardcoördinaten van de Minkowski-ruimte en $M_a{}^b(x)$, $P_a(x)$ een x-afhankelijke basis van $\mathfrak{g}$ $(x\in X)$, zoals nog te definiëren in (8.5). Dit voltooit onze definitie van ω en e.

We merken drie verschillen op ten opzichte van de manier waarop we bij (2.9) de componenten als ijkvelden definieerden:

(i) Daar was M de Minkowskiruimte, met coördinaten x^μ, in plaats van X, en bekeken we W in plaats van $\varphi^{-1*}W$.
(ii) Daar namen we de componenten naar een vaste basis van $\mathfrak{g}$, in plaats van naar een variabele.
(iii) Daar was er geen herdefinitie van het ijkveld nodig: $h_\mu{}^a$ zou daar zélf het gewenste ijkveld geweest zijn in plaats van de combinatie $h_\mu{}^a + \delta_\mu{}^a$.

Om deze verschillen te accentueren komen ze alledrie ook terug in de notatie:

(i) Op N hebben we de vastgekozen coördinaten $\hat{x}^{\hat{\mu}}$ met indices $\hat{\mu}$.
(ii) De vaste basis van $\mathfrak{g}$ gedefinieerd als $M_a{}^b(0)$, $P_a(0)$ met 0 de oorsprong van de Minkowskiruimte, noemen we $\tilde{M}_a{}^b$, $\tilde{P}_a$.
(iii) De $P_a\,dx^\mu$ component van $\varphi^{-1*}W$ heet $h_\mu{}^a$ inplaats van $e_\mu{}^a$.

De manier waarop de x-afhankelijke $\mathfrak{g}$-basis is gekozen, is als volgt. Laat

$$\tilde{g}: X \to G$$

een afbéelding zijn met

$$x = \rho\,(\tilde{g}(x), x_0) \qquad \text{voor alle } x \in X, \text{ en zekere vastgekozen } x_0 \in X,$$

en laat $\tilde{\tau}_A$ een vastgekozen basis van $\mathfrak{g}$ zijn.
Dan definiëren we

$$\tau_A\,(x) = \mathrm{Ad}\,(\tilde{g}(x))\,\tilde{\tau}_A.$$

Als we $\tilde{g}(x_0) = e$ kiezen (kan, want $x_0 = \rho\,(e, x_0)$), dan geldt als boven bij (ii): $\tilde{\tau}_A = \tau_A\,(x_0)$.

In het geval dat X de Minkowskiruimte is, en G de translatiegroep T(4) bevat, is x_0 de oorsprong van de Minkowskiruimte, en

$$\tilde{g}(x) = \exp(-x^{\mu}\delta_{\mu}{}^{a}\tilde{P}_a)\,,$$

de translatie die de oorsprong op x afbeeldt.

* * *

We gaan nu expliciet narekenen dat we de transformatieregels van Einstein-Cartan gravitatie terugvinden.
Hiertoe definiëren we naast $\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}$, $h_{\mu}{}^{a}$ tevens $\tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{a}{}_{b}$, $\tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{a}$ en $\tilde{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}$, $\tilde{h}_{a}{}^{b}$ door:

$$W = -(\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{a}{}_{b}\tilde{M}_{a}{}^{b} + \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{a}\tilde{P}_{a})\,d\hat{x}^{\hat{\mu}} \tag{8.1}$$

$$\varphi^{-1*}W = -(\tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_{\mu}{}^{a}{}_{b}\tilde{M}_{a}{}^{b} + \tilde{h}_{\mu}{}^{a}\tilde{P}_{a})\,dx^{\mu} =$$
$$-(\tfrac{1}{2}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}M_{a}{}^{b} + h_{\mu}{}^{a}P_{a})\,dx^{\mu}$$

met $\tilde{M}_{a}{}^{b}$, $\tilde{P}_{a}$ de normale generatoren van de Poincarégroep, als in (3.1), en $M_{a}{}^{b}$, P_{a} als gezegd x-afhankelijk.

De transformatieparameters van de infinitesimale transformatie van s naar s' = δ (s,g) met g = exp $(-\Lambda)$ luiden $\tilde{\varepsilon}^a{}_b$, $\tilde{\xi}_P{}^a$ respectievelijk $\varepsilon^a{}_b$, $\xi_P{}^a$ met

$$\Lambda = \tfrac{1}{2}\tilde{\varepsilon}^a{}_b \tilde{M}_a{}^b + \tilde{\xi}_P{}^a \tilde{P}_a = \tfrac{1}{2}\varepsilon^a{}_b M_a{}^b + \xi_P{}^a P_a \tag{8.2}$$

Om de relatie tussen de geslangde en ongeslangde velden te vinden, kunnen we kijken naar de transformatie van een punt (y^μ) van X. $((x^\mu)$ is de parameter die $M_a{}^b$, P_a en dus de ongeslangde velden parametriseert)

$$\begin{aligned} \delta y^\mu = {} & -\delta^\mu{}_a \tilde{\xi}_P{}^a + \delta^\mu{}_a \tilde{\varepsilon}^a{}_b \delta^b{}_\nu y^\nu = \\ & -\delta^\mu{}_a \xi_P{}^a + \delta^\mu{}_a \varepsilon^a{}_b \delta^b{}_\nu (y^\nu - x^\nu) = \\ & -\delta^\mu{}_a (\xi_P{}^a + \varepsilon^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu) + \delta^\mu{}_a \varepsilon^a{}_b \delta^b{}_\nu y^\nu \end{aligned} \tag{8.3}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\mu{}^a{}_b &= \omega_\mu{}^a{}_b \\ \tilde{\varepsilon}^a{}_b &= \varepsilon^a{}_b \\ \tilde{h}_\mu{}^a &= h_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu \\ \tilde{\xi}_P{}^a &= \xi_P{}^a + \varepsilon^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu \end{aligned} \tag{8.4}$$

De definitie van $M_a{}^b(x)$, $P_a(x)$ is dus:

$$\begin{aligned} M_{ab}(x) &= \tilde{M}_{ab} + \tilde{P}_{[a}\delta_{b]\mu} x^\mu \\ P_a(x) &= \tilde{P}_a \end{aligned} \tag{8.5}$$

(Zoals gezegd zijn $\tilde{M}_a{}^b$, $\tilde{P}_a$ de normale generatoren van de Poincarégroep als in (3.1))

De velden $\tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^a{}_b$, $\tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^a$ (met als parameters $\tilde{\varepsilon}^a{}_b$, $\tilde{\xi}_P{}^a$) hebben nu precies het transformatiegedrag van de Yang-Millstheorie van de Poincarégroep (3.2):
(de velden transformeren tot nader order alle voor een vaste $m \in N$!)

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^a{}_b &= \tilde{D}_{\hat{\mu}} \tilde{\varepsilon}^a{}_b \\ \delta \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^a &= \tilde{\varepsilon}^a{}_b \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^b + \tilde{D}_{\hat{\mu}} \tilde{\xi}_P{}^a \end{aligned} \tag{8.6}$$

(Als nu $W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}}$ een van de $\tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^a{}_b$, $\tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^a$ is dan geldt dat

$W_\mu{}^{\tilde{A}} = \dfrac{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}{\partial x^\mu} W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}} \Rightarrow \delta W_\mu{}^{\tilde{A}} = \dfrac{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}{\partial x^\mu} \delta W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}} + \delta\left(\dfrac{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}{\partial x^\mu}\right) W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}}$

en omdat $\delta(\partial_\mu \hat{x}^{\hat{\mu}}) \partial_{\hat{\mu}} x^\nu = -\partial_\mu \hat{x}^{\hat{\mu}} \delta(\partial_{\hat{\mu}} x^\nu) = \partial_\mu(\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu)$ want $\delta x^\nu = -\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu$

$\Rightarrow \delta W_\mu{}^{\tilde{A}} = \dfrac{\partial \hat{x}^{\hat{\mu}}}{\partial x^\mu} \delta W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}} - \partial_\mu(-\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu) W_\nu{}^{\tilde{A}}$,)

Er geldt dus:

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\omega}_\mu{}^a{}_b &= \tilde{D}_\mu \tilde{\varepsilon}^a{}_b - \partial_\mu(-\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu) \tilde{\omega}_\nu{}^a{}_b \\ \delta \tilde{h}_\mu{}^a &= \tilde{\varepsilon}^a{}_b \tilde{h}_\mu{}^b + \tilde{D}_\mu \xi^a - \partial_\mu(-\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu) \tilde{h}_\nu{}^a \end{aligned} \tag{8.7}$$

We vullen hier nu (8.4) in in en krijgen:

$$\begin{aligned} \delta \omega_\mu{}^a{}_b &= D_\mu \varepsilon^a{}_b - \partial_\mu(-\xi_P{}^c \partial_c{}^\nu) \omega_\nu{}^a{}_b \\ \delta h_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b (h_\mu{}^b + \delta_\mu{}^b) - \partial_\mu(-\xi_P{}^b \delta_b{}^\nu)(h_\nu{}^a + \delta_\nu{}^a) \end{aligned} \tag{8.8}$$

We beschouwen de $\omega_\mu{}^a{}_b$ en $h_\mu{}^a$ nog steeds als reële velden op N, maar we willen het transformatiegedrag voor vaste $x \in X'$.
Omdat voor vaste m: $\delta x^\nu = -\xi_P{}^c \delta_c{}^\nu$ is dus

$$\delta\omega_\mu{}^a{}_b = D_\mu \varepsilon^a{}_b - \partial_\mu(-\xi_P{}^c\delta_c{}^\nu)\omega_\nu{}^a{}_b - (-\xi_P{}^c\delta_c{}^\nu)\partial_\nu\omega_\mu{}^a{}_b \quad (8.9)$$
$$\delta h_\mu{}^a = \varepsilon^a{}_b(h_\mu{}^b + \delta_\mu{}^b) - \partial_\mu(-\xi_P{}^b\delta_b{}^\nu)(h_\nu{}^a + \delta_\nu{}^a) - (-\xi_P{}^c\delta_c{}^\nu)\partial_\nu h_\mu{}^a$$

(Hier en hierna transformeren de velden dus voor vaste $x \in X'$!)

Als we nu definieren:

$$e_\mu{}^a = h_\mu{}^a + \delta_\mu{}^a \quad (8.10)$$
$$\xi^\mu = -\xi_P{}^a\delta_a{}^\mu$$

dan vinden we precies de generalisatie van (3.10), de transformatie van de velden uit de Einstein-Cartan theorie:

$$\delta\omega_\mu{}^a{}_b = D_\mu\varepsilon^a{}_b - \partial_\mu\xi^\nu\omega_\nu{}^a{}_b - \xi^\nu\partial_\nu\omega_\mu{}^a{}_b \quad (8.11)$$
$$\delta e_\mu{}^a = \varepsilon^a{}_b e_\mu{}^b - \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a - \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a$$

(Vreemd genoeg zorgt (8.10) er voor dat de $\delta_\mu{}^a$ in alle transformaties, die afkomstig was van de definitie $\tilde{g}(x) = \exp(-x^\mu\delta_\mu{}^a P_a)$, weer uit de transformatieregels verdwijnt.)

9 Conforme gravitatie

De constructie in deze paragraaf is identiek aan die in paragraaf 8, alleen wordt de ijktheorie genomen van de werking van een grotere groep, de conforme groep, op de Minkowski-ruimte.
Eveneens als in paragraaf 8 definiëren we hier met
$\tau_A = M_a{}^b, P_a, K_a, D$:

$$\tau_A(x) = \mathrm{Ad}\,(\exp(-x^\mu \delta_\mu{}^a P_a))\,\tilde{\tau}_A. \tag{9.1}$$

We specificeren nu eerst de werking van de conforme groep, voor een infinitesimale transformatie met parameters $\tilde{\varepsilon}^a{}_b$, $\tilde{\xi}_P{}^a$, $\tilde{\Lambda}_K{}^a$, $\tilde{\Lambda}_D$: (analoog van (8.3))

$$\begin{aligned}\delta x^\mu = &-\delta^\mu{}_a \tilde{\xi}_P{}^a + \delta^\mu{}_a \tilde{\varepsilon}^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu - \tilde{\Lambda}_D x^\mu \\ &+ \tilde{\Lambda}_{Ka} \delta^a{}_\nu x^\nu x^\mu - \tfrac{1}{2} \tilde{\Lambda}_K{}^a \delta_a{}^\mu x^2\end{aligned} \tag{9.2}$$

Hieruit volgt net als in paragraaf 8 het analoog van (8.4):

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_\mu{}^{ab} &= \omega_\mu{}^{ab} - 2\delta^{[a}{}_\nu x^\nu f_\mu{}^{b]} \\
\tilde{\varepsilon}^{ab} &= \varepsilon^{ab} - 2\delta^{[a}{}_\nu x^\nu \Lambda_K{}^{b]} \\
\tilde{h}_\mu{}^a &= h_\mu{}^a + \omega_\mu{}^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu - b_\mu \delta^a{}_\nu x^\nu \\
&\quad - f_{\mu b} \delta^b{}_\nu \delta^a{}_\tau x^\nu x^\tau + \tfrac{1}{2} f_\mu{}^a x^2 \\
\tilde{\xi}_P{}^a &= \xi_P{}^a + \varepsilon^a{}_b \delta^b{}_\nu x^\nu - \Lambda_D \delta^a{}_\nu x^\nu \\
&\quad - \Lambda_{Kb} \delta^b{}_\nu \delta^a{}_\tau x^\nu x^\tau + \tfrac{1}{2} \Lambda_K{}^a x^2 \\
\tilde{f}_\mu{}^a &= f_\mu{}^a \\
\tilde{\Lambda}_K{}^a &= \Lambda_K{}^a \\
\tilde{b}_\mu &= b_\mu + f_{\mu a} \delta^a{}_\nu x^\nu \\
\tilde{\Lambda}_D &= \Lambda_D + \Lambda_{Ka} \delta^a{}_\nu x^\nu
\end{aligned} \tag{9.3}$$

We kunnen nu als in paragraaf 8 de transformatieregels voor de $W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}}$, de $W_{\mu}{}^{\tilde{A}}$ en de $W_{\mu}{}^{A}$ voor zekere $m \in N$ en die voor de $W_{\mu}{}^{A}$ voor zekere $x \in X'$ uitrekenen (analoog (8.6) tot en met (8.9)).

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\omega}_{\hat{\mu}}{}^{ab} &= \tilde{D}_{\hat{\mu}} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \tilde{\xi}_P^{[a} \tilde{f}_{\hat{\mu}}{}^{b]} + 2 \tilde{\Lambda}_K^{[a} \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{b]} && (9.4) \\
\delta \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{a} &= \tilde{\varepsilon}^{a}{}_{b} \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{b} + \tilde{D}_{\hat{\mu}} \tilde{\xi}_P{}^{a} - \tilde{\Lambda}_D \tilde{h}_{\hat{\mu}}{}^{a} && (= (4.3)) \\
\delta \tilde{f}_{\hat{\mu}}{}^{a} &= \tilde{\varepsilon}^{a}{}_{b} \tilde{f}_{\hat{\mu}}{}^{b} + \tilde{D}_{\hat{\mu}} \tilde{\Lambda}_K{}^{a} + \tilde{\Lambda}_D \tilde{f}_{\hat{\mu}}{}^{a} \\
\delta \tilde{b}_{\hat{\mu}} &= -\tilde{\xi}_P{}^{a} \tilde{f}_{\hat{\mu}a} + \tilde{\Lambda}_K{}^{a} \tilde{h}_{\hat{\mu}a} + \partial_{\hat{\mu}} \tilde{\Lambda}_D && (\delta W_{\hat{\mu}}{}^{\tilde{A}} \text{ voor vaste } m \in N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{\omega}_{\mu}{}^{ab} &= \tilde{D}_{\mu} \tilde{\varepsilon}^{ab} + 2 \tilde{\xi}_P^{[a} \tilde{f}_{\mu}{}^{b]} + 2 \tilde{\Lambda}_K^{[a} \tilde{h}_{\mu}{}^{b]} - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \tilde{\omega}_{\nu}{}^{ab} && (9.5) \\
\delta \tilde{h}_{\mu}{}^{a} &= \tilde{\varepsilon}^{a}{}_{b} \tilde{h}_{\mu}{}^{b} + \tilde{D}_{\mu} \tilde{\xi}_P{}^{a} - \tilde{\Lambda}_D \tilde{h}_{\mu}{}^{a} - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \tilde{h}_{\nu}{}^{a} \\
\delta \tilde{f}_{\mu}{}^{a} &= \tilde{\varepsilon}^{a}{}_{b} \tilde{f}_{\mu}{}^{b} + \tilde{D}_{\mu} \tilde{\Lambda}_K{}^{a} + \tilde{\Lambda}_D \tilde{f}_{\mu}{}^{a} - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \tilde{f}_{\nu}{}^{a} \\
\delta \tilde{b}_{\mu} &= -\tilde{\xi}_P{}^{a} \tilde{f}_{\mu a} + \tilde{\Lambda}_K{}^{a} \tilde{h}_{\mu a} + \partial_{\mu} \tilde{\Lambda}_D - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \tilde{b}_{\nu} \\
& && (\delta W_{\mu}{}^{\tilde{A}} \text{ voor vaste } m \in N)
\end{aligned}$$

Vul (9.3) in:

$$\begin{aligned}
\delta \omega_{\mu}{}^{ab} &= D_{\mu} \varepsilon^{ab} + 2 \Lambda_K^{[a} (h_{\mu}{}^{b]} + \delta_{\mu}{}^{b]}) - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \omega_{\nu}{}^{ab} && (9.6) \\
\delta h_{\mu}{}^{a} &= \varepsilon^{a}{}_{b} (h_{\mu}{}^{b} + \delta_{\mu}{}^{b}) - \Lambda_D (h_{\mu}{}^{a} + \delta_{\mu}{}^{a}) - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu})(h_{\nu}{}^{a} + \delta_{\nu}{}^{a}) \\
\delta f_{\mu}{}^{a} &= \varepsilon^{a}{}_{b} f_{\mu}{}^{b} + D_{\mu} \Lambda_K + \Lambda_D f_{\mu}{}^{a} - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) f_{\nu}{}^{a} \\
\delta b_{\mu} &= \Lambda_K{}^{a} (h_{\mu a} + \delta_{\mu a}) + \partial_{\mu} \Lambda_D - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) b_{\nu} \\
& && (\delta W_{\mu}{}^{A} \text{ voor vaste } m \in N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \omega_{\mu}{}^{ab} &= D_{\mu} \varepsilon^{ab} + 2 \Lambda_K^{[a} (h_{\mu}{}^{b]} + \delta_{\mu}{}^{b]}) - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \omega_{\nu}{}^{ab} - (-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \partial_{\nu} \omega_{\mu}{}^{ab} && (9.7) \\
\delta h_{\mu}{}^{a} &= \varepsilon^{a}{}_{b} (h_{\mu}{}^{b} + \delta_{\mu}{}^{b}) - \Lambda_D (h_{\mu}{}^{a} + \delta_{\mu}{}^{a}) - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu})(h_{\nu}{}^{a} + \delta_{\nu}{}^{a}) - (-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \partial_{\nu} h_{\mu}{}^{a} \\
\delta f_{\mu}{}^{a} &= \varepsilon^{a}{}_{b} f_{\mu}{}^{b} + D_{\mu} \Lambda_K{}^{a} + \Lambda_D f_{\mu}{}^{a} - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) f_{\nu}{}^{a} - (-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \partial_{\nu} f_{\mu}{}^{a} \\
\delta b_{\mu} &= \Lambda_K{}^{a} (h_{\mu a} + \delta_{\mu a}) + \partial_{\mu} \Lambda_D - \partial_{\mu}(-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) b_{\nu} - (-\xi_P{}^{c} \delta_c{}^{\nu}) \partial_{\nu} b_{\mu} \\
& && (\delta W_{\mu}{}^{A} \text{ voor vaste } x \in X')
\end{aligned}$$

Wederom:

$$e_\mu{}^a = h_\mu{}^a + \delta_\mu{}^a \qquad (9.8)$$

$$\xi^\mu = -\,\xi_P{}^a\,\delta_a{}^\mu \qquad (\,=(8.10))$$

en we krijgen de velden, met transformaties, van conforme gravitatie zonder constraints, de uitbreiding van (4.9):

$$\begin{aligned}
\delta\omega_\mu{}^{ab} &= D_\mu\varepsilon^{ab} + 2\Lambda_K{}^{[a}e_\mu{}^{b]} - \partial_\mu\xi^\nu\omega_\nu{}^{ab} - \xi^\nu\partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} \\
\delta e_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b\,e_\mu{}^b - \Lambda_D\,e_\mu{}^a - \partial_\mu\xi^\nu e_\nu{}^a - \xi^\nu\partial_\nu e_\mu{}^a \\
\delta f_\mu{}^a &= \varepsilon^a{}_b\,f_\mu{}^b + D_\mu\Lambda_K{}^a + \Lambda_D\,f_\mu{}^a - \partial_\mu\xi^\nu f_\nu{}^a - \xi^\nu\partial_\nu f_\mu{}^a \\
\delta b_\mu &= \Lambda_K{}^a\,e_{\mu a} + \partial_\mu\Lambda_D - \partial_\mu\xi^\nu b_\nu - \xi^\nu\partial_\nu b_\mu
\end{aligned} \qquad (9.9)$$

10 Conforme supergravitatie

We willen nu het model van paragraaf 7 toepassen voor conforme supergravitatie. Hiertoe moeten de verschillende objecten die in de definitie van een ijktheorie (7.4) voorkomen gegeneraliseerd worden.

Ik heb verder niet uitgezocht wat onder de groep (in stijl: supergroep) van een gegradeerde algebra moet worden verstaan, of wat de definitie van een C^∞-variëteit is, indien de kaarten waarden in een ruimte hebben met anticommuterende variabelen. Om een definitie van verkaarting te kunnen geven moeten we dan niet naar C^∞-variëteiten, maar naar analytische variëteiten kijken.

Het is echter mogelijk om puur formeel de weg van paragraaf 8 en 9 te bewandelen, en er dus toch zeker van te zijn als resultaat een sluitende algebra en dus een goede theorie te vinden. Hiervoor is het nodig slechts twee objecten te generaliseren uit paragraaf 7:

(i) De Lie-algebra $\mathfrak{g}$ wordt als gezegd vervangen door een gegradeerde Lie-algebra met waarden in $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$

(ii) De ruimte F = X moet gegeneraliseerd worden naar een ruimte met zowel commuterende als anticommuterende coördinaten.

In het geval van conforme supergravitatie is $\mathfrak{g}$ nu de algebra die gegeven wordt in (5.2), en is X de zogenaamde superruimte. Deze is een generalisatie op de Minkowski-ruimte en heeft coördinaten

$$(x^\mu, \theta^i) \tag{10.1}$$

met x^μ reëel, commuterend, θ^i Majorana spinor voor $i=1,\dots,N$ en anticommuterend. Deze ruimte is dus 4+4N-dimensionaal: hij heeft 4 bosonische en 4N fermionische coördinaten.

We kunnen nu bij de afbeelding $\rho : G \times F \rightarrow F$, de afbeelding $\rho(f): G \rightarrow F$ bekijken, en daarvan de afgeleide:
$\rho(f)_*: \mathfrak{g} \rightarrow TF = F$, waarbij we hebben aangenomen dat F een lineaire (super-)ruimte en dus zijn eigen raakruimte is, wat hij in het geval van de superruimte inderdaad is. We kunnen nu de f weer laten lopen en krijgen:
$\rho_*: \mathfrak{g} \times F \rightarrow F$. Hierin komt G niet meer voor en we kunnen ρ geven door deze afbeelding expliciet in formulevorm op te schrijven.

Voor N=1 wordt dit:
(dit is de generalisatie van (8.3) en (9.2). Aangezien ik toch niet ga rekenen heb ik de slangetjes boven de transformatieparameters maar weggelaten, en alle indices (met $\delta_\mu{}^a$ dus niet met $e_\mu{}^a$) latijns gemaakt.)

$$\begin{aligned} \delta x^a = \; & \varepsilon^a{}_b x^b \\ & - \xi_P{}^a \\ & + \Lambda_{Kb} x^b x^a - \tfrac{1}{2} \Lambda_K{}^a x^2 - \tfrac{1}{4} \Lambda_K{}^a (\bar\theta\theta)^2 \\ & - \Lambda_D x^a \\ & + \bar\varepsilon \gamma^a \theta \\ & - \tfrac{1}{2} \bar\eta \not{x} \gamma^a \theta - \tfrac{1}{2} \bar\eta \gamma^a \theta (\bar\theta\theta) \end{aligned} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} \delta\theta = \; & \tfrac{1}{2} \varepsilon^{ab} \sigma_{ab} \theta \\ & - \tfrac{1}{2} \not{\Lambda}_K \not{x} \theta + \tfrac{1}{2} \not{\Lambda}_K \theta (\bar\theta\theta) \\ & - \tfrac{1}{2} \Lambda_D \theta \\ & - \tfrac{1}{2} i \Lambda_A \gamma_5 \theta \\ & - \varepsilon \\ & - \tfrac{1}{2} (\eta (\bar\theta\theta) + \gamma_5 \eta (\bar\theta \gamma_5 \theta)) - \tfrac{1}{4} \gamma_5 \gamma^a \eta (\bar\theta \gamma_5 \gamma^a \theta) - \tfrac{1}{2} \not{x} \eta \end{aligned}$$

(bron, modulo rekenfouten: [van Nieuwenhuizen])

Zonder de theorie expliciet uit te schrijven kunnen we het aantal vrijheidsgraden van de theorie uitrekenen, op dezelfde manier als in paragraaf 6, en we verwachten dat het aantal bosonische vrijheidsgraden gelijk zal zijn aan het aantal fermionische. We bekijken nu eerst de verschillende aantallen voor de algemene $N \geq 1$ theorie als velden op (x, θ^i) :

het aantal onafhankelijke velden:
bosonisch: $4(N^2+15)+4N(8N) = 36N^2+60$
fermionisch: $4 \cdot 8N + 4N(N^2+15) = 4N^3+92N$
het aantal onafhankelijke symmetrieën:
bosonisch: N^2+15
fermionisch: $8N$
het aantal vrijheidsgraden:
bosonisch: $(36N^2+60)-(N^2+15) = 35N^2+45$
fermionisch: $(4N^3+92N)-8N = 4N^3+84N$

Nu correspondeert één veld, symmetrie of vrijheidsgraad op (x, θ^i) altijd met $2^{4N-1}+2^{4N-1}$ velden, symmetrieën respectievelijk vrijheidsgraden op (x).
Dus is het totaal aantal vrijheidsgraden van de $N \geq 1$ theorie in de formulering op de normale Minkowski-ruimte:

$$2^{4N-1}(4N^3+35N^2+84N+45) \;\Big|\; 2^{4N-1}(4N^3+35N^2+84N+45) \qquad (10.3)$$

Inderdaad zijn het aantal bosonische en fermionische vrijheidsgraden gelijk. In onderstaande tabel vullen we N = 1,2 in deze formule in en vergelijken die met de aantallen vrijheidsgraden van de verschillende andere theorieën met en zonder constraints (respectievelijk paragraaf 3 tot en met 6, en 8 tot en met 10).

(10.4)

		vrijheidsgraden		
		met constraints		zonder constraints
Einstein / Einstein-Cartan gravitatie		6		30
conforme gravitatie		5		45
conforme supergravitatie	N=1	8 + 8		1344 + 1344
	N=2	24 + 24	(17+16)	49280 + 49280

Geraadpleegde literatuur

Basombrío, F.G., 'A Comparitive Review of Certain Gauge Theories of the Gravitational Field'. General Relativity and Gravitation 12 (1980) 109.

Bergshoeff, E.A., Conformal invariance in supergravity. Proefschrift Rijksuniversiteit van Leiden. Leiden, 1983.

Cho, Y.M., 'Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian'. Physical Review D14 (1976) 2521.

Cho, Y.M., 'Gauge theory of Poincaré symmetry'. Physical Review D14 (1976) 3335.

Cho, Y.M., 'Gauge theory, gravitation, and symmetry'. Physical Review D14 (1976) 3341.

Conway, J.H., On Numbers and Games. Academic Press. London, New York, San Francisco, 1976.

Ivanenko, D. and G. Sardanashvily, 'The gauge treatment of gravity'. Physics Reports 94 (1983) 1.

Leeuwen, W.A. van, Structuur van ruimte-tijd. Syllabus Universiteit van Amsterdam. Amsterdam, 1982.

Kibble, T.W.B., 'Lorentz Invariance and the Gravitational Field'. Journal of Mathematical Physics 2 (1961) 212.

Misner, C.W., K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation. W.H. Freeman and Company. San Francisco, 1973.

Nieuwenhuizen, P. van, 'Supergravity'. Physics Reports 68 (1981) 189.

Pijls, H.G.J., 'The Yang-Mills equations'. In: Mathematical structures in field theories, Proceedings Seminar 1981-1982, edited by E.M. de Jager and H.G.J. Pijls, CWI Syllabus 2, Centrum voor Wiskunde en Informatica. Amsterdam, 1982.

Trautman, A., 'Fiber Bundles, Gauge Fields and Gravitation'. In: General Relativity and Gravitation, volume 1, 287, edited by A. Held, Plenum Press. New York, London, 1980.

Wit, B. de, 'Introduction to gauge field theories'. NIKHEF-H, preprint 80-01. Amsterdam, 1980.

Wit, B. de, 'Conformal invariance in gravity and supergravity', Lectures given at the 18th Winter School of Theoretical

Physics, Karpacz, February-March 1981, NIKHEF-H, preprint 81-20. Amsterdam, 1981.

Wit, B. de, 'Multiplet calculus'. Lectures given at the September School on Supergravity and Supersymmetry, ICTP, Trieste, September 1982, NIKHEF-H, preprint 82-25. Amsterdam, 1982.

Register